МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 • 1999

УДК 532.5.013.4:537.84

© 1999 г. Ю.Г. ГУБАРЕВ

К НЕУСТОЙЧИВОСТИ ВИНТОВЫХ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ

Изучается задача линейной устойчивости одного частного класса стационарных винтовых течений идеальной несжимаемой жидкости с бесконечной проводимостью в магнитном поле. Прямым методом Ляпунова [1, 2] получено необходимое и достаточное условие устойчивости этого класса течений по отношению к возмущениям той же симметрии. Выведены априорные двусторонние экспоненциальные оценки роста возмущений, причем показатели экспонент, фигурирующих в этих оценках, вычисляются по параметрам стационарных течений и начальным данным для возмущений. Выделен класс наиболее быстрорастущих возмущений и найдена точная формула для определения скорости их нарастания. Построен пример стационарных течений и начальных возмущений, линейная стадия развития которых во времени может быть описана посредством полученных оценок.

Научная литература, посвященная теоретическому изучению различных типов возмущений плазмы в рамках модели одножидкостной идеальной магнитной гидродинамики, весьма обширна [3–7]. Из работ, выполненных ранее по теме данной статьи, следует выделить [4, 7], где с помощью энергетического принципа исследовалась задача об устойчивости плазменного пинча с распределенным током в продольном магнитном поле относительно малых винтовых возмущений. В этих работах было установлено, что вторая вариация функционала энергии магнитного поля не является ни знакоопределенной, ни знакопостоянной, а потому может принимать отрицательные значения. На основании этого был сделан вывод о неустойчивости плазменного пинча. Однако какого-либо подтверждения тому, что в этом случае действительно найдутся возмущения, которые будут нарастать с течением времени, получено не было. Там самым в [4, 7] обратная теорема Лагранжа [2] была по сути принята за истину без каких бы то ни было обоснований.

В настоящей работе этот недостаток устранен для частного класса стационарных винтовых МГД-течений идеальной несжимаемой жидкости, обладающей бесконечной проводимостью. Доказано, что при условии справедливости предположений обратной теоремы Лагранжа могут быть выведены двусторонние оценки, свидетельствующие об экспоненциальном по времени нарастании малых винтовых возмущений, наложенных на изучаемые стационарные течения.

1. Постановка точной задачи. В цилиндрической системе координат r, φ, z исследуются винтовые движения однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости, имеющей бесконечную проводимость, в магнитном поле $\mathbf{h} = (0, h_2, h_3)$. Для описания этих движений удобно ввести винтовую координату $\mu = a\varphi - bz$, где a – любое целое число, b – любое вещественное. Тогда поле скорости $\mathbf{u} = (u, v, w)$, поле давления p и магнитное поле $\boldsymbol{h}$ будут функциями от трех независимых переменных: r, μ и времени t. В этом случае уравнения пространственных движений идеально проводящей невязкой несжимаемой жидкости, содержащей магнитное поле [8], можно с использованием обозначений [9, 10] привести к форме

$$Du - K\beta\gamma - \frac{(a\gamma)^2}{rR^2} = -p_r^* + \rho_1 g_1 - \rho_2 r, \quad D\rho_1 = 0 \tag{1.1}$$

$$D\left(\frac{r\gamma}{R}\right)+K\beta ru=-p_\mu^*,\quad D\rho_2=0,\quad Dh_3=0,\quad u_r+\frac{u}{r}+\frac{\gamma_\mu}{r}=0$$

$$D\equiv\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\gamma}{r}\frac{\partial}{\partial\mu},\quad \gamma\equiv av-brw,\quad \beta\equiv aw+brv$$

$$R\equiv a^2+b^2r^2,\quad K\equiv\frac{2ab}{R^2},\quad p^*\equiv p+\frac{h_2^2+h_3^2}{8\pi},\quad \rho_1\equiv\beta^2$$

$$g_1\equiv\frac{b^2r}{R^2},\quad \rho_2\equiv\frac{h_2^2}{4\pi r^2}$$

Здесь индексы из независимых переменных обозначают соответствующие частные производные.

При выводе (1.1) учитывалось

$$ah_2/r-bh_3=0 \tag{1.2}$$

где h_2 и h_3 – угловая и осевая составляющие магнитного поля.

Это соотношение вытекает из уравнения

$$D(ah_2/r-bh_3)=0 \tag{1.3}$$

которое следует из трехмерного уравнения вмороженности магнитных силовых линий в перемещающееся вещество жидкости [8] при наличии винтовой симметрии движения и отсутствии у магнитного поля радиальной h_1 составляющей. В самом деле, из (1.3) видно, что если исходные угловую h_2 и осевую h_3 составляющие магнитного поля задать так, чтобы условие (1.2) было выполнено при $t = 0$, то оно останется в силе и в любой последующий момент времени.

Важным свойством (1.1) является сохранение величин ρ_1, ρ_2 и h_3 в жидких частицах. Поэтому, следуя [10], введем дополнительное скалярное поле $g(r, \mu, t)$, значения которого также сохраняются в каждой жидкой частице

$$Dq=0 \tag{1.4}$$

В качестве поля q может быть рассмотрена, например, одна из лагранжевых координат жидких частиц.

Ниже будет изучаться расширенная система уравнений движения (1.1), (1.2), (1.4).

Полагается, что жидкость целиком заполняет область τ с неподвижной твердой идеально проводящей границей $\partial\tau$. Это означает, что в процессе движения ни сама жидкость, ни находящееся в ней магнитное поле не проникают за пределы области τ. Поскольку для движений жидкости характерна винтовая симметрия, то граница $\partial\tau$ области тоже должна обладать этой симметрией, т.е. задаваться функциями двух переменных (α – номер компонента границы):

$$s_\alpha(r,\mu)=0,\ \alpha=1,2,\ldots,n \tag{1.5}$$

Исходя из этого, граничные условия для уравнений (1.1) представляются в виде

$$u(s_\alpha)_r+\frac{\gamma}{r}(s_\alpha)_\mu=0 \tag{1.6}$$

Начальные данные для уравнений (1.1), (1.4) при $t = 0$ задаются в форме

$$u=u_0(r,\mu),\ \gamma=\gamma_0(r,\mu),\ \rho_1=\rho_{10}(r,\mu),\ \rho_2=\rho_{20}(r,\mu),\ h_3=h_{30}(r,\mu),\ q=q_0(r,\mu) \tag{1.7}$$

при этом функции $u_0(r, \mu)$ и $\gamma_0(r, \mu)$ подбираются таким образом, чтобы внутри области τ обращалось в тождество последнее уравнение из (1.1), а не ее границе $\partial\tau$ выполнялось условие (1.6).

На решениях смешанной задачи (1.1), (1.2), (1.4)–(1.7) сохраняются интеграл энергии E_1 и функционал I, который определяется через произвольную функцию $\Phi(q)$

$$E_1=T_1+\Pi_1+\Pi_2=\text{const} \tag{1.8}$$

$$2T_1=\int_\tau\left(\frac{\gamma^2}{R}+u^2\right)d\tau,\quad \Pi_i=\int_\pi\rho_iU_id\tau,\quad i=1,2,\quad d\tau\equiv rdrd\mu$$

$$U_1(r) \equiv \frac{1}{2R} + C_1, \quad U_2(r) \equiv \frac{r^2}{2} + C_2, \quad I = \int_\tau \Phi(q) d\tau = \text{const}$$

где C_1 и C_2 – постоянные величины, представляющие собой значения функций U_1 и U_2 на каком-либо из компонентов границы $\partial\tau$ (1.5) соответственно.

Начально-краевая задача (1.1), (1.2), (1.4)–(1.7) имеет частный класс точных стационарных решений вида

$$u = \gamma = 0, \quad \upsilon = V(r) = CrR, \quad w = W(r) = a(C/b)R \tag{1.9}$$

$$\rho_1 = \rho_1^\circ(r) = (C/b)^2 R^4, \quad \rho_2 = \rho_2^\circ(r), \quad h_3 = h_3^\circ(r)$$

$$q = Q(r), \quad p^* = P^*(r), \quad dP^*/dr = \rho_1^\circ g_1 - \rho_2^\circ r$$

Здесь C – произвольная постоянная величина; поля $\overset{0}{h}_3(r)$ и $Q(r)$ суть произвольные функции аргумента r; поля $\overset{0}{h}_2(r)$ вычисляется по выбранному полю $\overset{0}{h}_3(r)$ согласно (1.2).

Если поле Q обладает тем свойством, что $dQ/dr \neq 0$ повсюду в области τ [11], то из (1.8), (1.9) вытекает

$$\rho_1^\circ = \rho_1^\circ(Q), \quad \rho_2^\circ = \rho_2^\circ(Q), \quad U_1 = U_1(Q), \quad U_2 = U_2(Q)$$

$$Q \in (Q^-, Q^+), \quad Q^- = \min Q(r), \quad Q^+ = \max Q(r).$$

2. Постановка линеаризованной задачи. Линеаризуем смешанную задачу (1.1), (1.2), (1.4)–(1.7) около решений (1.9)

$$u'_t - 2aC\gamma' = -p_r^{*\prime} + \rho'_1 g_1 - \rho'_2 r \tag{2.1}$$

$$(r/R)\gamma'_t + 2aCru' = -p_\mu^{*\prime}, \quad \rho'_{1t} + u'\overset{0}{\rho}_{1r} = 0$$

$$\rho'_{2t} + u'\rho_{2r}^\circ = 0, \quad h'_{3t} + u'h_{3r}^\circ = 0, \quad q'_t + u'Q_r = 0$$

$$u'_r + u'/r + (\gamma'/r)_\mu = 0$$

Система (2.1) описывает эволюцию с течением времени малых возмущений полей скорости $\mathbf{u}'$, модифицированного давления $p^{*\prime}$, магнитного поля $\mathbf{h}'$ и дополнительного скалярного поля q' в пределах области τ. Эту систему дополняют условие непротекания жидкости через границу $\partial\tau$, а также начальные данные для возмущений

$$u'(s_\alpha)_r + (\gamma'/r)(s_\alpha)_\mu = 0 \tag{2.2}$$

$$t = 0: \quad u' = u'_0(r,\mu), \quad \gamma' = \gamma'_0(r,\mu), \quad \rho'_1 = \rho'_{10}(r,\mu)$$

$$\rho'_2 = \rho'_{20}(r,\mu), \quad h'_3 = h'_{30}(r,\mu), \quad q' = q'_0(r,\mu)$$

Ниже штрихи у полей возмущений, отличающие их от полных решений начально-краевой задачи (1.1), (1.2). (1.4)–(1.7), опускаются ради упрощения записи формул.

Для решений смешанной задачи (2.1), (2.2) имеет место сохранение линейного аналога интеграла энергии E

$$E = T + \Pi = \text{const}, \quad 2T = \int_\tau \left(\frac{\gamma^2}{R} + u^2\right) d\tau \tag{2.3}$$

$$2\Pi = -\int_\tau \{[U'_1(Q)\rho_1^{\circ\prime}(Q) + U'_2(Q)\rho_2^{\circ\prime}(Q)]q^2\} d\tau$$

где штрихом сверху обозначена производная функции по аргументу.

Если везде в области τ выполняется условие

$$0 \leqslant -U'_1(Q)\rho_1^{\circ\prime}(Q) - U'_2(Q)\rho_2^{\circ\prime}(Q) < +\infty \tag{2.4}$$

то из независимости функционала E (2.3) от времени следует устойчивость стационарных течений (1.9) к малым возмущениям (2.1), (2.2) [10].

3. Функционал Ляпунова. Пусть условие (2.4) не выполнено, тогда докажем неустойчивость любого из стационарных течений (1.9). Для этого необходимо отыскать хотя бы одно возмущение среди малых возмущений (2.1), (2.2), которое будет экспоненциально нарастать во времени. Исходя из этого, далее изучаются такие движения жидкости, для которых лагранжевы возмущения дополнительного скалярного поля q (1.4), (2.1) равны нулю. Иными словами, возмущения представляют собой отклонения жидких частиц от соответствующих линий тока стационарных течений (1.9) и наиболее просто описываются с помощью поля лагранжевых смещений $\boldsymbol{\xi}(r, \mu, t) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ [12]

$$u = \xi_{1t}, \quad \gamma = \zeta_t, \quad \zeta \equiv a\xi_2 - br\xi_3, \quad r\xi_1 = -\psi_\mu, \quad \zeta = \psi_r, \quad \psi = \psi(r,\mu,t) \tag{3.1}$$

С учетом (3.1) задачу (2.1), (2.2) преобразуем к виду

$$r^{-1}\psi_{\mu tt} + 2aC\psi_{rtt} = p_r^* - \rho_1 g_t + \rho_2 r \tag{3.2}$$

$$\frac{r}{R}\psi_{rtt} - 2aC\psi_{\mu tt} = -p_\mu^*, \quad \rho_t = \frac{\overset{\circ}{\rho}_{1r}\psi_\mu}{r}, \quad \rho_2 = \frac{\overset{\circ}{\rho}_{2r}\psi_\mu}{r}$$

$$h_3 = \frac{\overset{\circ}{h}_{3r}\psi_\mu}{r}, \quad q = \frac{Q_r\psi_\mu}{r}, \quad (r,\mu) \in \tau$$

$$(s_\alpha)_r\psi_\mu = (s_\alpha)_\mu\psi_r, \quad (r,\mu) \in \partial\tau$$

$$t = 0: \quad \psi_r = (\psi_r)_0(r,\mu), \quad \psi_{rt} = (\psi_{rt})_0(r,\mu), \quad \psi_\mu = (\psi_\mu)_0(r,\mu), \quad \psi_{\mu t} = (\psi_{\mu t})_0(r,\mu)$$

Линейный аналог интеграла энергии (2.3) сохраняется и на решениях задачи (3.1), (3.2), однако форма записи его становится несколько иной

$$E = T + \Pi = \text{const}, \quad 2T = \int_\tau \left(\frac{\psi_{rt}^2}{R} + \frac{\psi_{\mu t}^2}{r^2}\right) d\tau,$$

$$2\Pi = -\int_\tau \left\{\left[U_1'(r)\overset{\circ}{\rho}{}_1'(r) + U_2'(r)\overset{\circ}{\rho}{}_2'(r)\right]\frac{\psi_\mu^2}{r^2}\right\} d\tau \tag{3.3}$$

Введем вспомогательный функционал [13]

$$M = \int_\tau \left\{\frac{\psi_\mu^2}{r^2} + \frac{\psi_r^2}{R}\right\} d\tau \tag{3.4}$$

двукратное дифференцирование которого по времени и последующие преобразования с применением (3.1) – (3.3) приводят к соотношению [13] $\ddot{M} = 4(T - \Pi) = 8T - 4E$, где точкой сверху обозначена производная по времени. Умножая это равенство на произвольный постоянный множитель λ и вычитая получившийся результат из (3.3), выведем

$$\dot{E}_\lambda = 2\lambda E_\lambda - 4\lambda T_\lambda, \quad E_\lambda = T_\lambda + \Pi_\lambda \tag{3.5}$$

$$2\Pi_\lambda = 2\Pi + \lambda^2 M, \quad 2T_\lambda = 2T - \lambda\dot{M} + \lambda^2 M = \int_\tau \left[\left(\frac{\psi_{\mu t} - \lambda\psi_\mu}{r}\right)^2 + \frac{(\psi_{rt} - \lambda\psi_r)^2}{R}\right] d\tau$$

Полагается, что $\lambda > 0$, тогда из (3.5) в силу неотрицательности функционала T_λ вытекает дифференциальное неравенство $\dot{E}_\lambda \leqslant 2\lambda E_\lambda$, интегрируя которое удается получить соотношение

$$E_\lambda(t) \leqslant E_\lambda(0)\exp(2\lambda T) \tag{3.6}$$

Неравенство (3.6) выполняется как для любых решений задачи (3.1), (3.2), так и для

любых положительных значений параметра λ. При выводе этого неравенства не потребовалось налагать каких бы то ни было ограничений на знак функционала Π (3.3).

Соотношение (3.6) говорит о том, что функционал E_λ (3.5) изменяется с течением времени монотонно. Этот факт позволяет рассматривать его ниже как функционал Ляпунова [1, 2, 13].

4. Оценки сверху и снизу. Выбирая подходящие начальные данные для полей лагранжевых смещений $\boldsymbol{\xi}$ и возмущений поля скорости $\mathbf{u}$, которые вычисляются по заданным функциям $(\psi_r)_0$, $(\psi_{rt})_0$, $(\psi_\mu)_0$ и $(\psi_{\mu t})_0$ (3.1), (3.2), при помощи неравенства (3.6) оказывается возможным получить двусторонние экспоненциальные оценки роста малых винтовых возмущений стационарных течений (1.9), а также вывести точную формулу для определения скорости нарастания наиболее быстрорастущих возмущений.

Действительно, пусть стационарное винтовое МГД-течение (1.9) таково, что в какой-либо части области τ неравенство (2.4) не имеет места. Это означает, что можно подобрать начальные поля лагранжевых смещений $\boldsymbol{\xi}_0$ (3.1), (3.2), которые будут удовлетворять неравенству $\Pi(0) < 0$. Поскольку поля лагранжевых смещений $\boldsymbol{\xi}$ и возмущения поля скорости $\mathbf{u}$ (3.1), (3.2) в начальный момент времени задаются независимо друг от друга, в качестве последних можно взять такие функции $\mathbf{u}_0$, чтобы было справедливо соотношение $T(0) < |\Pi(0)|$.

В этом случае функционал $E_\lambda(0)$, как это следует из (3.5), представляет собой полином второй степени от λ с положительным коэффициентом $M(0)$ (3.4) при λ^2 и отрицательным свободным членом $E(0)$ (3.3)

$$E_\lambda(0) = E(0) - (1/2)\lambda\dot{M}(0) + \lambda^2 M(0) \tag{4.1}$$

Если $\lambda > 0$, тогда из (4.1) вытекает неравенство $E_\lambda(0) < 0$ на следующем интервале

$$0 < \lambda < \Lambda_1 = B_1 + B_2^{1/2}, \quad B_1 = \frac{\dot{M}(0)}{4M(0)}, \quad B_2 = B_1^2 - \frac{E(0)}{M(0)} \tag{4.2}$$

Соотношения (3.6), $E_\lambda(0) < 0$ свидетельствуют о том, что решения начально-краевой задачи (3.1), (3.2) нарастают во времени экспоненциально.

Пусть $\lambda = \Lambda_1 - \delta$ (с любым δ из интервала $]0, \Lambda_1[$), тогда неравенство (3.6) предстанет в виде

$$E_{\Lambda_1-\delta}(t) \leqslant E_{\Lambda_1-\delta}(0)\exp[2(\Lambda_1 - \delta)t](E_{\Lambda_1-\delta}(0) < 0) \tag{4.3}$$

Обращаясь к определениям функционалов E_λ, T_λ и Π_λ, заметим

$$E_\lambda(t) > \Pi(t) \tag{4.4}$$

Это соотношение наряду с (3.3) позволяет придать неравенству (4.3) форму

$$-\Pi > |E_{\Lambda_1-\delta}(0)|\exp[2(\Lambda_1 - \delta)t] \tag{4.5}$$

Неравенство (4.5) показывает, что параметр $\Lambda_1 - \delta$ (4.2), (4.3) оценивает инкременты решений начально-краевой задачи (3.1), (3.2) снизу.

Оценка (4.5) существенно улучшается, если на начальные данные (3.2) наложить следующие ограничения:

$$(\psi_{rt})_0 = \lambda(\psi_r)_0, \quad (\psi_{\mu t})_0 = \lambda(\psi_\mu)_0 \tag{4.6}$$

В самом деле, пусть имеют место условия (4.6), тогда соотношения (3.5) дают возможность заключить, что $T_\lambda(0) = 0$, $E_\lambda(0) = \Pi_\lambda(0)$. Вместе с (3.5), (4.1) эти равенства (в случае выбора параметра λ положительным, а начальных полей лагранжевых смещений $\boldsymbol{\xi}_0$ (3.1), (3.2) обеспечивающими выполнение неравенства $\Pi(0) < 0$) помогают установить, что на интервале

$$0 < \lambda < \Lambda = (-2\Pi(0)M^{-1}(0))^{1/2} \tag{4.7}$$

справедливо соотношение $\Pi_\lambda(0) < 0$. Отсюда следует, что, положив параметр λ равным $\Lambda - \delta_1$ (с произвольным δ_1 из интервала $]0, \Lambda[$), можно преобразовать неравенство (3.6) к виду

$$E_{\Lambda-\delta_1}(t) \leqslant \Pi_{\Lambda-\delta_1}(0)\exp[2(\Lambda-\delta_1)t](\Pi_{\Lambda-\delta_1}(0) < 0) \tag{4.8}$$

Соотношение (4.8) может быть приведено к следующей окончательной форме:

$$-\Pi > |\Pi_{\Lambda-\delta_1}(0)|\exp[2(\Lambda-\delta_1)t] \tag{4.9}$$

если проделать необходимые выкладки при учете (3.3) и (4.4).

Неравенство (4.9) говорит о том, что параметр $\Lambda - \delta_1$ (4.7), (4.8) является величиной, ограничивающей снизу значения инкрементов решений начально-краевой задачи (3.1), (3.2), (4.6).

Из сравнения оценок (4.5) и (4.9) следует, что решения смешанной задачи (3.1), (3.2), начальные данные которых удовлетворяют условиям (4.6), растут быстрее всех остальных ее решений. При этом можно доказать, что самыми быстрорастущими решениями будут те, чьи инкременты вычисляются по формуле

$$\Lambda^+ = \sup_{\xi_0(r,\mu)} \Lambda \tag{4.10}$$

Действительно, пусть выполнено неравенство $\lambda > \Lambda^+$ (4.9). Тогда для всех возможных начальных полей лагранжевых смещений $\boldsymbol{\xi}_0$ (3.1), (3.2) будет иметь место соотношение $\Pi_\lambda(0) > 0$. Это означает, что функционал E_λ (3.5) также будет положительно определен для всех возможных начальных полей лагранжевых смещений $\boldsymbol{\xi}_0$ и скорости $\mathbf{u}_0$ (3.1), (3.2).

Следовательно, при $\lambda = \Lambda^+ + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, из (3.6) вытекает

$$E_{\Lambda^++\varepsilon}(t) \leqslant E_{\Lambda^++\varepsilon}(0)\exp[2(\Lambda^+ + \varepsilon)t] \tag{4.11}$$

Это свидетельствует о том, что параметр $\Lambda^+ + \varepsilon$ (4.10), (4.11) оценивает инкременты решений задачи (3.1), (3.2) сверху.

Из сопоставления неравенств (4.9) и (4.11) следует, что параметр Λ^+ (4.10) дает оценку скорости нарастания решений задачи (3.1), (3.2), (4.6) как снизу, так и сверху

$$\Lambda^+ - \delta_1 \leqslant \omega_* \leqslant \Lambda^+ + \varepsilon \tag{4.12}$$

Неравенство (4.12) демонстрирует, что наиболее быстро растут решения задачи (3.1), (3.2), инкремент Λ^+ которых определяется формулами (4.7), (4.10).

Таким образом, если условие (2.4) несправедливо, то после вычисления значения скорости нарастания наиболее быстрорастущих решений задачи (3.1), (3.2), (4.6) с помощью соотношений (4.7), (4.10) может быть получен ответ на вопрос: за какое характерное время малые возмущения (2.1), (2.2) приведут стационарные винтовые МГД-течения (1.9) идеальной несжимаемой жидкости с бесконечной проводимостью к разрушению?

5. Пример. Рассматриваются стационарные винтовые МГД-течения идеальной несжимаемой жидкости, обладающей бесконечной проводимостью, в конечном по длине участке кольцевого канала

$$\mathbf{u}^\circ = (0, CrR, a(C/b)R), \quad \mathbf{h}^\circ = (0, 6CrR, h_3^\circ(r)) \tag{5.1}$$

$$\Omega = \{(r, \mu)\colon 0 < r_1 \leqslant r \leqslant r_2, \ \ 0 < \mu_1 \leqslant \mu \leqslant \mu_2\}$$

Здесь r_1, r_2, μ_1 и μ_2 – известные постоянные величины.

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что для течений (5.1) условие (2.4) выполняется всюду в области Ω.

Рассмотрим начальные возмущения вида

$$\xi_{10} = -r^{-1}\psi_{1\mu}, \quad \zeta_0 = \psi_{1r} \tag{5.2}$$

$$\psi_1 = A\sin^2(2\pi r_1^{-1}r)\sin^2(2\pi r_2^{-1}r)\sin^2(2\pi\mu_1^{-1}\mu)\sin^2(2\pi\mu_2^{-1}\mu)$$

$$u_0 = -r^{-1}\psi_{2\mu}, \quad \gamma_0 = \psi_{2r}$$

$$\psi_2 = B\sin^3(2\pi r_1^{-1} r)\sin^3(2\pi r_2^{-1} r)\sin^3(2\pi\mu_1^{-1}\mu)\sin^3(2\pi\mu_2^{-1}\mu)$$

где A и B – некоторые постоянные величины.

Прямые вычисления показывают, что возмущения с начальными данными (5.2) удовлетворяют всем сформулированным ранее требованиям как внутри области Ω, так и на ее границе, т.е. течения (5.1) будут неустойчивы. Эти возмущения будут эволюционировать с течением времени в соответствии с оценками (4.5), (4.9) и (4.11), а их максимальная скорость роста будет определяться формулами (4.7), (4.10).

Заключение. Прямым методом Ляпунова получено необходимое и достаточное условие линейной устойчивости частного класса стационарных винтовых течений идеально проводящей невязкой несжимаемой жидкости в магнитном поле по отношению к малым винтовым возмущениям. Течения из этого класса устроены следующим образом: радиальные составляющие поля скорости и магнитного поля равны нулю; осевая составляющая магнитного поля представляет собой произвольную функцию радиуса, а осевая составляющая поля скорости – квадратичную; угловые составляющие поля скорости и магнитного поля вычисляются по соответствующим осевым составляющим с помощью известных формул и тоже являются функциями радиуса. На поля возмущений никаких дополнительных ограничений не налагается.

В точной нелинейной постановке вопрос о том, можно ли для рассматриваемых стационарных МГД-течений путем выбора различных дополнительных скалярных полей q получать оценки либо ограниченности возмущений, либо, наоборот, роста возмущений, остается открытым.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01771).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 472 с.
2. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.
3. *Bateman G.* MHD instabilities. Cambridge: MIT Press, 1978. 263 p. (Рус. перев.: *Бейтман Г.* МГД-неустойчивости. М.: Энергоиздат, 1982. 199 с.)
4. *Кадомцев Б.Б.* Гидромагнитная устойчивость плазмы // Вопрос теории плазмы. М.: Госатомиздат, 1963. Вып. 2. С. 132–176.
5. *Кадомцев Б.Б.* Коллективные явления в плазме. М.: Наука, 1988. 303 с.
6. *Половин Р.В., Демуцкий В.П.* Основы магнитной гидродинамики. М.: Энергоатомиздат, 1987. 206 с.
7. *Шафранов В.Д.* К вопросу о гидромагнитной устойчивости плазменного шнура с током в сильном продольном магнитном поле // Журн.-техн. физики. 1970. Т. 40. Вып. 2. С. 241–253.
8. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 623 с.
9. *Владимиров В.А.* Условия нелинейной устойчивости течений идеальной несжимаемой жидкости // ПМТФ. 1986. № 3. С. 70–78.
10. *Владимиров В.А., Губарев Ю.Г.* Условия нелинейной устойчивости плоских и винтовых МГД-течений // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 3. С. 442–450.
11. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 1. М.: Наука, 1965. 476 с.
12. *Chandrasekhar S.* Ellipsoidal figures of equilibrium. New Haven; London: Univ. Press, 1969. 252 p. (Рус. перев.: *Чандрасекхар С.* Эллипсоидальные фигуры равновесия. М.: Мир, 1973. 288 с.)
13. *Губарев Ю.Г.* К неустойчивости вращательно-симметричных МГД-течений // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 6. С. 19–25.

Новосибирск

Поступила в редакцию
11.X.1997