

УДК 533.6.011.5:532.516.5:519.63

© 1999 г. В.А. ИВАНОВ, С.В. ПЕЙГИН, С.В. ТИМЧЕНКО

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОБТЕКАНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАТУПЛЕННЫХ ТЕЛ СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ВЯЗКОГО ГАЗА

Численно исследовано обтекание осесимметричных гладких затупленных тел сверхзвуковым потоком вязкого однородного газа в широком диапазоне изменения геометрии течения, чисел Маха и Рейнольдса. Решения исходных уравнений вязкого ударного слоя получены методом установления по времени. Проанализировано влияние определяющих параметров задачи на характер течения и теплообмена вдоль поверхности. Дана оценка точности и области применимости ряда приближенных подходов к решению задачи.

Численное решение уравнений двумерного вязкого ударного слоя было получено в [2–5]. В [2, 3] методом глобальных итераций рассмотрено обтекание гиперблоидов и сферически затупленных конусов. Принцип установления для исследования течения около сферы использовался в [4]. Комбинированный алгоритм расчета для моделирования обтекания сферически затупленных конусов применен в [5]. Подробный обзор можно найти в [6–8].

1. Постановка задачи. Рассмотрим обтекание под нулевым углом атаки осесимметричных гладких затупленных тел сверхзвуковым потоком вязкого однородного газа. В качестве исходной газодинамической модели будем использовать модель вязкого ударного слоя (модель 1) [2]. Как показывает анализ [9], эти уравнения являются в асимптотическом смысле равномерно пригодными по числу Рейнольдса и описывают течение во всей возмущенной области от ударной волны до поверхности тела. При этом в отличие от широко распространенной модели гиперзвукового вязкого ударного слоя [10] модель 1 может быть применена для более широкого диапазона геометрии течения, чисел Маха, Рейнольдса. Она позволяет проводить расчеты обтекания тел при небольших сверхзвуковых скоростях набегающего потока и для случаев, когда ударный слой не является тонким на всей наветренной части обтекаемого тела [6]. В криволинейной ортогональной системе координат (x, y) нестационарные уравнения имеют безразмерный вид [7]

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho H_1 r) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u r) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v H_1 r) = 0 \quad (1.1)$$

$$\rho \left(Du + \frac{uvx}{H_1} \right) = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{H_1^2 r} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{H_1^2 r \mu}{\text{Re}} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{ux}{H_1} \right) \right)$$

$$\rho \left(Dv - \frac{u^2 x}{H_1} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\rho DT = DP + \frac{1}{H_1 r} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{H_1 r \mu}{\text{Re Pr}} \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\mu}{\text{Re}} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{ux}{H_1} \right)^2$$

$$P = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \rho T$$

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{H_1} \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}, \quad \mu = T^\omega, \quad H_1 = 1 + u\kappa, \quad r = r_w + u \cos \alpha$$

Здесь оси x и y направлены соответственно вдоль касательной и по нормали к поверхности тела; все линейные размеры отнесены к характерному линейному размеру R , время – к R/V_∞ , все компоненты вектора скорости – к V_∞ ; $\rho_\infty V_\infty^2 P$, $\rho \rho_\infty$, TV_∞^2 / c_p , $\mu(c_\nu^2 / c_p)$, Pr , Re – соответственно давление, плотность, температура, коэффициент вязкости, числа Прандтля и Рейнольдса; ω – показатель степени в зависимости $\mu(T)$, $\gamma = c_p / c_v$. Предполагается, что поверхность обтекаемого тела задана в системе координат (z, r) (ось z совпадает по направлению с вектором скорости набегающего потока), κ – кривизна контура тела, r_w – расстояние от контура тела до оси z , а α – угол наклона контура тела к этой оси. Индексы w, ∞, s соответствуют значениям на поверхности тела, в набегающем потоке и за ударной волной.

Система (1.1) решается с граничными условиями на ударной волне, поверхности тела, оси симметрии и на выходной границе $x = x^*$. Граничными условиями на ударной волне являются нестационарные обобщенные условия Ренкина – Гюгонио

$$\rho(V_n - U) = (V_{n\infty} - U) \quad (1.2)$$

$$(V_{n\infty} - U)(V_{\tau\infty} - V_\tau) = \frac{\mu}{Re_\infty} \frac{\partial V_\tau}{\partial n}$$

$$P + \rho(V_n - U)^2 = \frac{P_\infty}{\rho_\infty V_\infty^2} + (V_{n\infty} - U)^2$$

$$(V_{n\infty} - U) \left((T - T_\infty) + \frac{(V_n - U)^2}{2} - \frac{(V_{n\infty} - U)^2}{2} + \frac{V_\tau^2}{2} - \frac{V_{\tau\infty}^2}{2} \right) = \frac{\mu}{Pr Re_\infty} \frac{\partial T}{\partial n} + \frac{\mu V_\tau}{Re_\infty} \frac{\partial V_\tau}{\partial n}$$

Здесь U – скорость движения фронта ударной волны, τ, n – индексы касательных и нормальных к фронту ударной волны компонент.

На поверхности тела и оси симметрии ставятся условия

$$y = 0: \quad u = 0, \quad v = 0, \quad T = T_w(x) \quad (1.3)$$

$$x = 0: \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad u = 0$$

Граница $x = x^*$ выбирается достаточно далеко вниз по потоку, чтобы возмущения от нее не оказывали существенного влияния на течение в рассматриваемой области, и на ней ставятся мягкие граничные условия, при которых вторые производные по маршевой координате x от всех искомым функций равнялись нулю.

2. Численное решение задачи. Для численного решения исходной начально-краевой задачи (1.1)–(1.3) осуществлялся переход к новым переменным типа переменных Дородницына, позволяющим, с одной стороны, разрешить особенности исходных уравнений в критической точке, а с другой – добиться того, чтобы профили искомым функций поперек слоя были близки к автомодельным и слабо зависели от продольной координаты

$$\xi = x, \quad \tau = t, \quad \zeta = \frac{1}{\Delta} \int_0^y \frac{\rho r^k H_1}{\xi^k} dy, \quad \Delta = \int_0^{y_s} \frac{\rho r^k H_1}{\xi^k} dy, \quad u = \xi H_1 \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \quad (2.1)$$

$$\rho v r^k H_1 = -\frac{\partial}{\partial x}(\Delta \zeta^{k+1} \Phi) - \frac{\partial}{\partial t} \int_0^y \rho r^k H_1 dy$$

В переменных Дородницына исходная задача сводилась к нахождению решения системы трех нелинейных уравнений второго порядка относительно функции тока Φ , температуры T и координаты y . При этом уравнение для y являлось следствием уравнения импульсов в проекцию на нормаль к поверхности тела, уравнений неразрывности и состояния.

Стационарное решение системы уравнений и граничных условия находилось на основе принципа установления по времени с использованием высокоэкономичного вычислительного алгоритма [1]. В рамках этого метода численное решение задачи на каждом шаге по времени определялось на основе модификации неявной схемы [11], имеющей порядок аппроксимации $O(\Delta \zeta)^4 + O(\Delta \zeta) + O(\Delta t)$. При этом производные по времени τ и маршевой координате ξ аппроксимировались конечными односторонними разностями назад. Так же как и в [1], вычисление производных по продольной координате ξ со вторым порядком точности оказалось нецелесообразным, так как различие результатов при вычислении производных с первым и вторым порядком точности оказалось незначительным. Поэтому со вторым порядком точности вычислялись только значения продольного градиента давления. Этот результат, в частности, связан с отмеченным ранее свойством переменных Дородницына, использование которых позволяет добиться плавного изменения профилей параметров течения по маршевой координате.

После задания формы ударной волны и поля течения в начальный момент времени производился расчет параметров потока в ударном слое на следующем шаге по времени. Для этого, начиная с критической точки, осуществлялось последовательное решение краевых задач для уравнений на каждом шаге по ξ , причем градиент давления $\partial P / \partial \xi$ считался известным и вычислялся на основе решения на предыдущем временном слое.

На луче $\xi = \text{const}$ проводились локальные итерации по нелинейности, а после каждой такой итерации из граничного условия на ударной волне определялось новое значение Δ . На первых 15–20 шагах по времени число итераций составляло 3–5, а в дальнейшем на каждом шаге по маршевой переменной делалась лишь одна локальная итерация. После получения решения во всей области течения на текущем шаге по времени из релаксационных соотношений, используя параметры с текущего и предыдущего слоев по времени, определялось новое поле параметров и если критерий установления не выполнялся, то вся процедура расчета повторялась (начиная с расчета в критической точке).

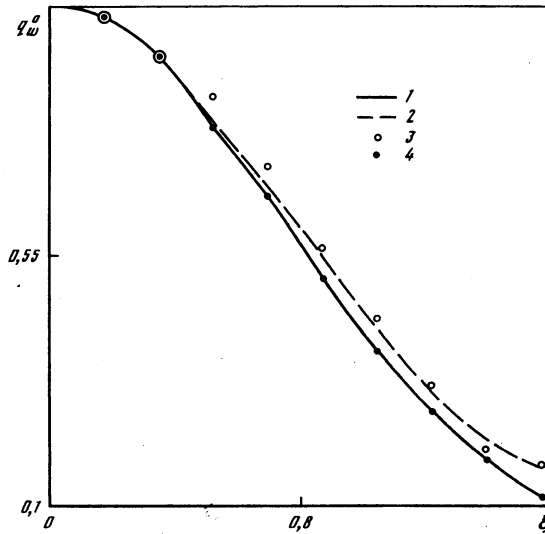
Для повышения точности расчетов использовалась неравномерная по координате ζ разностная сетка, позволяющая выделить в решении пограничный слой у поверхности тела. Для построения этой сетки использовался итерационный алгоритм, аналогичный [1]. Шаг интегрирования по времени Δt определялся на основе соотношения между Δt и $\Delta \zeta$, предложенного в [3]. Процесс считался установившимся, если на двух соседних слоях по времени различие во всех точках разностной сетки для всех искомых функций не превосходило $10^{-2} \Delta t$.

Достоверность полученных результатов проверялась с помощью сравнения как с результатами других авторов, так и полученных на различных сетках. Для исследования сеточной сходимости проведена серия расчетов на последовательности сгущающихся сеток. Результаты этих расчетов представлены ниже, где приведены значения коэффициента теплообмена C_q в критической точке сферы при $Re = 10^4$, полученные на сетках $H_{K \times N}$ (K, N – число разбиений поперек ударного слоя и вдоль поверхности тела).

$H_{K \times N}$	$H_{5 \times 20}$	$H_{8 \times 20}$	$H_{10 \times 20}$	$H_{16 \times 20}$	$H_{24 \times 20}$
C_q	0,93727	0,93805	0,93832	0,93907	0,93907

Анализ результатов позволяет сделать вывод, что для получения решения с точностью до 1% достаточно использовать сетку $H_{9 \times 21}$, а для умеренных $Re - K = 5$.

Сравнения численных расчетов с экспериментальными данными и работами других



Фиг. 1. Распределения q_w^0 при $M_\infty = 7,5$, $Re = 10^3$, $T_w = 0,24$; кривые 1, 2 – $\gamma = 1,4$; 1,2; 3 – эксперимент [13]; 4 – расчеты [3]

авторов по распределению относительного теплового потока $q_w^0 = C_q(\xi)/C_q(0)$ показаны на фиг. 1.

3. Обсуждение результатов расчетов. Проведено численное исследование сверхзвукового обтекания потоком вязкого однородного газа под нулевым углом атаки четырех различных классов осесимметричных гладких затупленных тел: эллипсоидов вращения с полуосями a и b , степенной формы, выпукло-вогнутой конфигурации и обеспечивающих минимум интегрального конвективного теплового потока к поверхности. Уравнения их поверхностей в системе координат z, r имеют вид

$$\left(\frac{z}{a} - 1\right)^2 + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (3.1)$$

$$r = 0,7z^b \quad (3.2)$$

$$z = D_0 + 0,1 \exp[3(-r + 0,3)^2] + D_1 \exp[E(-r + 0,8)^2] \quad (r \geq 0) \quad (3.3)$$

$$z = 2,63(1 - \cos 0,9t) + \sum_{i=0}^5 a_i T_i(2t - 1), \quad r = -0,89 \sin 0,9t + \sum_{i=0}^5 b_i T_i(2t - 1) \quad (3.4)$$

Коэффициенты D_0 и D_1 определяются из условия, что критическая точка тела совпадает с началом координат, T_n – полиномы Чебышева n -й степени, а значения коэффициентов a_i и b_i приведены в табл. 1.

Остальные основные определяющие параметры задачи изменялись при численных расчетах в диапазоне

$$Re = 10^2 - 10^6; \quad M_\infty = 3 - 15; \quad \gamma = 1,2 - 1,4; \quad \omega = 0,5 - 1,0; \quad T_w = 0,05 - 0,4$$

Расчеты, проведенные для данного широкого диапазона изменения геометрии течения и условий в набегающем потоке, а также шагов разностной сетки по всем направлениям, показали, что предлагаемый численный метод является устойчивым, точным и высокоэкономичным по требуемым для его реализации ресурсам ЭВМ и позволяет проводить расчеты для больших чисел Рейнольдса, когда в исходных уравнениях есть малый параметр при старшей производной.

Вариант	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
1	0	0	0	0	0	0
2	-0,058	-0,029	0,058	0,029	0	0
3	-0,016	$-6,3 \cdot 10^{-4}$	0,022	$1,5 \cdot 10^{-3}$	$-5,9 \cdot 10^{-3}$	$8,4 \cdot 10^{-4}$
Вариант	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
1	0	0	0	0	0	0
2	0,013	-0,022	-0,013	0,022	0	0
3	0,063	-0,052	-0,047	0,050	-0,016	$1,9 \cdot 10^{-3}$

Необходимо отметить, что абсолютные значения коэффициентов трения и теплообмена на поверхности тела весьма чувствительны к изменению практически всех определяющих параметров задачи. В то же время, как отмечено в [12, 14], при обтекании гладких затупленных тел гиперзвуковым потоком вязкого однородного газа в рамках более приближенных моделей тонкого и параболизированного вязкого ударного слоя (модели 2 и 3) относительное распределение коэффициента теплообмена $q_w^\circ(\xi)$ (отнесенного к значению в критической точке) в окрестности затупления тела в значительной степени консервативно по отношению к параметрам γ , ω , числу Рейнольдса и к величине T_w (для охлажденной поверхности тела).

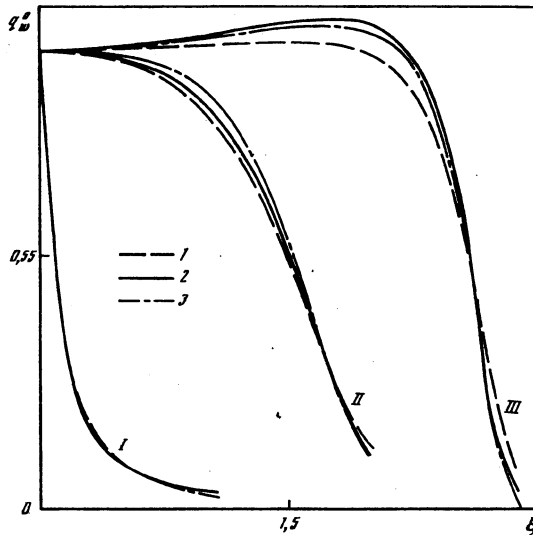
Поэтому с целью проверки правомерности этого вывода в рамках более точной модели полного вязкого ударного слоя в настоящей работе проведены соответствующие сравнения для всех четырех классов рассмотренных форм тела. Результаты этих сравнений для случая обтекания эллипсоидов различной формы приведены на фиг. 2.

Из сравнений следует, что в рамках модели полного вязкого ударного слоя величина q_w° для всех рассмотренных форм тела в целом достаточно слабо зависит от указанных выше параметров. Поэтому вывод о консервативности q_w° (в том числе и по отношению к изменению числа Маха) является справедливым и в рамках модели 1, причем это имеет место на всей лобовой поверхности тела, вплоть до его миделя.

Необходимо отметить, что точность этого приближения зависит от формы обтекаемого тела. В частности, в случае обтекания тел, у которых продольная кривизна поверхности $\kappa(\xi)$ остается величиной одного порядка для всех значений координаты ξ , соответствующие изменения величины q_w° (как это видно из фиг. 2) малы. Если же κ — сильно меняющаяся функция ξ , то точность данного приближения становится несколько хуже (особенно при варьировании числа Рейнольдса) и соответствующие различия в значении относительного коэффициента теплообмена в области сильного изменения продольной кривизны поверхности тела могут достигать 10–15%.

Перейдем теперь к анализу влияния геометрии обтекаемого тела на структуру течения в ударном слое, форму отошедшей ударной волны, абсолютные и относительные распределения коэффициентов трения $C_x(\xi)$ и теплообмена $C_q(\xi)$ вдоль боковой поверхности. Некоторые данные, характеризующие зависимость этих параметров от формы тела, приведены на фиг. 3–7.

На фиг. 3, 4 изображены соответственно распределения $C_q(\xi)$ и $C_x(\xi)$ вдоль поверхности тела степенной формы, заданной в виде (3.2), для различных чисел Рейнольдса и Маха. Аналогичные данные для случая обтекания всех трех рассмотренных вариантов формы тел, заданных в виде (3.4), приведены на фиг. 5, 6. И, наконец, результаты обтекания семейства тел выпукло-вогнутой конфигурации приведены на фиг. 7, где



Фиг. 2. Распределения q_w° вдоль поверхности эллипсоидов при $a = 1$, $T_w = 0,15$, $M_{\infty} = 10$, $\gamma = 1,2$: $Re = 10^2, 10^3, 10^5$ – кривые 1–3; $b = 0,3, 1,5, 2,5$ – кривые I–III

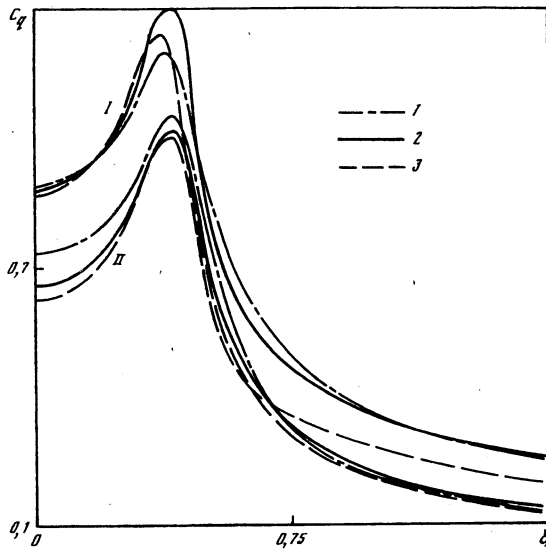
представлены формы обтекаемого тела, ударной волны и распределения q_w° вдоль поверхности (правая шкала графика, линии 3).

Как видно из фиг. 3–7, геометрия обтекаемого тела оказывает очень сильное влияние как на форму отхода ударной волны, так и на распределения коэффициентов трения и теплообмена вдоль поверхности тела, причем это влияние носит не только количественный, но и качественный характер. Анализ численных решений показал, что вид распределения теплового потока по координате ξ в основном определяется зависимостью продольной кривизны контура тела от этой координаты. При этом указанная корреляция усиливается с увеличением числа Рейнольдса.

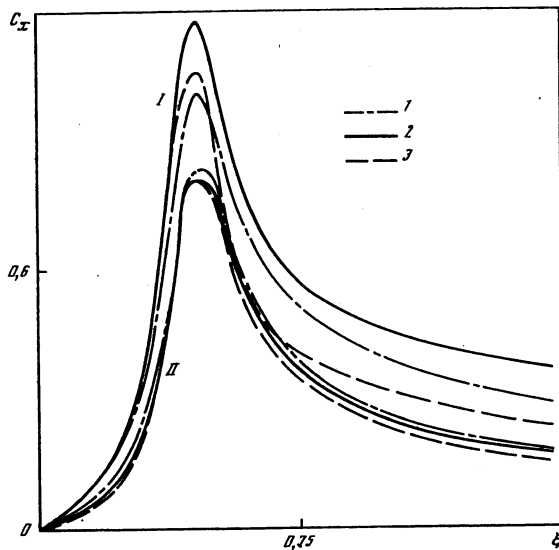
В частности, если кривизна поверхности тела является немонотонной функцией координаты ξ и имеет ярко выраженный максимум при $\xi = \xi_*$, то распределение теплового потока также имеет на боковой поверхности тела характерный максимум, положение которого хорошо коррелирует с максимумом $\kappa(\xi)$. Если же (как, например, в случае обтекания тела выпукло-вогнутой конфигурации) кривизна поверхности дважды меняет свой знак с увеличением ξ , то в распределении теплового потока могут возникать два локальных экстремума – минимум и максимум.

Такой характер зависимости величины C_q от κ имеет достаточно ясный физический смысл. При прочих равных условиях, тепловой поток к поверхности уменьшается с увеличением толщины слоя. Толщина слоя сильно зависит от интенсивности растекания газа в слое и, следовательно, от величины и знака продольного градиента давления, который в основном определяется величиной и знаком кривизны.

Асимптотический анализ уравнений Навье – Стокса [14, 15] показывает, что в рамках моделей 2 и 3 вследствие параболического характера соответствующих систем уравнений решение задачи в окрестности линии торможения может быть найдено независимо от решения в соседних областях. Причем единственным геометрическим параметром подобия течения в этой области является радиус кривизны поверхности тела в точке торможения. Для проверки точности этого приближения, установления области его применимости и оценки степени влияния формы тела на решение вверх по потоку в данной работе проведены расчеты обтекания семейства эллипсоидов различной формы, задаваемых условием $a = b^2$ и $\kappa(0) = 1$.



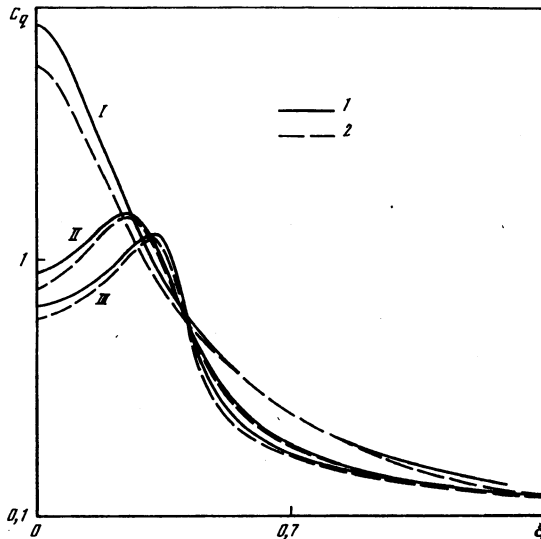
Фиг. 3. Распределения $C_q(\xi)$ вдоль тела степенной формы при $\beta = 0,125$, $T_w = 0,15$; $Re = 10^2, 10^3, 10^5$ – кривые 1–3; $M_\infty = 3$, $\gamma = 1,4$ – кривые I; $M_\infty = 10$, $\gamma = 1,2$ – кривые II



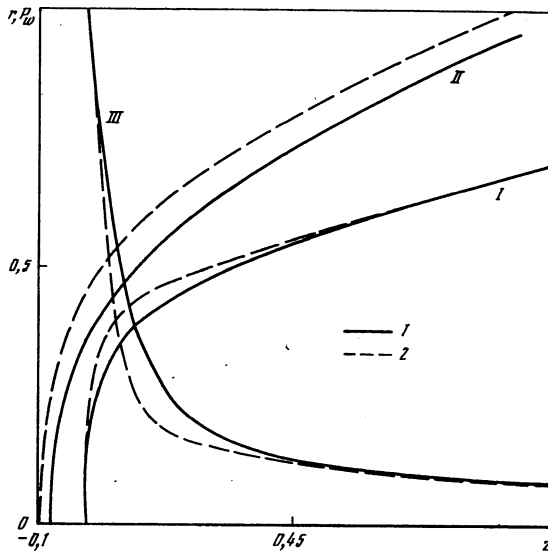
Фиг. 4. Распределения $C_x(\xi)$ вдоль тела степенной формы при $\beta = 0,125$, $T_w = 0,15$; обозначения как на фиг. 3

Результаты этих расчетов приведены на фиг. 8, где изображены профили $T(\zeta)$ поперек ударного слоя в критической точке для различных тел данного семейства.

Анализ численных решений показал, что для всех рассмотренных диапазонов изменения чисел Рейнольдса и Маха данное приближение имеет достаточно хорошую точность. Можно считать, что течение в окрестности притупления тела действительно носит локально-автомодельный характер. Для всех рассмотренных эллипсоидов данного семейства (продольная ось a изменялась от 0,25 до 4,0) величина



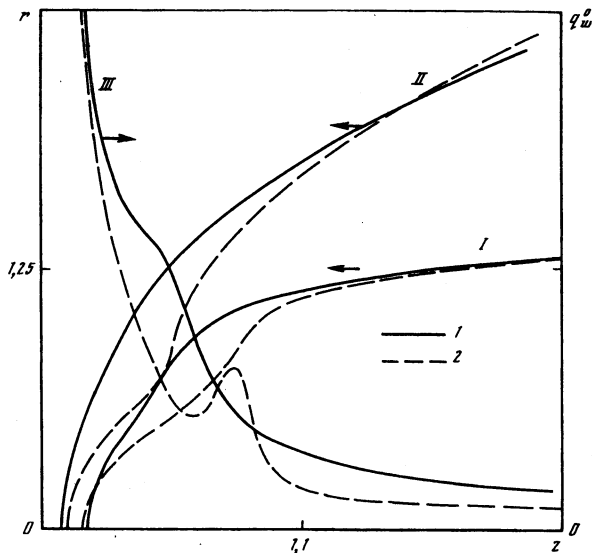
Фиг. 5. Распределения $C_q(\xi)$ вдоль поверхности тел (3.4) при $M_\infty = 10$, $\gamma = 1,2$, $T_w = 0,15$; $Re = 10^3, 10^5$ – кривые 1, 2; варианты 1–3 – кривые I–III



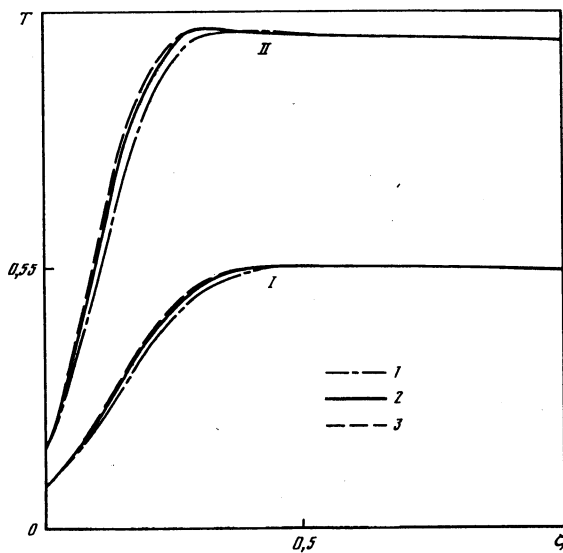
Фиг. 6. Формы обтекаемого тела (кривые I), ударной волны (II) и распределения давления вдоль поверхности P_w^0 (III) при $Re = 10^3$, $M_\infty = 10$, $\gamma = 1,2$, $T_w = 0,15$. Кривые 1, 2 – варианты 2, 3

отхода ударной волны, профили скорости и температуры поперек слоя слабо зависели от параметра a . Как видно из табл. 2, изменения абсолютных значений коэффициента теплообмена C_q в критической точке для описанного выше семейства поверхностей также были незначительными.

Значения C_q в критической точке сферы единичного радиуса, определенного на основе модели 1, отличаются от соответствующих значений этого же параметра, подсчитанных в рамках моделей 2 и 3, не более чем на 5–7%.



Фиг. 7. Формы обтекаемого тела и ударной волны (кривые I, II) и распределения давления вдоль поверхности P_w^0 (кривые III) при $M_\infty = 10$, $\gamma = 1,4$, $T_w = 0,2$, $Re = 10^3$; $E = 3,0$; $4,5$ – кривые I, 2



Фиг. 8. Профили $T(\zeta)$ поперек ударного слоя в критической точке: $a = 0,25$, $1,0$, $4,0$ – кривые I–3; $M_\infty = 10$ – кривые I, III; $M_\infty = 3$ – кривые II

Также проанализировано влияние числа Рейнольдса и параметров ω и T_w на форму отхода ударной волны и продольного градиента давления при обтекании тела фиксированной формы для следующего диапазона изменения этих параметров:

$$10^2 \leq Re \leq 10^6, \quad 0,5 \leq \omega \leq 1,0, \quad 0,05 \leq T_w \leq 0,4 \quad (3.5)$$

Варианты	$a = 4; b = 2$	$a = 1; b = 1$	$a = 0,25; b = 0,5$
$\gamma = 1,2$			
M = 7	1,05	1,08	1,14
M = 5	1,19	1,23	1,31
M = 3	1,71	1,78	1,93
$M = 10$			
$\gamma = 1,2$	0,97	0,99	1,05
$\gamma = 1,3$	0,82	0,85	0,91
$\gamma = 1,4$	0,74	0,77	0,83

Для всех рассмотренных форм тела при варьировании названных параметров в пределах (3.6) данные величины практически не меняются. С другой стороны, в [14] показано, что если считать форму ударной волны и продольный градиент давления известными функциями, то для решения стационарных уравнений вязкого ударного слоя можно с успехом использовать маршевые методы расчета.

Это позволило предложить следующий (состоящий из двух этапов) приближенный подход к расчету обтекания тела заданной формы для широкого диапазона изменения числа Re , параметров ω и T_w . На первом этапе методом установления находится численное решение исходных нестационарных уравнений вязкого ударного слоя для фиксированного набора параметров Re^* , ω^* , T_w^* и определяются форма отхода ударной волны и продольный градиент давления. На втором этапе для любого другого набора параметров Re , ω и T_w из диапазона (3.6) находится решение уже стационарных уравнений вязкого ударного слоя на основе маршевого по координате ξ численного метода в предположении, что форма ударной волны и продольный градиент давления определены на первом этапе.

Как показали сравнения с расчетами, выполненными в точной постановке, данный подход обладает хорошей точностью и его с успехом можно использовать для практических приложений. Кроме этого, предложенный подход экономичен, поскольку при параметрических расчетах обтекания тела с заданной геометрией для всех значений Re , ω и T_w из диапазона (3.6) он фактически позволяет ограничиться лишь однократным использованием метода установления, который в вычислительном смысле является значительно более затратным по требуемым для своей реализации ресурсам ЭВМ по сравнению с маршевыми численными алгоритмами.

Заключение. Проведено численное исследование обтекания под нулевым углом атаки осесимметричных гладких затупленных тел различной формы сверхзвуковым потоком вязкого однородного газа. Проанализировано влияние определяющих параметров задачи на форму ударной волны, распределения коэффициентов трения и теплообмена. Предложен приближенный подход к расчету обтекания тел заданной формы в широком диапазоне изменения числа Re , параметров ω и T_w . Дана оценка точности и области применимости ряда приближенных подходов к решению задачи.

Данная работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 98-01-00298).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бородин А.И., Иванов В.А., Пейгин С.В. Численное исследование сверхзвукового обтекания затупленных тел в рамках модели вязкого ударного слоя // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1996. Т. 36. № 8. С. 158–168.

2. *Davis R.T.* Numerical solution of the hypersonic viscous shock-layer equations // *AIAA Journal*. 1970. V. 8. № 5. P. 843–851.
3. *Васильевский С.А., Тирский Г.А., Утюжников С.В.* Численный метод решения уравнений вязкого ударного слоя // *Журн. вычисл. математики и мат. физики*. 1987. Т. 27. № 5. С. 741–750.
4. *Головачев Ю.П., Попов Ф.Д.* Расчет сверхзвукового обтекания затупленных тел вязким газом при больших числах Рейнольдса // *Журн. вычисл. математики и мат. физики*. 1972. Т. 12. № 5. С. 1292–1303.
5. *Воронкин В.Г.* Расчет вязкого ударного слоя на притупленных конусах // *Изв. АН СССР. МЖГ*. 1974. № 6. С. 99–105.
6. *Пейгин С.В., Тирский Г.А.* Трехмерные задачи сверх- и гиперзвукового обтекания тел потоком вязкого газа // *Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа*. М.: ВИНТИ, 1988. Т. 22. С. 62–177.
7. *Гершбейн Э.А., Пейгин С.В., Тирский Г.А.* Сверхзвуковое обтекание тел при малых и умеренных числах Рейнольдса // *Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа*. М.: ВИНТИ, 1985. Т. 19. С. 3–85.
8. *Головачев Ю.П.* Численное моделирование течений вязкого газа в ударном слое. М.: Наука. Физматлит, 1996. 374 с.
9. *Тирский Г.А.* Современные газодинамические модели в задачах сверх- и гиперзвуковой аэродинамики и теплообмена // *Изв. вузов. Физика*. 1993. Т. 36. № 4. С. 15–29.
10. *Cheng H.K.* Hypersonic shock-layer theory of the stagnation region at low Reynolds number // *Proc. Heat Transfer and Fluid Mech. Inst. Stanford, Calif.*, 1961. P. 161–175.
11. *Петухов И.В.* Численный расчет двумерных течений в пограничном слое // *Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы*. М.: Наука, 1964. С. 305–325.
12. *Бородин А.И., Пейгин С.В.* Пространственный тонкий вязкий ударный слой при отсутствии в течении плоскостей симметрии // *Изв. АН СССР. МЖГ*. 1989. № 2. С. 150–158.
13. *Hickman R.S., Giedt W.H.* Heat transfer to a hemisphere-cylinder at low Reynolds numbers // *AIAA Journal*. 1963. V. 1. № 3. P. 665–672.
14. *Peigin S.V.* Parabolic viscous shock layer theory for 3D hypersonic gas flow // *Shock Wave I. Proc. 19th Intern. Symp. on Shock Waves, Marseille, 1993. Berlin etc.: Springer, 1995. V. 1. P. 139–144.*
15. *Гершбейн Э.А.* Асимптотическое исследование задачи пространственного гиперзвукового обтекания вязким газом затупленных тел с проницаемой поверхностью // *Гиперзвуковые пространственные течения при наличии физико-химических превращений*. М.: Изд-во МГУ, 1981. С. 29–51.

Томск

Поступила в редакцию
15.V.1997