МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 • 1999

УДК 532.516.5

 В.П. БУШЛАНОВ

# ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ ТЕЧЕНИИ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В УГЛОВОЙ ОБЛАСТИ

Получено приближенное решение осесимметричной задачи о течении вязкой несжимаемой жидкости в окрестности точки соприкосновения равномерно движущегося поршня и стенки канала.

В [1] приведено решение задачи о движении вязкой несжимаемой жидкости между твердыми плоскостями, когда одна плоскость наклонена к другой под углом $\theta_0$ и равномерно скользит по ней. Рассмотрим аналогичную осесимметричную задачу о течении вязкой несжимаемой жидкости в окрестности точки соприкосновения стенки цилиндрического канала и равномерно скользящего со скоростью $U$ вдоль него поршня, наклоненного к стенке под углом $\theta_0$.

Вблизи точки соприкосновения градиенты скорости становятся большими, так как скорости жидкости на стенке и поршне различны. Как и в [1], будем предполагать, что основную роль играют силы вязкости. Выберем для решения задачи подвижную систему координат, движущуюся с поршнем. Тогда течение жидкости в окрестности точки соприкосновения будет установившимся и в случае осесимметричного движения без учета сил инерции уравнения движения и неразрывности имеют вид

$$\mu\Delta\mathbf{u} = \nabla p, \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \tag{1}$$

где $\mathbf{u}$ – скорость жидкости, $p$ – давление, $\mu$ – коэффициент динамической вязкости жидкости.

Запишем уравнения (1) в системе координат $\rho$, $\theta$, $\varphi'$, координаты которой связаны с координатами $z$, $r$, $\varphi$ цилиндрической системы соотношениями

$$R - r = \rho\sin\theta, \quad z = \rho\cos\theta, \quad \varphi = \varphi'$$

Из выражения первой квадратичной формы

$$ds^2 = h_1^2 dx_1^2 + h_2^2 dx_2^2 + h_3^2 dx_3^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + (R - \rho\sin\theta)^2 d\varphi'^2$$

имеем коэффициенты Лямэ

$$h_1 = 1, \quad h_2 = \rho, \quad h_3 = R - \rho\sin\theta$$

Обозначим

$$\mathbf{u} = u_\rho\mathbf{i}_\rho + u_\theta\mathbf{i}_\theta, \quad \mathbf{\Omega} = \operatorname{rot}\mathbf{u} = \Omega_\varphi\mathbf{i}_{\varphi'}$$

где $\mathbf{i}_\rho$, $\mathbf{i}_\theta$, $\mathbf{i}_{\varphi'}$ – единичные орты.

Так как $\operatorname{rot}\nabla p \equiv 0$, из (1) имеем

$$\operatorname{rot}\Delta\mathrm{u} = -\nabla\times\nabla\times\mathbf{\Omega} = 0 \tag{2}$$

Уравнения неразрывности и движения (2) в новой системе координат имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho h_3 u_\rho)+\frac{\partial}{\partial\theta}(h_3 u_\theta)=0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{\rho}{h_3}\frac{\partial}{\partial\rho}(h_3\Omega_\varphi)\right]+\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{\rho h_3}\frac{\partial}{\partial\theta}(h_3\Omega_\varphi)\right]=0 \tag{4}$$

$$\Omega_\varphi=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho u_\theta}{\partial\rho}-\frac{\partial u_\rho}{\partial\theta}\right) \tag{5}$$

Введем функцию тока $\psi(\rho,\theta)$, такую, что

$$\rho h_3 u_\rho=\frac{\partial\psi}{\partial\theta},\quad h_3 u_\theta=-\frac{\partial\psi}{\partial\rho} \tag{6}$$

Из (6) следует, что уравнение неразрывности (3) выполняется тождественно, а функция тока находится из уравнения (4), в котором компонента вихря $\Omega_\varphi$ выражается из соотношений (5), (6)

$$\Omega_\varphi=-\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\rho}{h_3}\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\rho h_3}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)\right] \tag{7}$$

Граничные условия для уравнений (1) имеют вид

$$\theta=0:\quad u_\rho=-U,\quad u_\theta=0;\quad \theta=\theta_0:\quad u_\rho=0,\quad u_\theta=0 \tag{8}$$

$$\theta=0:\quad \frac{\partial\psi}{\partial\theta}=-\rho RU,\quad \frac{\partial\psi}{\partial\rho}=0;\quad \theta=\theta_0:\quad \frac{\partial\psi}{\partial\theta}=0,\quad \frac{\partial\psi}{\partial\rho}=0 \tag{9}$$

Будем искать решение уравнения (4) в виде ряда для функции тока

$$\psi=R\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k f_k(\theta) \tag{10}$$

Ограничимся в (10) двумя первыми членами ряда, тогда из (7) с точностью до членов порядка $\rho$ получим

$$\Omega_\varphi=-\frac{R}{h_3^2}\left[\frac{R}{\rho}(f_1''+f_1)-\sin\theta f_1''+\cos\theta f_1'+R(f_2''+4f_2)\right] \tag{11}$$

Подставляя (11) в (4) и приравнивая к нулю коэффициенты при одинаковых степенях $\rho$, запишем для функций $f_1$ и $f_2$ следующие уравнения:

$$f_1^{(IV)}+2f_1''+f_1=0 \tag{12}$$

$$\{3\cos\theta(f_1''+f_1)+[R(f_2''+4f_2)-\sin\theta f_1''+\cos\theta f_1']'\}'=0 \tag{13}$$

При получении (13) учтено, что

$$-\sin\theta(f_1''+f_1)'+\cos\theta(f_1''+f_1)=\mathrm{const} \tag{14}$$

Действительно, дифференцируя левую часть (14), получим с учетом (12)

$$-\sin\theta(f_1^{(IV)}+2f_1''+f_1)=0$$

Граничные условия для функций $f_1$ и $f_2$ с учетом (9) имеют вид

$$\theta=0:\quad f_1'=-U,\quad f_1=0;\quad f_2'=0,\quad f_2=0 \tag{15}$$

$$\theta=\theta_0:\quad f_1'=0,\quad f_1=0;\quad f_2'=0,\quad f_2=0 \tag{16}$$

Уравнение (12) для $f_1$ и граничные условия (15) совпадают с аналогичными для функции $f(\theta)$ плоской задачи [1] и поэтому

$$f_1(\theta) = f(\theta) = U\frac{-\theta_0^2\sin\theta + (\theta_0 - \sin\theta_0\cos\theta_0)\theta\sin\theta + \sin^2\theta_0\theta\cos\theta}{\theta_0^2 - \sin^2\theta_0} \tag{17}$$

Легко проверить, пользуясь (12), (14), что уравнения (13), (16) выполняются, если

$$f_2(\theta) = -\frac{\sin\theta}{2R}f(\theta) \tag{18}$$

С учетом (18) функция тока (10) с точностью до членов $O(\rho^3)$ имеет вид

$$\psi(\rho,\theta) = R\rho f(\theta)\left(1 - \frac{\rho}{R}\frac{\sin\theta}{2}\right) \tag{19}$$

Из (6), (19) компоненты скорости с точностью до $O(\rho^2)$ равны

$$u_\rho = f'(\theta) + U\frac{\rho}{R}\Phi(\theta), \quad u_\theta = -f(\theta)$$

$$\Phi(\theta) = \frac{1}{2}\frac{(\theta_0 - \sin\theta_0\cos\theta_0)\sin^2\theta - (\theta - \sin\theta\cos\theta)\sin^2\theta_0}{\theta_0^2 - \sin^2\theta_0}$$

Компоненты тензора скоростей деформаций имеют вид

$$e_{\rho\rho} = \frac{\partial u_\rho}{\partial\rho} = \frac{U}{R}\Phi(\theta), \quad e_{\theta\theta} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{u_\rho}{\rho} = -\frac{U}{R}\Phi(\theta)$$

$$e_{\rho\theta} = \frac{\rho}{2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{u_\theta}{\rho}\right) + \frac{1}{2\rho}\frac{\partial u_\rho}{\partial\theta} = \frac{U}{2R}\left[\Phi'(\theta) + \frac{R}{\rho}\chi'(\theta)\right]$$

$$\chi'(\theta) = 2\frac{\theta_0\cos\theta - \sin\theta_0\cos(\theta - \theta_0)}{\theta_0^2 - \sin^2\theta_0}.$$

Для определения давления перепишем уравнения движения (1) с учетом уравнения неразрывности в виде

$$\frac{\nabla p}{\mu} = -\nabla\times\nabla\times\mathbf{U} = -\frac{\mathbf{i}_\rho}{h_2h_3}\frac{\partial}{\partial\theta}h_3\Omega_\varphi + \frac{\mathbf{i}_\theta}{h_1h_3}\frac{\partial}{\partial\rho}h_3\Omega_\varphi \tag{20}$$

Из (20), (11), (17), (18) получим, ограничиваясь двумя главными слагаемыми относительно $\rho$

$$\frac{R}{U\mu}\frac{\partial p}{\partial\rho} = -\frac{R}{\rho^2}\chi(\theta) - \frac{\chi(\pi/2)}{2\rho}, \quad \frac{R}{U\mu}\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial\theta} = \frac{\chi'(\theta)}{\rho}\left(\frac{R}{\rho} - \sin\theta\right) \tag{21}$$

$$\chi(\theta) = 2\frac{\theta_0\sin\theta - \sin\theta_0\sin(\theta - \theta_0)}{\theta_0^2 - \sin^2\theta_0}$$

Интегрируя (21), получим

$$\frac{R}{U\mu}p = \frac{R}{\rho}\chi(\theta) - \frac{1}{2}\chi\left(\frac{\pi}{2}\right)\ln\left(\frac{\rho}{R}\right) - 2\Phi(\theta) + \text{const}$$

**Заключение.** Получены приближенные выражения для скоростей, давления и компонент тензора скоростей деформации течения вязкой несжимаемой жидкости в окрестности точки соприкосновения стенки цилиндра и равномерно движущегося вдоль нее осесимметричного поршня, наклоненного к ней под углом $\theta_0$. Решение справедливо, когда силы инерции $\sim \delta U^2/\rho$ (где $\delta$ – плотность жидкости) пренебрежимо малы по сравнению с вязкими $\sim \mu U/\rho^2$. Таким образом, полученное решение справедливо в окрестности, определяемой радиусом $\rho \ll \mu/(\delta U)$. Полученное решение отличается от решения аналогичной плоской задачи [1] для скорости $u_\rho$ на величину $\Delta u \sim \rho/R$, скорость $u_\theta$ имеет такой же вид и не зависит от расстояния $\rho$, а давление существенно отличается на слагаемое $\Delta p \sim \ln(\rho/R)$, имеющее логарифмическую особенность в точке $\rho = 0$. Полная сила давления жидкости на поверхностях $\theta = 0$ и $\theta = \theta_0$ стремится к бесконечности по логарифмическому закону, отличающемуся от аналогичного для плоской задачи [1].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.

Томск
Томский филиал Института
структурной макрокинетики РАН

Поступила в редакцию
26.VIII.1997