

УДК 532.68.013.4:537.21

© 1999 г. А.И. ГРИГОРЬЕВ, В.А. КОРОМЫСЛОВ, С.О. ШИРЯЕВА

ВЛИЯНИЕ РАСКЛИНИВАЮЩЕГО ДАВЛЕНИЯ НА РАЗВИТИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ЗАРЯЖЕННОГО ТОНКОГО СЛОЯ ЖИДКОСТИ НА ТВЕРДОМ СФЕРИЧЕСКОМ ЯДРЕ

Показано, что критическое значение параметра Рэлея, характеризующего устойчивость тонкого заряженного слоя вязкой жидкости на поверхности твердого сферического ядра, быстро растет с уменьшением толщины пленки до 100 нм, когда становится существенным влияние расклинивающего давления. При численном анализе дисперсионного уравнения получена зависимость величины инкремента неустойчивости от толщины слоя жидкости.

В ряде академических, технических и технологических проблем приходится иметь дело с неустойчивостью заряженного слоя вязкой жидкости конечной глубины, лежащего на криволинейной твердой подложке. В частности, неустойчивость заряженной жидкой поверхности тающих градин в грозовом облаке, сопровождающаяся эмиссией значительного количества заряженных микрокапелек [1], играет важную роль в процессах микро- и макроразделения зарядов и в процессе зарождения разряда линейной молнии [2]. Аналогичный вид неустойчивости имеет место при масс-спектропии жидкости в масс-спектраторах вакуумного типа, работающих при температурах сжиженного азота [3]. В таких устройствах жидкость, подающаяся по капилляру, замерзает на его торце, электрогидродинамическая (ЭГД) эмиссия происходит с тонкой пленки жидкости на поверхности ледяного мениска. Существование пленки жидкости обеспечивается джоулевым нагревом при протекании по пленке электрического тока. С качественно сходной ситуацией – с эмиссией заряженных микрокапель с поверхности тонкой пленки жидкости в сильном электрическом поле – приходится сталкиваться и в жидкометаллических источниках ионов [4].

В этой связи исследование закономерностей развития ЭГД-неустойчивости тонкого слоя жидкости на поверхности твердого ядра представляется актуальным. Особенно интересен вопрос об устойчивости весьма тонких пленок жидкости, так как, согласно [5], при уменьшении толщины слоя жидкости на твердой подложке до величины $h \leq 100$ нм становится существенным влияние расклинивающего давления, величина которого быстро растет при утоньшении пленки до $\sim h^{-k}$ (где $3 \leq k \leq 4$ в зависимости от h). В этом случае можно ожидать сильной зависимости критических условий проявления ЭГД-неустойчивости от толщины пленки жидкости, как это получено в приближении идеальной жидкости [6].

Теория расклинивающего давления к настоящему времени развита не достаточно строго. В [5] выделяются четыре компоненты этого давления, имеющие различную физическую природу, которые в общем случае не описываются единым аналитическим выражением. Имея в виду качественное исследование влияния расклинивающего давления P_h на устойчивость тонких пленок, ограничимся учетом только его сильной зависимости от h , приняв ее совпадающей с флуктуационной составляющей, т.е. $P_h = A/h^k$. Такая зависимость использовалась при теоретическом анализе устойчивости свободных тонких пленок [7].

1. Пусть твердое сферическое ядро радиуса R_0 окружено сферически-симметрично

расположенным шаровым слоем идеально проводящей жидкости внешнего радиуса R . Будем считать жидкость несжимаемой, характеризуемой коэффициентом кинематической вязкости ν , плотностью ρ и коэффициентом поверхностного натяжения σ . Примем, что на свободной поверхности жидкости равномерно распределен заряд Q . Поля скоростей капиллярного волнового движения и давления обозначим соответственно $U(\mathbf{r}, t)$ и $P(\mathbf{r}, t)$. Искажение свободной сферической поверхности жидкости $\xi(\mathbf{r}, t)$, возникающее из-за теплового капиллярного волнового движения, будем считать осесимметричным и малым вместе с величинами $U(\mathbf{r}, t)$ и $P(\mathbf{r}, t)$. В качестве внешней среды примем вакуум. Рассмотрение проведем в линейном приближении по малым величинам ξ , U и P в сферической системе координат с началом в центре ядра.

Для упрощения записи и последующих вычислений введем безразмерные переменные, в которых $R = 1$, $\rho = 1$, $\sigma = 1$. Тогда все остальные величины (за которыми оставим прежние обозначения) будут выражены в единицах своих характерных значений

$$r_* = R; \quad t_* = \sqrt{\frac{R^3 \rho}{\sigma}}; \quad U_* = \sqrt{\frac{\sigma}{R \rho}}; \quad p_* = \frac{\sigma}{R}; \quad Q_* = \sqrt{R^3 \sigma}; \quad \nu_* = \sqrt{\frac{R \sigma}{\rho}}; \quad A_* = R^2 \sigma$$

Система уравнений гидродинамики, описывающая капиллярные движения жидкости в такой системе, будет состоять из линеаризованного уравнения Навье – Стокса и условия несжимаемости жидкости

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla P^{in} + \nu \Delta U \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} U = 0 \quad (1.2)$$

граничных условий на поверхности твердого ядра ($r = R_0$) и на свободной поверхности жидкости

$$r = R_0: \quad U_r = 0, \quad U_\theta = 0, \quad U_\varphi = 0 \quad (1.3)$$

$$F(\mathbf{r}, t) \equiv \mathbf{r} - 1 - \xi(\theta, t) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} \equiv \frac{\partial F}{\partial t} + (\mathbf{U}, \nabla F) = 0 \quad (1.4)$$

$$(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{n}, \nabla), \mathbf{U}) + (\mathbf{n}(\boldsymbol{\tau}, \nabla), \mathbf{U}) = 0 \quad (1.5)$$

$$-(P^{in} - P^{ex}) + 2\rho\nu(\mathbf{n}(\mathbf{n}, \nabla), \mathbf{U}) + P_\sigma - P_E - P_h = 0 \quad (1.6)$$

$$P_\sigma = 2 - (2 + \Delta_\Omega) \xi(\theta, t) \quad (1.7)$$

В этих выражениях \mathbf{n} и $\boldsymbol{\tau}$ – единичные вектора нормали и касательной к свободной поверхности жидкости; P^{ex} – давление внешней среды на поверхность капли; P^{in} – давление внутри жидкости; P_σ – лапласовское давление под искаженной волновым движением сферической поверхностью жидкого слоя; Δ_Ω – угловая часть оператора Лапласа в сферических координатах.

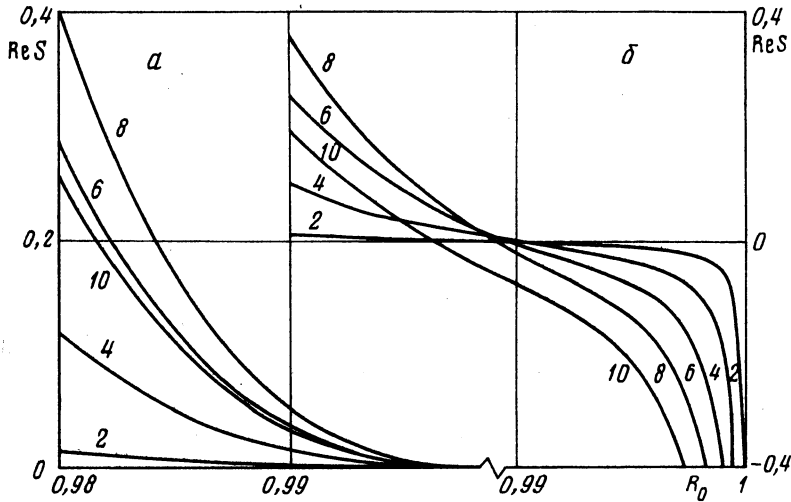
Давление электрического поля на поверхность заряженной идеально проводящей капли P_E определяется выражением

$$P_E = \frac{Q^2}{8\pi} - \frac{1}{2\pi} Q^2 \xi + \frac{1}{4\pi} Q^2 \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) P_m(\mu) \int_{-1}^1 \xi P_m(\mu) d\mu \quad (1.8)$$

где $P_m(\mu)$ – нормированные полиномы Лежандра, $\mu = \cos \theta$.

Расклинивающее давление на возмущенную поверхность слоя жидкости запишем в виде [5, 6]

$$P_h = \frac{A}{h^k} \left(1 - \frac{k}{h} \xi(\theta, t) \right), \quad h \equiv 1 - R_0 \quad (1.9)$$



Зависимости безразмерных инкрементов нескольких неустойчивых мод (номера которых указаны у соответствующих кривых) от безразмерного радиуса ядра R_0 при отсутствии расклинивающего давления ($A \equiv 0$) при $\nu = 0,1$; $W = 13$ (а), при учете расклинивающего давления $k = 3$; $A = 10^{-7}$ (б)

2. Решение задачи (1.1)–(1.9) классическими методами приводит к системе пяти однородных алгебраических уравнений относительно пяти неизвестных коэффициентов разложения потенциальной и вихревой полоидальной компонент скорости и амплитуды возмущения по полиномам Лежандра $P_m(\mu)$, получающейся из граничных условий (1.3)–(1.6). Такая система имеет нетривиальное решение только в том случае, когда определитель, составленный из ее коэффициентов, равен нулю

$$\det A \equiv 0 \quad (2.1)$$

$$A_{11} = m; \quad A_{12} = -(m+1); \quad A_{13} = m(m+1) i_m(\Omega)$$

$$A_{14} = m(m+1)k_m(\Omega); \quad A_{15} = -S; \quad A_{21} = 2(m-1); \quad A_{22} = -2(m+2)$$

$$A_{23} = -2\Omega i_{m+1}(\Omega) + [\Omega^2 + 2(m+1)(m-1)] i_m(\Omega)$$

$$A_{24} = 2\Omega k_{m+1}(\Omega) + [\Omega^2 + 2(m+1)(m-1)] k_m(\Omega); \quad A_{25} = 0$$

$$A_{31} = S + 2\nu m(m-1); \quad A_{32} = S + 2\nu(m+1)(m+2)$$

$$A_{33} = 2\nu m(m+1) [\Omega i_{m+1}(\Omega) + (m-1) i_m(\Omega)]$$

$$A_{34} = 2\nu m(m+1) [-\Omega k_{m+1}(\Omega) + (m-1) k_m(\Omega)]$$

$$A_{35} = (m-1)(m+2) + \frac{kA}{h^{(k+1)}} - \frac{Q^2}{4\pi} (m-1); \quad A_{41} = mR_0^{(m-1)}$$

$$A_{42} = -(m+1)R_0^{-(m+2)}; \quad A_{43} = \frac{m(m+1)}{R_0} i_m(R_0\Omega)$$

$$A_{44} = \frac{m(m+1)}{R_0} k_m(R_0\Omega); \quad A_{45} = 0; \quad A_{51} = R_0^{(m-1)}$$

$$A_{52} = R_0^{-(m+2)}; \quad A_{53} = \Omega i_{m+1}(R_0\Omega) + \frac{(m+1)}{R_0} i_m(R_0\Omega)$$

$$A_{54} = -\Omega k_{m+1}(R_0\Omega) + \frac{(m+1)}{R_0} k_m(R_0\Omega); \quad A_{55} = 0$$

Здесь m – номер моды, $\Omega \equiv \sqrt{S/\nu}$, S – комплексная частота, $i_m(x)$ и $k_m(x)$ – сферические цилиндрические функции первого и третьего рода соответственно.

Алгебраическое соотношение (2.1) связывает между собой частоту и номер моды, т.е. является дисперсионным уравнением, определяющим спектр возможных капиллярных движений в слое жидкости на поверхности твердого сферического ядра.

3. Численные расчеты по дисперсионному уравнению (2.1) показывают, что в области малых толщин (при $h \leq 100$ нм) заряженного слоя, когда существен вклад расклинивающего давления, качественный вид зависимости частот и декрементов реализующихся капиллярных движений жидкости от толщины слоя сходен с таковыми для толстых слоев (см. [8]). Наиболее интересные особенности капиллярных движений заряженной поверхности жидкости при действии расклинивающего давления связаны с изменением характера зависимости инкрементов неустойчивых мод.

На фигуре приведены зависимости от безразмерного радиуса ядра R_0 инкрементов $\text{Re } S$ нескольких неустойчивых мод, номера которых указаны у соответствующих кривых, рассчитанные при ($W \equiv Q^2/4\pi = 13$, $\nu = 0,1$ без учета расклинивающего давления ($A = 0$ – фигура, а) и с его учетом ($A = 10^{-7}$, $k = 3$ – фигура, б). В отсутствие расклинивающего давления ($A = 0$) m -я мода становится неустойчивой при $W = 2 + m$ (параметр Рэля W характеризует устойчивость сферической капли по отношению к собственному заряду). Это означает, что при фиксированном значении W , принятом при расчетах, превышение зарядом критического значения максимально для основной моды $m = 2$ и минимально для $m = 10$. Тем не менее, как показывают расчеты, инкремент основной моды по сравнению с инкрементами остальных неустойчивых мод не самый большой из-за влияния вязкой диссипации.

Учет расклинивающего давления существенно изменяет структуру спектра капиллярных движений. Так, при $A = 0$ (см. фигуру, а), при уменьшении толщины слоя жидкости величины инкрементов всех неустойчивых мод асимптотически стремятся к нулю. Наличие в тонких слоях жидкости расклинивающего давления приводит к тому (см. фигуру, б), что при уменьшении толщины жидкого слоя кривые, описывающие инкременты неустойчивых мод, из неустойчивой области ($\text{Re } S > 0$) переходят в устойчивую ($\text{Re } S < 0$). При этом первыми обретают устойчивость низкие моды из-за сильного влияния вязкости и расклинивающего давления и наиболее высокие моды благодаря вязкости и малой степени закритичности заряда для них.

Таким образом, для тонких слоев жидкости, подверженных влиянию расклинивающего давления, формирование эмиссионных выступов, образующихся на финальной стадии развития неустойчивости, будет происходить за счет преимущественного развития мод из середины диапазона спектра неустойчивых мод. Очевидно подобная ситуация и была описана в работе Вагнера с жидкометаллическим источником ионов игольчатого типа [9], где была фотографически зафиксирована эмиссия крупных капель с боковой поверхности иглы эмиттера, покрытого весьма тонкой пленкой жидкого металла.

Заключение. Влияние расклинивающего давления на спектр капиллярных движений жидкости под заряженной свободной поверхностью проявляется в сильном их демпфировании. При уменьшении толщины жидкого слоя до значений, при которых становится существенным влияние расклинивающего давления, наиболее низкие и высокие из неустойчивых мод стабилизируются и становятся аperiodически затухающими. Это обстоятельство ограничивает спектр мод, принимающих участие в формировании эмитирующих выступов на финальной стадии развития электростатической неустойчивости тонкой пленки жидкости на поверхности твердого ядра.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григорьев А.И., Ширяева С.О. Капиллярные неустойчивости заряженной поверхности капель и электродиспергирование жидкостей (обзор) // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.

2. *Grigor'ev A.I., Shiryayeva S.O.* The possible physical mechanism of initiation and growth of lightning // *Phys. Scripta*. 1996. V. 54. № 6. P. 660–666.
3. *Золотой Н.Б., Карпов Г.В., Скурат В.Е.* О механизмах образования ионов и ионных кластеров из заряженных капель // *Журн. техн. физики*. 1988. Т. 58. № 2. С. 315–323.
4. *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* Электрогидродинамические аспекты функционирования жидкометаллических источников ионов // *Журн. техн. физики*. 1992. Т. 62. № 12. С. 9–20.
5. *Дерягин Б.В.* Теория устойчивости коллоидов и тонких пленок. М: Наука, 1986. 205 с.
6. *Grigor'ev A.I., Munichev M.I., Shiryayeva S.O.* Influence of disjoining pressure upon stability in the electric field of a charged liquid film on the surface of a hard core // *J. Colloid and Interface Sci.* 1994. № 166. № 2. P. 267–274.
7. *Jain R.K., Ivanov I.B., Malderelli C., Ruckenstein E.* Instability and rupture of thin liquid films // *Lecture Notes in Physics*. Berlin e.a.: Springer, 1979. V. 105. P. 140–167.
8. *Григорьев А.И., Коромысов В.А., Ширяева С.О.* Неустойчивость заряженного слоя вязкой жидкости на поверхности твердого сферического ядра // *Журн. техн. физики*. 1997. Т. 67. № 9. С. 8–13.
9. *Wagner A., Hall T.M.* Liquid gold ion source // *J. Vacuum Sci. Techn.* 1979. V. 16. № 6. P. 1871–1874.

Ярославль

Поступила в редакцию
5.V.1997