

УДК 533.6.011.55:621.452.2

© 1999 г. Г.Ю. МИСКО

ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО СОПЛА ГИПЕРЗВУКОВОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА ПРИ ЗАДАННЫХ ГАБАРИТАХ И МОМЕНТЕ

Методом неопределенного контрольного контура решена вариационная задача о построении оптимального сопла гиперзвукового прямогоочного воздушно-реактивного двигателя при заданных изопериметрическом условии на момент и габаритных ограничениях. В качестве оптимизируемого функционала рассматривается подъемная сила летательного аппарата. Показано, что увеличение момента, связанное с заменой оптимизации по тяге оптимизацией по подъемной силе, эффективно компенсируется учетом ограничения на момент.

1. Оптимизируемой характеристикой при профилировании сопла, как правило, служит тяга. Однако необходимо понимать, что выбор целевой функции в значительной мере зависит от назначения создаваемого летательного аппарата. Так, выбор тяги в качестве оптимизируемой величины отвечает ситуациям, в которых главным является разгон летательного аппарата при малых углах атаки, а для крейсерского режима следует проводить оптимизацию по подъемной силе.

В [1] решена задача построения оптимального контура сопла, где в качестве оптимизируемого функционала наряду с тягой (при оптимизации летательного аппарата – с избытком тяги R над сопротивлением) рассматривалась величина суммарной подъемной силы аппарата χ

$$\chi = (\sin \alpha + K \cos \alpha) \left(R + N \frac{\cos \alpha - K \sin \alpha}{\sin \alpha + K \cos \alpha} \right) \quad (1.1)$$

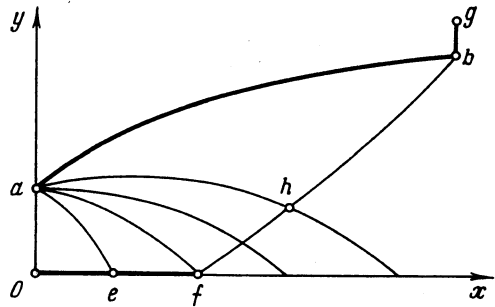
Здесь N – величина нормальной силы, представляющей y -компоненту интеграла сил давления, действующих на сопло, в системе координат, связанной с летательным аппаратом, а α – угол атаки. Выражение (1.1) учитывает вклад в подъемную силу корпуса летательного аппарата и крыльев заданного качества K . При этом сопла, оптимизируемые по подъемной силе, получают менее расширяющиеся, чем оптимизируемые по избытку тяги, что приводит к значительному увеличению момента сил, действующих на сопло. Возникающий момент нуждается в компенсации.

По этой причине в данной работе в постановку вариационной задачи профилирования сопла включено изопериметрическое условие на момент. Решение такой задачи позволило построить контур сопла, оптимального по χ , с допустимым значением момента без значительного уменьшения оптимизируемой величины. Заметим, что в [2] рассматривалась задача о построении сопла максимальной тяги при заданной нормальной силе, а в [3–4] учет моментных характеристик при профилировании сопел проводился в несколько иной постановке.

В декартовых координатах x, y рассмотрим несимметричное плоское сопло с профилируемой верхней стенкой ag и прямолинейной нижней стенкой, которую будем считать фиксированной. В общем случае ag может состоять из участка двустороннего

экстремума ab , обтекаемого сверхзвуковым потоком, и торца bg , который газом не обтекается и на который действует заданное внешнее давление p^+ (фиг. 1). В дальнейшем оптимальную длину нижней стенки можно определить прямым методом, как это делалось в [1].

Пусть нижняя стенка сопла лежит на оси x , а входное сечение сопла – на оси y . Заданы максимально допустимые габариты: длина X и высота Y сопла, сверхзвуковой поток при $x = 0$ и



Фиг. 1. Схема течения в оптимальном сопле

прогнитодавление p^+ среды, в которую происходит истечение. Газ считается невязким и нетеплопроводным. Также задан момент действующих на ag сил давления M_z относительно точки с координатами (x_0, y_0) . При указанных ограничениях требуется так спрофилировать верхнюю стенку $y = Y(x)$, чтобы определенная формулой (1.1) подъемная сила χ была максимальна.

Пользуясь интегральными законами сохранения, запишем силы и момент, действующие на ag , через интегралы вдоль некоторой кривой fb с точкой f оси x , лежащей левее сечения выхода (фиг. 1). Тогда с точностью до несущественного при решении вариационной задачи постоянного слагаемого

$$\begin{aligned}
 R &= \int_0^1 \left(\frac{p}{k\rho u} + \frac{u}{k} + \frac{pux'}{u} \right) d\psi + p^+ \int_{y_b}^{y_g} dy \\
 N &= \int_0^1 \left(px' - \frac{v}{k} \right) d\psi + p^+ \int_{x_b}^{x_g} dx \\
 M_z &= \int_0^1 \left[\frac{p(y-y_0)}{k\rho u} + \frac{u(y-y_0) - v(x-x_0)}{k} + \right. \\
 &\quad \left. + px' \left[(x-x_0) + \frac{v}{u}(y-y_0) \right] \right] d\psi + p^+ \int_b^g [(x-x_0)dx + (y-y_0)dy]
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь R – тяга, N – нормальная сила, M_z – момент относительно точки O с координатами (x_0, y_0) , приведенные к единице длины по направлению размаха крыла, p – давление, ρ – плотность газа, u, v компоненты вектора скорости \mathbf{V} , составляющего с осью x угол ϑ , ψ – функция тока, такая, что

$$d\psi = k\rho(u dy - v dx) \tag{1.3}$$

Нормирующий множитель $k \neq 0$ выбран так, чтобы при $\psi = 0$ на нижней стенке на верхней стенке выполнялось равенство $\psi = 1$. Штрих в выражениях (1.2) означает производную по ψ вдоль fb .

Применим к решению задачи метод неопределенного контрольного контура, в котором учтем изопериметрическое условие на момент M_z . Контрольный контур будем задавать в плоскости $x\psi$ кривой $x = x(\psi)$.

Для дальнейшего дифференциальное равенство (1.3) удобно переписать в виде ($x' = dx/d\psi, y' = dy/d\psi$)

$$L_1 \equiv \frac{1}{k\rho u} + \frac{v}{u} x' - y' = 0 \tag{1.4}$$

Составим вспомогательный функционал

$$I = R + \int_0^1 \omega_1(\psi)L_1(\psi)d\psi + \lambda_1 N + \lambda_2 M_2 \quad (1.5)$$

Здесь λ_2 – постоянный, $\omega_1(\psi)$ – подлежащий определению переменный множители Лагранжа, а λ_1 находится в соответствии с (1.1) по формуле

$$\lambda_1 = (\cos \alpha - K \sin \alpha) / (\sin \alpha + K \cos \alpha)$$

Интегрирование в (1.5) ведется вдоль еще неизвестной, но не варьируемой в плоскости $x\psi$ кривой fb . При варьировании контура ab , вызывающем изменение параметров на fb или ее части, функции $x(\psi)$ и $\omega_1(\psi)$ считаются неизменными.

Поскольку момент задан, то при любом допустимом варьировании, когда в области влияния варьируемого контура выполняются уравнения Эйлера и их следствие – уравнение (1.4), вариации оптимизируемого и вспомогательного функционалов совпадают. Тогда, варьируя (1.5), найдем

$$\begin{aligned} \delta R + \lambda_1 \delta N = \delta I &= \int_{\psi_h}^1 (A^u \delta u + A^v \delta v + A^y \delta y) d\psi + B^x \Delta x_b + B^y \Delta y_b \\ B^x &= \left(\omega_1 \frac{v}{u} \right)_b + \left(\frac{p\eta}{u} \right)_b - p^+ (\lambda_1 + \lambda_2 (x_b - x_0)) \\ B^y &= -[\omega_{1b} + p^+ (1 + \lambda_2 (y_b - y_0))] \\ A^u &= \left(\frac{u^2}{a^2} - 1 - \beta \right) \frac{\xi}{k\rho u^2} - \frac{\beta\eta}{kv}, \quad A^v = \left(\frac{v^2}{a^2} + \beta \right) \frac{\xi}{k\rho uv} - \frac{(\beta+1)\eta}{ku} \\ A^y &= \omega'_1 + \lambda_2 \frac{u}{k} \left[1 + \frac{p}{\rho u^2} (1 + \beta) \right] \\ \beta &= k\rho ux', \quad \xi = \omega_1 + p[1 + \lambda_2 (y - y_0)] \\ \eta &= v + \lambda_1 u + \lambda_2 [u(x - x_0) + v(y - y_0)] \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь h – точка пересечения контрольного контура fb с замыкающей характеристикой ah начального пучка волн разрежения, Δx_b и Δy_b – приращения координат концевой точки b , δu , δv и δy – вариации u , v и y , т.е. разности их значений (при фиксированном ψ) на hb для проварьированной и исходной образующей ab . Индекс h приписан предельным значениям параметров справа от точки b . При получении выражений (1.6) учтено, что малое варьирование контура ab не возмущает поток на отрезке fb кривой fb , в силу чего все вариации на нем равны нулю.

Следуя [5], пользуясь произволом в выборе функций $\omega_1(\psi)$ и $x(\psi)$, обратим в нули коэффициенты A^u и A^v в (1.6), причем это можно сделать для любого (необязательно оптимального) контура ab . Отсюда, решив систему алгебраических уравнений, найдем, что ω_1 выражается через параметры потока на hb формулой

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \rho V^2 \zeta \operatorname{tg} \mu \cos \vartheta - p(1 + \lambda_2 (y - y_0)) \\ \zeta &= \sin \vartheta + \lambda_1 \cos \vartheta + \lambda_2 (\cos \vartheta (x - x_0) + \sin \vartheta (y - y_0)) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь V – модуль скорости, μ – угол Маха. Кривая hb является отрезком C^+ -характеристики и на ней

$$x' = \frac{\cos(\vartheta + \mu)}{k\rho V \sin \mu} \quad (1.8)$$

С учетом выполненных преобразований из рассмотрения оставшихся в (1.6) слабых получим следующие необходимые условия оптимальности. Если образующая ab реализует максимум χ , то характеристика hb определяется условием совместности, соотношениями (1.7) и (1.8) и уравнением $A^y = 0$, т.е.

$$\omega'_1 = -\lambda_2 \frac{V}{k} \left[\cos \vartheta + \frac{p}{\rho V^2} \frac{\sin(\vartheta + \mu)}{\sin \mu} \right]$$

При отсутствии ограничений на координату y_b она находится из условия

$$B^y = [(p - p^+)(1 + \lambda_2(y - y_0)) - \rho V^2 \zeta \operatorname{tg} \mu \cos \vartheta]_b = 0 \quad (1.9)$$

При наличии ограничения $y_b \leq Y$, если значение y_b , полученное из (1.9), оказывается больше Y , решением будет $y_b = Y$, и, поскольку при этом допустимые Δu_b отрицательны, в точке b должно выполняться неравенство

$$[(p - p^+)(1 + \lambda_2(y - y_0)) - \rho V^2 \zeta \operatorname{tg} \mu \cos \vartheta]_b \geq 0$$

Аналогично x_b либо определяется условием

$$B^x = [(p - p^+)(\lambda_1 + \lambda_2(x - x_0)) + \rho V^2 \zeta \operatorname{tg} \mu \sin \vartheta]_b = 0 \quad (1.10)$$

и оказывается меньше X , либо найденная из (1.10) величина x_b превращает максимально допустимую длину сопла и тогда $x_b = X$, а условием оптимальности по x_b становится неравенство

$$B^x \geq 0$$

Проанализируем коэффициент B^x . Запишем его при условии, что y_b определяется уравнением (1.9)

$$B^x = (p_b - p^+) \frac{\zeta_b}{\cos \vartheta_b} = \frac{(\rho V^2 \zeta^2 \operatorname{tg} \mu)_b}{1 + \lambda_2(y_b - y_0)}$$

Отсюда видно, что при отсутствии изопериметрического условия на момент, а также если $\lambda_2 \geq -(y_b - y_0)^{-1}$, что, как показывают расчеты, соответствует величинам M_2 , имеющим практическое значение, всегда выполняется неравенство $B^x \geq 0$. Это означает, что, как и при оптимизации по тяге [2], при оптимизации по подъемной силе длина сопла определяется габаритным ограничением, т.е. $x_b = X$.

Таким образом, из решения вариационной задачи получено уравнение, определяющее связь между параметрами на экстремальной характеристике, и условия, дающие координаты ее концевой точки. Вместе с условием совместности эти соотношения полностью задают оптимальную характеристику hb . При известных характеристиках ah и hb контур сопла ab находится методом характеристик из решения задачи Гурса.

2. Перейдем теперь к описанию численных результатов. Рассматривались плоские несимметричные сопла с прямолинейной нижней стенкой фиксированной длины $X_{cl} = 0,7246$, высотой входного сечения $h = 0,1$ и максимально допустимой длиной сопла $X = 4,5$. Поток в начальном сечении (при $x = 0$) равномерный, параллельный оси x и сверхзвуковой с заданным начальным числом Маха $M = 1,3763$. Расчеты выполнены в рамках модели совершенного газа с показателем адиабаты $\kappa = 1,2551$. При обезразмеривании за масштабы плотности, скорости и давления брались ρ_* , u_* и $\rho_* u_*^2$, где ρ_* и u_* – размерные критические плотность и скорость на входе в сопло. Внешнее давление среды принималось равным $p^+ = 0,00147$. Оптимизация по подъемной силе проводилась для качества крыльев $K = 3$ и угла атаки $\alpha = 6^\circ$.

Таблица 1

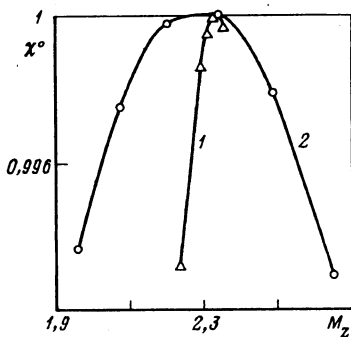
y_b	M_z	R	N	χ°	$\Delta\chi, \%$
I					
1,2	2,236	0,557	0,351	0,9932	0,682
1,06	2,292	0,544	0,427	0,9986	0,138
1,02	2,310	0,539	0,451	0,9995	0,049
0,98	2,325	0,535	0,471	0,9999	0,007
0,95	2,338	0,531	0,489	1	0
0,91	2,353	0,526	0,511	0,9997	0,029
II					
1,06	1,957	0,537	0,446	0,9936	0,640
1,02	2,074	0,536	0,460	0,9975	0,253
0,98	2,201	0,534	0,474	0,9998	0,024
0,95	2,338	0,531	0,489	1	0
0,93	2,487	0,527	0,503	0,9979	0,211
0,91	2,651	0,520	0,518	0,9929	0,709

Таблица 2

№	$R (\Delta R, \%)$	$\chi (\Delta\chi, \%)$	M_z
1	0,583	1,820	2,006
2	0,531 (-8,92)	1,974 (+8,46)	2,338
3	0,536 (-8,06)	1,965 (+7,97)	2,006

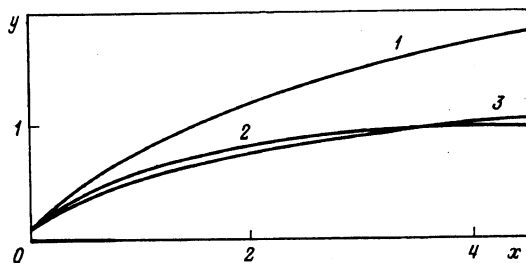
Сначала при построении сопел в решении вариационной задачи не учитывалось изопериметрическое условие на момент, а достижение заданного момента осуществлялось параметрическим изменением ординаты концевой точки верхней стенки сопла. Получившиеся при этом результаты представлены кривой 1 на фиг. 2, показывающей зависимость подъемной силы от задаваемой величины момента. Вдоль оси y отложена относительная величина подъемной силы χ^0 , равная $\chi^0 = \chi/\chi_{\max}$, где $\chi_{\max} = 1,974$ – максимальная подъемная сила, полученная при решении вариационной задачи без ограничения на момент. Некоторые характеристики построенных таким образом контуров приведены в части I табл. 1, в которой R – продольная компонента интеграла сил давления, действующих на контур abg . Видно, что при таком способе уменьшения момента имеет место существенное падение подъемной силы.

Результаты выполненной в согласии с условиями разд. 1 оптимизации, при которой в постановке вариационной задачи учтено изопериметрическое условие на момент, позволяют исправить указанный недостаток. При этом вместо фиксированных значений M_z задавались различные величины постоянного множителя Лагранжа λ_2 , вводящего в (1.5) условие на момент. Характеристики построенных оптимальных сопел приведены в части II табл. 1, а зависимость подъемной силы от момента изображена кривой 2 на фиг. 2. Сравнение кривых 1 и 2 показывает, что учет условия на момент при решении вариационной задачи позволяет сохранить низкую величину M_z почти без уменьшения подъемной силы. Использование этой возможности демонстрируют фиг. 3 и табл. 2.



Фиг. 2

Фиг. 2. Зависимости подъемной силы χ° от момента M_z при профилировании сопла: кривая 1 (2) получена без учета (с учетом) изопериметрического условия на момент



Фиг. 3

Фиг. 3. Примеры построения оптимальных образующих: 1 – сопло максимальной тяги; 2 (3) – сопло максимальной подъемной силы, рассчитанное без ограничения на момент (для значения момента $M_z = 2,01$)

На фиг. 3 кривая 1 представляет контур плоского сопла максимальной тяги, а кривая 2 – контур сопла максимальной подъемной силы, рассчитанные без ограничения на момент. Силовые и моментные характеристики этих сопел приведены в табл. 2. Первый ее столбец составлен из номеров образующих сопел на фиг. 3. Данные в скобках показывают отличие значений R и χ от соответствующих величин, характеризующих сопло максимальной тяги. Из табл. 2 видно, что, как и указывалось в [1], замена оптимизации по тяге оптимизацией по подъемной силе приводит к существенному увеличению момента, создаваемого соплом. Для сопла максимальной подъемной силы $M_z = 2,34$, тогда как при оптимизации по тяге 2,01. Кривая 2 на фиг. 2 показывает, что можно построить сопло, оптимальное по подъемной силе с прежним значением момента $M_z = 2,01$ при уменьшении χ всего на 0,49%. Последнее составляет малую долю от выигрыша в 8,46%, полученного благодаря правильному выбору целевой функции при решении вариационной задачи. Контур сопла, дающего увеличение χ на 8% при $M_z = 2,01$, представлен на фиг. 3 кривой 3.

Заключение. Выполненное исследование показало, что увеличение момента, связанное с переходом в качестве оптимизируемого функционала от тяги сопла к подъемной силе всего летательного аппарата, не представляет особой проблемы. Существует возможность его компенсации путем профилирования сопла на основе решения вариационной задачи, при постановке которой учитывается ограничение на момент. Подъемная сила при этом снижается незначительно.

Автор признателен А.Н. Крайко и Н.И. Тилляевой за полезные обсуждения и помощь в работе.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01825).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бафталовский С.В., Крайко А.Н., Макаров В.Е., Тилляева Н.И. Оптимизация силовой установки гиперзвукового летательного аппарата с прямоточным воздушно-реактивным двигателем // Изв. РАН. МЖГ. 1997. № 4. С. 127–135.

2. Рылов А.И. О построении компактных несимметричных сопел максимальной тяги при заданной подъемной силе // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 6. С. 132–136.
3. Рылов А.И. Построение несимметричных сопел максимального момента при дополнительных условиях на геометрические и силовые характеристики // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 5. С. 148–152.
4. Рылов А.И. К анализу оптимальных несимметричных плоских сопел с учетом моментных характеристик // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 4. С. 103–108.
5. Крайко А.Н. Вариационные задачи газовой динамики. М.: Наука, 1979. 447 с.

Москва

Поступила в редакцию
17.VI.1997