

УДК 533.951:537.84

© 1999 г. В.П. ЖУКОВ, Г. ФУКС

## О ПРИБЛИЖЕНИИ НЕСЖИМАЕМОСТИ В МАГНИТНОЙ ГАЗОДИНАМИКЕ

На примере задачи о развитии тиринг-неустойчивости в винтовой геометрии показано, что в отличие от обычной газодинамики в динамике плазмы для описания медленных течений приближение несжимаемости, вообще говоря, неприменимо. Это связано с тем, что в плазме могут распространяться несколько типов возмущений, взаимодействие которых приводит к тому, что изменения плотности могут быть порядка единицы.

В обычной газодинамике в случае медленно меняющихся существенно дозвуковых течений успешно используется приближение несжимаемости, которое можно получить, раскладывая исходные уравнения по малому параметру – числу Маха. Это позволяет исключить из рассмотрения несущественные быстрые возмущения. В динамике плазмы часто возникает следующая задача (для определенности будем иметь в виду цилиндрическую систему координат). Вдоль оси  $z$  имеется сильное магнитное поле напряженностью  $H_z$ . Магнитное поле поперек этой оси, характерные масштабы скорости плазмы и градиенты всех величин вдоль нее в  $R$  раз меньше  $H_z$ , альфвеновской скорости  $V_a = H_z / \sqrt{4\pi\rho}$  ( $\rho$  – плотность плазмы) и градиентов в поперечном направлении соответственно. В случае плазменной конфигурации, имеющей место в токамаках, параметр  $R$  равен отношению большого радиуса токамака к его малому радиусу. Если  $R$  достаточно велико, то естественно стремление разложить исходные уравнения по этому параметру, чтобы исключить быстрые магнитозвуковые возмущения, распространяющиеся со скоростью  $V_a$ , что приводит к существенному упрощению исходных уравнений. Согласно этой упрощенной модели, плазма является несжимаемой [1,2]. Однако, как показано в данной работе на примере важной для приложений задаче о развитии тиринг-неустойчивости в винтовой геометрии, имеющей непосредственное отношение к пилообразным колебаниям в токамаке, подобные уравнения не являются хорошими: изменение плотности плазмы может быть значительным. Это связано с тем, что в отличие от обычной газодинамики в плазме могут распространяться несколько типов возмущений, взаимодействие которых приводит к подобным эффектам.

Ниже приведена постановка задачи и представлены некоторые оценки и результаты численного решения исходной задачи.

**1. Постановка задачи.** В качестве исходных уравнений возьмем уравнения одножидкостной магнитной гидродинамики [3]. В цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$  в случае винтовой симметрии  $\partial/\partial z = -R^{-1}\partial/\partial\varphi$  эти уравнения примут вид

$$\rho \left( \frac{\partial V_g}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) V_g \right) = (\mathbf{H} \nabla) H_g + \eta \left( \frac{\partial \pi_{i,k}}{\partial x_k} \right)_g \quad (1.1)$$

$$\rho \left( \frac{\partial V_r}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) V_r - \frac{V_\varphi^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r}$$

$$-(1 + \frac{r^2}{R^2})^{-1} \left( \frac{\partial H_g^2 / 2}{\partial r} + (\Delta_s A_g - \frac{2}{R} H_z) \frac{\partial A_g}{\partial r} \right) + \eta \left( \frac{\partial \pi_{i,k}}{\partial x_k} \right)_r \quad (1.2)$$

$$\rho \left( \frac{\partial V_s}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) V_s + \frac{V_s V_r}{R} - 2 \frac{V_r V_z}{R} \right) = -(1 + \frac{r^2}{R^2}) \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial H_g^2 / 2}{\partial \varphi} - (\Delta_s A_g - \frac{2}{R} H_z) \frac{1}{r} \frac{\partial A_g}{\partial \varphi} + \eta \left( \frac{\partial \pi_{i,k}}{\partial x_k} \right)_s \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial A_g}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) A_g = \nu (\Delta_s A_g - 2 \frac{H_z}{R}) \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{V} H_z) = \text{div}(\mathbf{H} V_z) + \nu \Delta_s H_z \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\gamma - 1} \left( \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) T \right) = \\ = -p \text{div}(\mathbf{V}) + \nu j^2 + \eta \pi_{i,k} \frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \chi_{\parallel} \text{div} \left( \frac{\mathbf{H}}{|\mathbf{H}|} \nabla \left( \frac{\mathbf{H}}{|\mathbf{H}|} \nabla \right) T \right) \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$|\mathbf{H}| = \sqrt{H_r^2 + H_\varphi^2 + H_z^2}, \quad p = \rho T, \quad \gamma = 5/3$$

$$H_s = -\frac{\partial A_g}{\partial r}, \quad H_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A_g}{\partial \varphi}$$

$$j_s = -\frac{\partial H_g}{\partial r}, \quad j_r = \frac{1}{r} \frac{\partial H_g}{\partial \varphi}, \quad j_g = -\Delta_s A_g + 2 \frac{H_z}{R}$$

$$\Delta_s = (1 + \frac{r^2}{R^2}) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right)$$

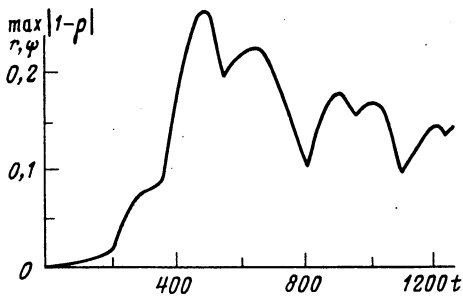
$$\text{div}(\mathbf{f}) = \frac{1}{r} \frac{\partial r f_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f_s}{\partial \varphi}, \quad (\mathbf{f} \nabla) g = f_r \frac{\partial g}{\partial r} + f_s \frac{\partial g}{\partial \varphi}$$

Здесь  $A_g$  –  $g$ -компонента вектор-потенциала;  $H_z$  и  $H_g$  –  $z$ - и  $g$ -компоненты магнитного поля;  $\mathbf{V}$  – скорость плазмы;  $\chi_{\parallel}$  – теплопроводность вдоль магнитного поля;  $\nu$  – коэффициент магнитной вязкости;  $\eta$  – коэффициент вязкости;  $\pi_{i,k}$  – обычный тензор вязких напряжений;  $f_s$  и  $f_g$  – величины, связанные с компонентами вектора  $\mathbf{f}$  следующим образом:

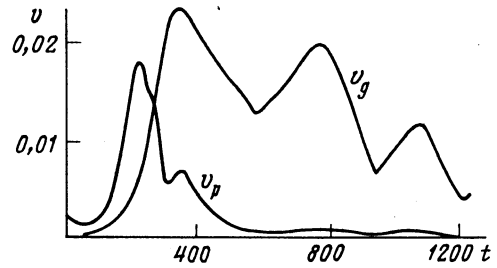
$$f_s = f_\varphi - \frac{r}{R} f_z, \quad f_g = f_z + \frac{r}{R} f_\varphi$$

В силу устоявшейся традиции  $g$  и  $z$  – компоненты векторов будем называть торoidalными, а  $r$ ,  $s$  и  $\varphi$  – полоидальными.

Система (1.1)–(1.7) приведена в безразмерных переменных. В качестве масштаба длины взят характерный поперечный размер плазмы  $a$  (малый радиус токамака), скорости –  $V_a$ , времени –  $a/V_a$ , магнитного поля –  $H_z$ .



Фиг. 1. Зависимость от времени максимального отклонения плотности от ее невозмущенного значения  $\max_{\varphi, r} |\rho - \rho_0|$



Фиг. Зависимость от времени максимального значения тороидальной  $\max_{\varphi, r} |V_{\varphi}|$  и полоидальной  $V_p = \max_{\varphi, r} \sqrt{V_r^2 + V_s^2}$  скоростей

В качестве начальных условий выберем следующие:

$$\rho = 1, H_z = 1, V_z = 0, H_r = 0, H_s = \frac{r}{R} \left( \frac{1 - (1 - r^2)^{q+1}}{qr^2} - 1 \right) \quad (1.8)$$

Таким образом, имеем ситуацию с нейтральным слоем. Вблизи оси координат  $H_s > 0$ , а при больших радиусах  $H_s < 0$ . Положение нейтральной ( $H_s = 0$ ) поверхности зависит от величины  $q$ .

Давление плазмы в начальный момент времени полагается таким, чтобы обеспечить равновесие плазмы в магнитном поле. Более точно следует говорить о квазиравновесии, поскольку наличие диссипации приводит к неинтересному квазистационарному движению, в котором плазменная конфигурация остается аксиально-симметричной. Это квазиравновесие нарушалось заданием малого аксиально-несимметричного возмущения скорости, дающего старт процессу пересоединения. Конкретный вид этого возмущения не играет роли.

Задача решалась в области  $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Граница  $r = 1$  полагается проводящей поверхностью

$$H_r = 0 (A_{\varphi} = \text{const}), \mathbf{V} = 0, T = 0$$

Для численного решения поставленной задачи использовалась конечно-разностная схема, в которой все функции вычислялись в одних и тех же узлах пространственной сетки. Все производные по пространству вычислялись с помощью центральных разностей. Исключение составляли выражения типа  $V_r \partial f / \partial r$ , которые аппроксимировались разностью вперед или назад в зависимости от знака  $V_r$ , что было необходимо для обеспечения устойчивости схемы. По этой же причине в выражениях типа  $V_s r^{-1} \partial f / \partial \varphi$  и  $v r^{-2} \partial^2 f / \partial \varphi^2$ , описывающих перенос и диффузию по  $\varphi$ , значения функции  $f$  выносились на следующий,  $(n + 1)$  шаг по времени. Получающиеся уравнения решались методом циклической прогонки. В целом конечно-разностная схема представляла собой простейшее обобщение на цилиндрический случай схемы, хорошо зарекомендовавшей себя для решения подобных задач в плоской геометрии схемы [3]. Она имела порядок аппроксимации  $o(\tau, h_{\varphi}^2, h_r)$ . Шаг по времени  $\tau$  ограничивался условиями Куранта и обычным условием устойчивости явных схем для уравнений параболического типа. Точность расчетов контролировалась мельчением сетки и выполнением законов сохранения.

**2. Оценки и результаты расчетов.** Прежде чем приводить результаты решения поставленной задачи, напомним как выглядят упрощенные уравнения в пределе

большого  $R$  [1,2]. Имеем следующий масштаб величин:

$$o(1): H_z, \rho, \nabla_{\perp}$$

$$o(R^{-1}): A_g, V_r, V_s, \partial/\partial t; \quad o(R^{-2}): H_z - 1, \rho - 1, p, j_r, j_s, V_g$$

В первом приближении получаем модель Кадомцева

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} = -\nabla(p + H_g) + j_g \nabla A_g + \eta \Delta \mathbf{V}$$

$$\frac{\partial A_g}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) A_g = v(\Delta A_g - \frac{2}{R}), \quad \text{div } \mathbf{V} = 0 \quad (2.1)$$

Величину  $p + H_g$  в (2.1) можно найти обычным образом, взяв дивергенцию от уравнения движения и используя условие несжимаемости. В этом приближении  $\rho = 1$ ,  $V_g = 0$ . Заметим, что вывод (2.1) не требует неравенства нулю коэффициентов переноса. Более того, равенство нулю этих коэффициентов делает вывод более строгим.

Обратимся теперь к картине течения, которую дают исходные, неупрощенные уравнения. Численное решение задачи (1.1)–(1.7) демонстрирует обычную картину пересоединения [2], сопровождающуюся появлением острова на картине силовых линий полоидального магнитного поля. Движение сосредоточено внутри круга радиуса  $r_*$ , примерно совпадающего с кругом, внутри которого в начальный момент времени полный полоидальный магнитный поток равен нулю (см. 1.8)

$$\int_0^{r_*} H_s(r, t=0) r dr = 0$$

При  $r > r_*$  плазма остается практически невозмущенной. Этот этап течения хорошо описывается упрощенными уравнениями (2.1). Изменения плотности во время процесса пересоединения малы – менее 5%.

После исчезновения внутреннего полоидального магнитного потока обратного знака, являющегося причиной движения, полоидальная скорость сравнительно быстро стремится к нулю, а распределение функций  $A_g$  и  $p + H_g^2/2$ , определяющих эту скорость, – к аксиально-симметричному квазиравновесному состоянию. При этом если  $\chi_{||}$  мало, то распределения  $p$  [2], а следовательно, и  $H_g$  еще далеки от аксиально-симметричного. Это порождает низкочастотные колебания альфвеновского типа.

Более ясную картину этих колебаний можно составить, используя тот факт, что с определенной точностью можно записать равенство

$$(\mathbf{H} \nabla)(p + H_g^2/2) \approx 0 \quad (2.2)$$

которое можно получить, умножив уравнения (1.2), (1.3) для полоидальной скорости на  $\mathbf{H}$ . Поскольку полоидальная скорость плазмы, а тем более ее ускорение малы, то, учитывая, что  $\mathbf{H} \nabla A_g = 0$ , и полагая  $1 + r^2/R^2 \approx 1$ , получаем (2.2). Подчеркнем, что (2.2) не связано с разложением по  $R$  непосредственно, а является свойством конкретной задачи.

Проведем некоторые оценки. Для этого используем систему модельных уравнений, основанную на линеаризации уравнений (1.1), (1.4)–(1.7) и (2.2). Чтобы не загромождать изложение, положим  $H_z \approx H_g = 1 + \delta H_g$ ,  $p = p_0 + \delta p$  ( $p_0 = \text{const} \ll 1$ ),  $\rho = 1 + \delta \rho$ ,  $1 + r^2/R^2 \approx 1$  и т.п. В итоге получим

$$\frac{\partial V_g}{\partial t} = (\mathbf{H} \nabla) \delta H_g, \quad \frac{\partial \delta H_g}{\partial t} = -\text{div} \mathbf{V} + (\mathbf{H} \nabla) V_g + v \Delta \delta H_g$$

$$\frac{\partial \delta p}{\partial t} = -\gamma p_0 \operatorname{div} \mathbf{V} + (\gamma - 1) \chi_{\parallel} (\mathbf{H} \nabla)^2 \delta p, \quad \mathbf{H} \nabla \delta p = -\mathbf{H} \nabla \delta H_g, \quad \frac{\partial \delta p}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{V}$$

Легко видеть, что при  $v = \chi_{\parallel} = 0$  частота колебаний имеет порядок  $\sqrt{\gamma p_0} H_p$ . Здесь  $H_p$  – характерное значение полоидального магнитного поля в области сосредоточения движения  $r < r_*$ . Амплитуды колебаний различных величин могут быть выражены через амплитуду  $\delta p$  следующим образом:  $\delta H_g \sim \delta p$ ,  $V_g \sim \delta p / \sqrt{\gamma p_0}$ ,  $\operatorname{div} \mathbf{V} \sim H_p \delta p / \sqrt{\gamma p_0}$ ,  $\delta p \sim \delta p / (\gamma p_0)$ . Если  $\delta p \sim p_0$ , а при  $\chi_{\parallel} = 0$  это действительно так, то изменения плотности оказываются порядка единицы, а величина тороидальной скорости  $V_g \approx \sqrt{p_0} \sim R^{-1}$ , в то время как, согласно разложению (2.1), эти величины должны быть порядка  $R^{-2}$ . Колебания в этом случае являются сильно нелинейными, однако приведенные оценки по порядку величины соответствуют результатам расчетов. Наличие теплопроводности уменьшает амплитуду колебаний прежде всего потому, что уменьшается величина  $\delta p$  после окончания процесса пересоединения.

В качестве примера на фиг. 1 приведена зависимость величины  $\max_{\varphi, r} |p-1|$ , а на фиг. 2 – зависимости  $\max_{\varphi, r} |V_g|$  и  $V_p = \max_{\varphi, r} \sqrt{V_r^2 + V_s^2}$  от времени, полученные с помощью численного решения задачи (1.1)–(1.8) при  $v = 5 \cdot 10^{-5}$ ,  $\chi_{\parallel} = 3$ ,  $\eta = 10^{-5}$ ,  $R = 4$  и  $q = 3$  ( $r_* \approx 0,6$ ). Величина тороидальной скорости  $V_g$  на этапе релаксации превышает максимум значения  $V_p$ , который достигается в момент окончания процесса пересоединения, в то время как согласно (2.1), должно быть  $V_g \ll V_p$ . Отклонения плотности от единицы также значительны.

**Заключение.** Приведенные оценки и результаты расчетов показывают, что, вообще говоря, модели большого тороидального поля неприменимы при описании релаксации плазмы к новому квазиравновесному состоянию после окончания процесса пересоединения. Амплитуда колебаний плотности значительна и не связана непосредственно с параметром  $R$ . Величина тороидальной скорости также намного превышает значение, ожидаемое согласно этой модели. Это связано с тем, что в отличие от обычной газодинамики в замагниченной плазме распространяются несколько видов возмущений (в частности, альфвеновские возмущения).

В реальных токамаках значение  $\chi_{\parallel}$  велико настолько, что  $V_g$  и изменение плотности малы. Поэтому предположения, сделанные при выводе (2.1), хорошо выполняются. Однако приведенные выше исследования говорят о необходимости осторожного использования подобных приближений.

Авторы выражают благодарность Г.И. Дудниковой, С.В. Буланову и Ф. Пегораро за полезные обсуждения.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01572) и Германского исследовательского общества (DFG).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кадомцев Б.Б., Погуце О.П. Нелинейные винтовые возмущения плазмы в токамаке // ЖЭТФ. 1973. Т. 65. Вып. 2. С. 575–589.
2. Диестровский Ю.Н., Костамаров Д.П. Математическое моделирование плазмы. М.: Наука, 1982. 320 с.
3. Буланов С.В., Дудникова Г.И., Жуков В.П., Ионовиков И.Н., Пичужкин В.В. Токовые слои и окрестности критических точек магнитного поля. Влияние эффекта Холла. Численное моделирование формирования токовых слоев // Тр. ИОФАН. 1996. Т. 51. С. 101–123.

Новосибирск

Поступила в редакцию  
29.VII.1997