

УДК 532.526.4:533.6.011.5

© 1998 г. В.Г. ЛУЩИК, А.Е. ЯКУБЕНКО

СВЕРХЗВУКОВОЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ПЛАСТИНЕ. СРАВНЕНИЕ РАСЧЕТА С ЭКСПЕРИМЕНТОМ

Для верификации разработанной авторами методики расчета пограничного слоя в соплах жидкостных ракетных двигателей (ЖРД), базирующей на трехпараметрической дифференциальной модели турбулентности, проведены расчеты сверхзвукового пограничного слоя на пластине в безградиентном потоке. Получено удовлетворительное согласование расчета с известными экспериментальными данными как по интегральным, так и по локальным характеристикам течения и теплообмена в широком диапазоне изменения чисел Рейнольдса по толщине потери импульса, Маха набегающего потока и температурного фактора.

Разработке методов расчета турбулентного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке посвящено большое число работ, обзор которых представлен в [1]. Наиболее распространены в инженерной практике интегральные методы расчета [2–4], основанные на использовании интегральных соотношений импульса и энергии, замкнутых алгебраическими соотношениями для коэффициента трения, формпараметра и числа Стантона. На основе [2, 3] разработаны методики расчета турбулентного пограничного слоя в соплах ЖРД.

Недостатки интегральных методов расчета известны. Это – необходимость использования эмпирической информации о виде профилей скорости и температуры, недостаточная универсальность при существенном изменении граничных условий (например, теплового режима стенки, связанного с использованием завесного охлаждения).

Учитывая экстремальность условий по температуре, давлению и скорости в соплах ЖРД, от методик расчета требуется повышенная точность определения характеристик течения и теплообмена в пограничном слое и достаточная универсальность для учета изменения граничных условий на стенке сопла. Это обусловило переход от интегральных методов расчета к дифференциальным, обзор которых для сверхзвукового пограничного слоя также содержится в [1].

Для расчета пограничного слоя в соплах ЖРД авторами разработана методика, базирующаяся на трехпараметрической дифференциальной модели турбулентности [5], обобщенной на течение с теплообменом [6] и прошедшей всестороннюю проверку в широком классе задач дозвукового течения и теплообмена в пограничных слоях и каналах [7]. Сравнительный анализ метода интегральных соотношений, алгебраической и группы дифференциальных моделей турбулентности, проведенный в [8], показал, что трехпараметрическая модель [5, 6] не уступает лучшим дифференциальным моделям по результатам расчета характеристик пограничного слоя в соплах ЖРД, а по возможностям учета внешних воздействий и неавтономности превосходит их.

На основе этой методики создана программа расчета сжимаемого турбулентного пограничного слоя в соплах ракетных двигателей с газовым завесным охлаждением, которая позволяет определять потери удельного импульса из-за трения, тепловые потоки и другие характеристики течения и тепломассообмена в пограничном слое [9].

В [10] проведена верификация методики расчета на экспериментах по течению в дозвуковых пограничных слоях с тангенциальным щелевым вдувом газа, что соответствует области течения в дозвуковой части сопел ЖРД с завесным охлаждением.

Целью настоящей работы является дальнейшая верификация методики расчета с использованием известных экспериментальных данных по течению и теплообмену в сверхзвуковых пограничных слоях на пластине в безградиентном потоке в широком диапазоне изменения чисел Рейнольдса, Маха набегающего потока и температурного фактора.

Область исследованных параметров выбрана из требований высокой достоверности экспериментальных данных и соответствует области натуральных параметров течения и теплообмена в сверхзвуковой части сопел ЖРД (ближе к выходному сечению), где течение близко к безградиентному, а числа Рейнольдса и Маха достаточно велики.

1. Постановка задачи. Для расчета течения и теплообмена в сжимаемом турбулентном пограничном слое однородного газа используются уравнения неразрывности, движения и энергии, которые для стационарного случая имеют вид [2]

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial y} + \rho \tau \right), \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (1.2)$$

$$\rho u \frac{\partial I}{\partial x} + \rho v \frac{\partial I}{\partial y} = u \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial I}{\partial y} - \rho q_t \right) + \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \Phi_E \quad (1.3)$$

Здесь x – направление вдоль стенки, y – нормальная координата, отсчитываемая от стенки; u и v – компоненты скорости вдоль осей x и y соответственно, I – статическая энтальпия газа, p – статическое давление; ρ – плотность, η – динамическая вязкость, λ – теплопроводность, c_p – удельная теплоемкость газа; $\rho \tau = -\rho \langle u'v' \rangle$ – турбулентное трение, $\rho q_t = \rho \langle v'I' \rangle$ – турбулентный поток тепла; Φ_E – диссипация энергии турбулентности E (см. ниже).

Входящие в уравнения (1.1)–(1.3) теплофизические свойства (ρ , η , c_p , λ , I) газа должны быть заданы в зависимости от температуры и давления. В качестве газа в расчетах рассматривался воздух, теплофизические свойства которого в табличном виде брались из [11].

Для решения системы уравнений (1.1)–(1.3) во входном ($x = 0$) сечении должны быть заданы профили определяемых функций $u(y)$, $T(y)$. В качестве граничных условий на стенке ($y = 0$) и на внешней границе пограничного слоя ($y = \delta$) использовались следующие:

$$u = \rho v = 0; \quad T = T_w(x), \quad \text{либо} \quad -\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right)_w = q_w(x) \quad (y = 0) \quad (1.4)$$

$$u = U_e, \quad T = T_e \quad (y = \delta)$$

Для определения величины τ , входящей в уравнение движения (1.2), в настоящей работе использована трехпараметрическая модель турбулентности [5], обобщенная на течение с теплообменом [6]. В модели для определения величины напряжения турбулентного трения $\rho \tau$ используется уравнение переноса для $\tau = -\langle u'v' \rangle$, энергии турбулентности E и параметра $\omega = E/L^2$, имеющего физический смысл завихренности турбулентности и содержащего поперечный интегральный масштаб турбулентности L . Эти уравнения для сжимаемого турбулентного пограничного слоя имеют вид [6]

$$\begin{aligned}
\rho u \frac{\partial E}{\partial x} + \rho v \frac{\partial E}{\partial y} &= -(c_p \sqrt{EL} + c_1 \eta) \frac{E}{L^2} + \rho \tau \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_E \frac{\partial E}{\partial y} \right) \\
\rho u \frac{\partial \tau}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \tau}{\partial y} &= -(c_5 \rho \sqrt{EL} + c_6 \eta) \frac{\tau}{L^2} + c_7 \rho E \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_\tau \frac{\partial \tau}{\partial y} \right) \\
\rho u \frac{\partial \omega}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \omega}{\partial y} &= -(2c_p \sqrt{EL} + 1,4c_1 \eta f_\omega) \frac{\omega}{L^2} + \\
&+ \left[\frac{\tau}{E} + 2c_4 \operatorname{sign} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \rho \omega \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_\omega \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)
\end{aligned} \tag{1.5}$$

$$E = 0,5 \sum_{i=1}^3 \langle u_i^2 \rangle, \quad \Phi_E = (c_p \sqrt{EL} + c_1 \eta) \frac{E}{L^2}$$

$$D_\Phi = a_\Phi \rho \sqrt{EL} + \alpha_\Phi \eta (\Phi = E, t, \omega); \quad f_\omega = 1 - \frac{1}{2c_1} \left(\frac{L}{E} \frac{\partial E}{\partial y} \right)^2; \quad L = \sqrt{\frac{E}{\omega}}$$

Значения констант [5, 6]: $c = 0,3$; $c_1 = 5\pi/4$; $c_4 = 0,04$; $c_5 = 3c$; $c_6 = 9c_1$; $c_7 = 0,2$; $a_E = a_\omega = 0,06$; $a_\tau = a_E c_5 / c$; $\alpha_E = \alpha_\tau = 1$; $\alpha_\omega = 1,4$; Φ_E – входящая в уравнение энергии (1.3) турбулентная диссипация.

Члены в уравнениях для E , τ , ω (1.5), описывающие влияние деформации из-за изменения плотности, вида [6]

$$a_p E \frac{d\rho}{dt}, \quad a_p \tau \frac{d\rho}{dt}, \quad 2a_p \omega \frac{d\rho}{dt}, \quad \left(a_p = \frac{2}{3} \right)$$

в настоящей работе не учитывались, поскольку расчет, проведенный для достаточно большого значения числа Маха $M_e = 10$, показал, что влияние этих членов на результаты мало и их можно не учитывать в расчетах по крайней мере до значений числа $M_e = 10$.

Для определения турбулентного потока тепла ρq_t , входящего в уравнение энергии (1.3), использована гипотеза, основанная на введении постоянного по толщине пограничного слоя турбулентного числа Прандтля ($Pr_t = 0,85$)

$$\rho q_t = \rho \langle \psi' I' \rangle = -\frac{\rho v_t}{Pr_t} \frac{\partial I}{\partial y}, \quad v_t = \frac{\tau}{\partial u / \partial y} \tag{1.6}$$

Граничные условия в расчетах с системой уравнений (1.5)

$$E = \frac{\partial E}{\partial y} = \tau = 0 \quad (y = 0); \quad \omega = \omega_e, \quad E = E_e, \quad \tau = 0 \quad (y = \delta) \tag{1.7}$$

Величина δ , входящая в граничные условия (1.4), (1.7), должна выбираться из условия гладкого сопряжения решения.

Сделаем замечания относительно системы уравнений (1.1)–(1.3), (1.5), (1.6) и граничных условий (1.4).

Входящую в уравнение (1.3) диссипацию Φ_E можно приближенно считать равной [12]

$$\Phi_E \approx \rho \tau \frac{\partial u}{\partial y} \tag{1.8}$$

Такое соотношение получается из уравнения (1.5) для определения турбулентной энергии E , если оставить в нем члены с порождением и диссипацией турбулентной энергии.

Используем соотношение (1.8) для написания уравнения, определяющего величину полной энтальпии $I^\circ = I + u^2/2$. Складывая уравнение (1.3) с уравнением (1.1), умноженным на u , и используя гипотезу (1.6) для определения турбулентного потока тепла, получим

$$\rho u \frac{\partial I^\circ}{\partial x} + \rho v \frac{\partial I^\circ}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\eta}{\text{Pr}} + \frac{\rho v_t}{\text{Pr}_t} \right) \frac{\partial I^\circ}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ u \left[\frac{\eta}{\text{Pr}} (\text{Pr} - 1) \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\rho \tau}{\text{Pr}_t} (\text{Pr}_t - 1) \right] \right\} \quad (1.9)$$

Здесь $\text{Pr} = \eta c_p / \lambda$ – число Прандтля, определенное по локальным значениям теплофизических свойств. Использование комбинации η/Pr вместо λ/c_p облегчает анализ уравнения (1.9) для случая $\text{Pr} = \text{Pr}_t = 1$.

Недостатком выражения для q_t (1.6) является наличие особых точек, соответствующих нулевым значениям производных скорости, энтальпии и величины сдвига. Несовпадение нулевых значений $\partial u/\partial y$, $\partial I/\partial y$ и τ приводит к разрыву величины q_t . Для устранения этих особенностей в [6] предложено ввести ограничение для безразмерной величины градиента скорости $z = L|\partial u/\partial y|/\sqrt{E} \geq 0,1$, при котором можно пользоваться выражением (1.6). При $z < 0,1$ для величины турбулентной вязкости ν_t , входящей в выражения (1.6) и (1.9), используется зависимость $\nu_t = 0,23\sqrt{EL}$, являющаяся предельным равновесным соотношением, следующим из (1.5) при $z \ll 1$ и $\text{Re}_t = \rho\sqrt{EL}/\eta \gg 1$.

Граничные условия для I° на стенке и на внешней границе пограничного слоя имеют вид

$$I^\circ = I_w^\circ(x), \text{ либо } - \left(\frac{\eta}{\text{Pr}} \frac{\partial I^\circ}{\partial y} \right)_w = q_w(x) \quad (y=0) \quad (1.10)$$

$$I^\circ = I_e^\circ = \text{const} \quad (y=\delta)$$

Здесь величина I_e° – энтальпия торможения набегающего потока.

Уравнение (1.9) с граничным условием (1.10) можно использовать вместо уравнения (1.3). Постоянство полной энтальпии на внешней границе пограничного слоя I_e° соответствует решению газодинамической задачи для набегающего потока. В данной работе использовалось уравнение (1.3), в котором диссипация Φ_E была заменена на $\tau \partial u/\partial y$.

После перехода к безразмерным переменным, в качестве масштабов для которых приняты величины некоторого характерного линейного размера l (в эксперименте – поперечный размер аэродинамической трубы, в расчете – ширина расчетной области), скорости u_e и температуры T_e набегающего потока, а для теплофизических свойств – соответствующие величины при температуре T_e и давлении p_e , в уравнениях (1.1)–(1.3), (1.5) появятся безразмерные критерии: $\text{Re}_e = \rho_e u_e l / \eta_e$, $\text{Pr}_e = \eta_e c_{pe} / \lambda_e$ – числа Рейнольдса и Прандтля, $\gamma_e = c_{pe} / c_{ve}$ – показатель адиабаты, $\text{M}_e = u_e \sqrt{\gamma_e R_e T_e}$ – число Маха набегающего потока, R_e – газовая постоянная.

В граничных условиях (1.4) появятся следующие безразмерные параметры: $\vartheta = T_w/T_e$ – температурный фактор, $Q = q_w l / (\lambda_e T_e)$ – безразмерный тепловой поток, которые также являются параметрами задачи и отвечают тепловым граничным условиям на стенке соответственно первого и второго рода.

Таким образом, система уравнений (1.1)–(1.3), (1.5), (1.6) с граничными условиями (1.4), (1.7) при заданных параметрах Re_e , Pr_e , γ_e , M_e , $\vartheta(Q)$ позволяет решить поставленную задачу и найти распределение как средних, так и турбулентных характеристик течения и теплообмена.

2. Интегральные соотношения. В инженерных расчетах пограничного слоя широкое распространение получили методы, основанные на использовании интегральных соотношений (см., например, [2-4]). Эти соотношения получаются путем интегрирования уравнений импульсов (1.2) и энергии (1.9) с учетом уравнения неразрывности (1.1) по толщине пограничного слоя и выражают одномерные законы сохранения импульса и энергии в пограничном слое.

Интегральное соотношение импульсов имеет вид

$$\frac{d\theta}{dx} + \frac{\theta}{u_e} \frac{du_e}{dx} (2 + H - M_e^2) = \frac{1}{2} C_f \quad (2.1)$$

$$C_f = \frac{2}{\rho_e u_e^2} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial y} \right)_w, \quad \delta_* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \right) dy, \quad \theta = \int_0^{\delta} \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e} \right) dy$$

Здесь C_f – местный коэффициент поверхностного трения, $H = \delta_*/\theta$ – формпараметр, δ_* , θ – толщины вытеснения и потери импульса.

Интегральное соотношение энергии при условии постоянства полной энтальпии набегающего потока I_e° имеет вид

$$\frac{\partial \theta_I}{dx} + \frac{\theta_I}{\rho_e u_e (I_e^\circ - I_w)} \frac{d}{dx} [\rho_e u_e (I_e^\circ - I_w)] = \Delta I_* St \quad (2.2)$$

$$I_e^\circ = I_e + u_e^2/2 = I_e [1 + 0.5(\gamma_e - 1)M_e^2]$$

Здесь θ_I – толщина потери энергии, St – число Стантона, ΔI_* – относительный "напор" энтальпии, определенные как

$$\theta_I = \int_0^{\delta} \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \frac{I_e^\circ - I^\circ}{I_e^\circ - I_w} dy, \quad St = \frac{q_w}{\rho_e u_e \Delta I}, \quad \Delta I_* = \frac{\Delta I}{I_e^\circ - I_w}$$

Вид числа Стантона зависит от определения разности энтальпий ΔI . Как правило, для ΔI используются следующие выражения.

Для дозвукового потока $\Delta I = I_e - I_w$. Если при этом газ можно считать совершенным, т.е. $c_{pe} = c_p = \text{const}$, то число Стантона будет иметь вид

$$St = \frac{q_w}{\rho_e u_e (I_e - I_w)} = \frac{q_w}{\rho_e u_e c_p (T_e - T_w)} \quad (2.3)$$

который используется при обобщении экспериментальных данных и результатов расчета для несжимаемой жидкости. При этом величина ΔI_* в интегральном соотношении энергии (2.2) будет иметь вид

$$\Delta I_* = \frac{I_e - I_w}{I_e^\circ - I_w} = \frac{T_e - T_w}{T_e^\circ - T_w} = \frac{1 - \vartheta}{T_e^\circ / T_e - \vartheta}$$

Здесь $\vartheta = T_w/T_e$ – температурный фактор, который является параметром задачи. Полная энтальпия I_e° при малых числах M_e мало отличается от статической энтальпии набегающего потока I_e , так что $I_e^\circ/I_e = T_e^\circ/T_e \approx 1$.

Для сверхзвукового потока $\Delta I = I_e^\circ - I_w$ и число Стантона будет иметь вид

$$St = \frac{q_w}{\rho_e u_e (I_e^\circ - I_w)} \quad (2.4)$$

При этом $\Delta I_* = 1$, а параметром задачи будет температурный фактор $\vartheta = T_w/T_e^\circ$, отвечающий отношению энтальпии I_w при температуре стенки к полной энтальпии набегающего потока I_e° .

В инженерной практике для сверхзвукового пограничного слоя часто используется

определение числа St по энтальпии теплоизолированной стенки $I_{aw} = I_e + ru_e^2/2$ (r – коэффициент восстановления энтальпии)

$$St = \frac{q_w}{\rho_e u_e (I_{aw} - I_w)} \quad (2.5)$$

В этом случае величина ΔI_* имеет вид

$$\Delta I_* = \frac{I_{aw} - I_w}{I_e - I_w} \approx \frac{T_{aw} - T_w}{T_e^\circ - T_w} = \frac{1 - \vartheta}{T_e^\circ / T_{aw} - \vartheta}$$

а параметром задачи будет температурный фактор $\vartheta = T_w / T_{Qw}$, отвечающий отношению энтальпий I_w / I_{aw} . Параметр T_e° / T_{aw} близок к единице и зависимость от него результатов должна быть слабой.

Использование в литературе вместо температурного энтальпийного фактора с целью учета отклонения газа от совершенного при больших числах Маха требует осторожности, поскольку отношение энтальпий зависит от начала отсчета при определении энтальпии газа. Для разных систем отсчета отношение энтальпий будет неэквивалентно отношению температур.

Таким образом, к числу безразмерных параметров задачи, определенных выше (см. разд. 1), добавляются число Стантона в соответствии с (2.3)–(2.5) и температурный $\vartheta = T_w / T_e$, T_w / T_e° или T_w / T_{aw} , либо энтальпийный I_w / I_e , I_w / I_e° или I_w / I_{aw} фактор.

3. Результаты расчета и сравнение с экспериментом. Наиболее исследованным как экспериментально, так и теоретически является турбулентный пограничный слой на плоской пластине в дозвуковом потоке с нулевым градиентом давления. Для коэффициента трения C_f в зависимости от числа Рейнольдса, определенного либо по толщине потери импульса $Re_\theta = \rho_e u_e \theta / \eta_e$, либо по длине $Re_x = \rho_e u_e x / \eta_e$, предложено множество соотношений (см., например, в [12]). Наибольшее различие между ними имеет место в области невысоких значений чисел Re_θ , Re_x , соответствующей концу перехода из ламинарного режима течения в турбулентный. При достаточно больших числах Re_θ , Re_x большинство эмпирических зависимостей для C_f близко между собой.

Использование числа Re_θ является физически более обоснованным по сравнению с Re_x , так как устраняет произвол в выборе начала турбулентного течения, с которым должна быть связана координата x , входящая в определение числа Re_x . Однако в литературе число Re_x широко используется, а координата x , как правило, отсчитывается от передней кромки пластины, в то время как переход к турбулентному режиму течения соответствует $Re_x \geq 10^5$. При числах же $Re_x \geq 10^7$ неточность определения координаты x становится настолько малой, что ею вполне можно пренебречь и проводить сравнение величин, зависящих от Re_x , не проводя корректировки величины x .

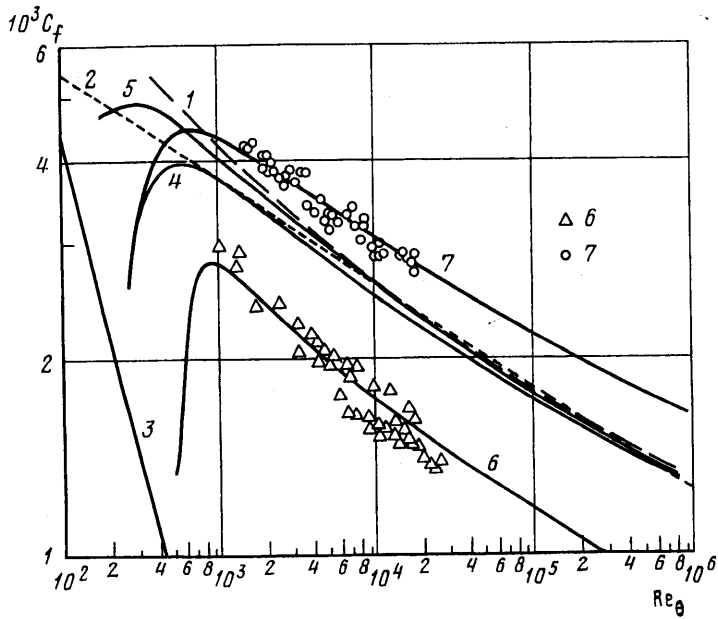
Для тестирования результатов расчета дозвукового турбулентного пограничного слоя в широком диапазоне числа Рейнольдса ($10^2 < Re_\theta \leq 10^6$, $2 \cdot 10^5 < Re_x < 10^{10}$) были использованы зависимости $C_f(Re_\theta)$ Кармана – Шенхерра (рекомендованные в [13]) и Никурадзе [12]

$$C_f^{-1} = 3,22 \ln(2 Re_\theta) [\ln(2 Re_\theta) + 2], \quad Re_x = 3,22(2 Re_\theta) [\ln(2 Re_\theta)]^2 \quad (3.1)$$

$$C_f = 0,0114 Re_\theta^{-0,16}, \quad Re_x = 150 Re_\theta^{1,16} \quad (3.2)$$

Ламинарному режиму течения соответствует зависимость Блазиуса [12]

$$C_f = (0,664 / \sqrt{Re_\theta})^2, \quad Re_x = (Re_\theta / 0,664)^2 \quad (3.3)$$



Фиг. 1. Зависимость коэффициента трения C_f от числа Рейнольдса Re_θ : линия 1 – (3.1), 2 – (3.2), 3 – (3.3), линии 4, 5 – результаты расчета при $\epsilon_0 = 0,01$ и $0,05$ для пограничного слоя несжимаемой жидкости; точки, линия 6 – экспериментальные данные, приведенные в [15], и результаты расчета для сверхзвукового ($M_e = 2,5$) пограничного слоя на теплоизолированной стенке; точки, линия 7 – экспериментальные данные [16] и результаты расчета для дозвукового ($M_e = 0,06$) пограничного слоя на охлаждаемой стенке при $\vartheta = 0,39-0,48$ и $0,45$

Результаты расчета зависимости $C_f(Re_\theta)$ в сравнении с (3.1)–(3.3) представлены на фиг. 1. Расчеты проведены при $T_e = 300$ К ($Pr_e = 0,71$), $M_e = 0,05$ для двух значений начальной интенсивности турбулентности в набегающем потоке $\epsilon_0 = \sqrt{E_0} / u_e = 0,01$ и $0,05$ (линии 4, 5). Результаты расчета для указанных значений ϵ_0 различаются в переходной области. При больших значениях чисел Re_θ различие результатов расчета мало и они близки к зависимостям (3.1), (3.2). Такое же заключение можно сделать относительно зависимостей $C_f(Re_x)$ и $Re_\theta(Re_x)$.

Для тестирования результатов расчета теплообмена использована зависимость для числа Нуссельта в дозвуковом потоке несжимаемой жидкости ($c_p = \text{const}$) [14]

$$Nu_x = \frac{q_w}{\rho_e u_e c_p (T_e - T_w)} = 0,42 Re_x C_f \quad (3.4)$$

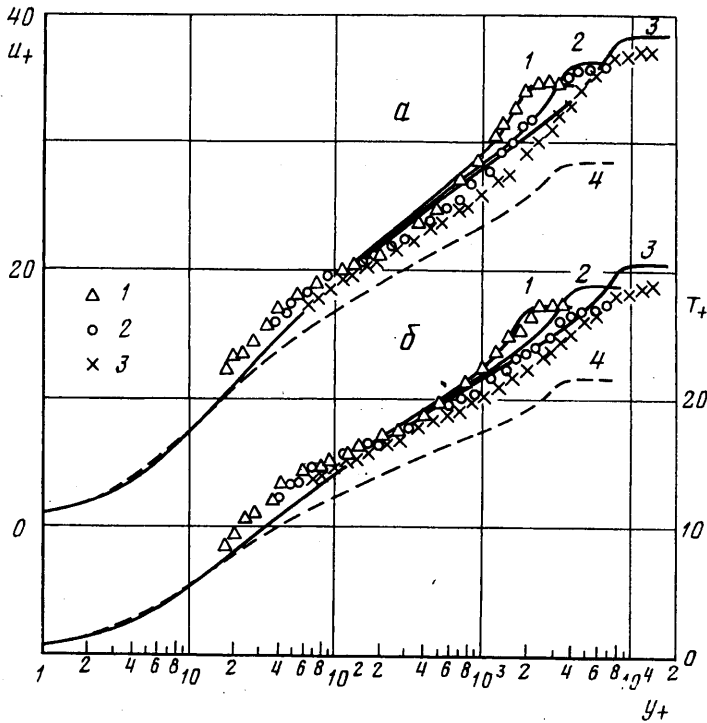
Последнее выражение верно для воздуха.

Для числа Стантона $St = Nu_x / (Re_x Pr)$ с использованием (3.4) при значении числа Прандтля $Pr = Pr_e = 0,71$ получим соотношение

$$St = 0,59 C_f \quad (3.5)$$

Результаты расчета зависимостей $Nu_x(Re_x)$ и $St(Re_x)$ при $T_e = 300$ К, $T_w = 299$ К, $M_e = 0,05$ вполне удовлетворительно согласуются с зависимостями (3.4), (3.5) [14].

Значение коэффициента аналогии Рейнольдса St/C_f , полученное в расчетах при $Re_x > 10^6$, близко к величине $St/C_f = 0,59$, следующей из (3.5), и слабо зависит от относительного значения температуры стенки (температурного фактора) в диапазоне $\vartheta = T_w/T_e = 0,833-0,997$.



Фиг. 2. Профили скорости (а) и температуры (б) в дозвуковом ($M_e = 0,06$) пограничном слое на охлаждаемой стенке для $Re_\theta \cdot 10^{-3} = 2,7; 5,2; 10,5$ (линии, точки 1-3 – результаты расчета при $\vartheta = 0,45$ и экспериментальные данные [16] при $\vartheta = 0,41-0,47$); линии 4 – расчет для теплоизолированной стенки при $Re_\theta = 10^4$

Тестовый расчет пограничного слоя несжимаемой жидкости при значениях $Pr = Pr_t = 1$ для $Re_x > 10^7$ дает значение коэффициента аналогии Рейнольдса $St/C_f = 0,5$ с точностью 0,1%. Это означает, что решением уравнения энергии (1.9) является интеграл Крокко

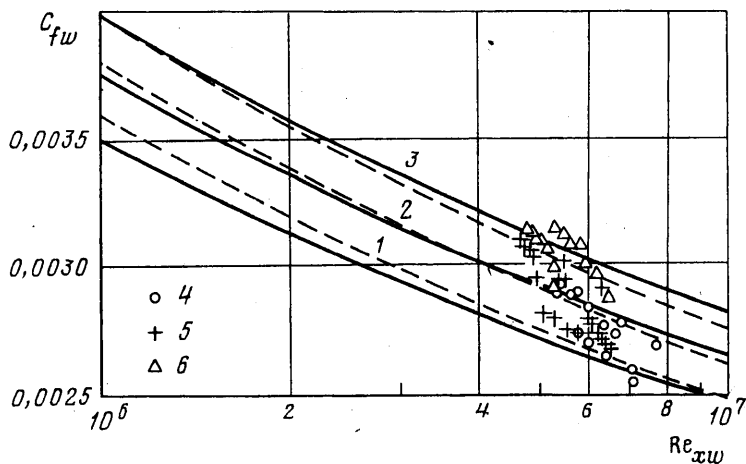
$$\frac{I^\circ - I_w}{I_e - I_w} = \frac{u}{u_e}$$

чему соответствует впервые полученное О. Рейнольдсом значение коэффициента аналогии $St/C_f = 0,5$.

Тепловые граничные условия допускают большее разнообразие, чем динамические граничные условия. На поверхности обтекаемого газом тела можно задать не только постоянную или переменную температуру, но и поток тепла, т.е. градиент температуры на стенке. Частным случаем является отсутствие потока тепла, т.е. $\partial T/\partial y = 0$ при $y = 0$, что приводит к задаче о теплоизолированной стенке. Эта задача занимает особое место в литературе о температурных пограничных слоях (см. [12]) и ей посвящено много теоретических и экспериментальных работ.

Сравнение результатов расчета для коэффициента трения C_f с экспериментальными данными, приведенными в [15] как для дозвукового, так и для сверхзвукового (до чисел $M_e = 4,2$) пограничного слоя на теплоизолированной стенке, показало их хорошее согласование (линия, точки б на фиг. 1). С ростом числа Маха M_e коэффициент трения возрастает, что также подтверждено расчетами.

Температура стенки оказывает значительное влияние на интегральные и локальные характеристики пограничного слоя. В [16] получен большой объем эксперимен-



Фиг. 3. Влияние температурного фактора ϑ на зависимость коэффициента трения C_{fw} от числа Рейнольдса Re_{xw} , определенных по температуре стенки, для сверхзвукового ($M_e = 2,88$) пограничного слоя: 1–3 – результаты расчета (сплошные линии) и расчет по зависимости (3.6) (штриховые линии) для $\vartheta = 0,65; 0,75; 0,85$; точки 4–6 – экспериментальные данные [15] для $\vartheta = 0,6-0,7; 0,7-0,8; 0,8-0,9$

тальной информации по коэффициенту поверхностного трения и профилям скорости и температуры в дозвуковом ($M_e = 0,06$) пограничном слое на охлаждаемой стенке, позволяющий провести детальное сравнение с расчетом.

Расчет проведен для параметров, близких к экспериментальным: $T_e = 820$ К, $T_w = 370$ К ($\vartheta = 0,45$); числа Рейнольдса, определенные по толщине потери импульса, в сечениях, где определялись профили скорости и температуры, составляли $Re_\theta = (1,6-10,5) \cdot 10^3$.

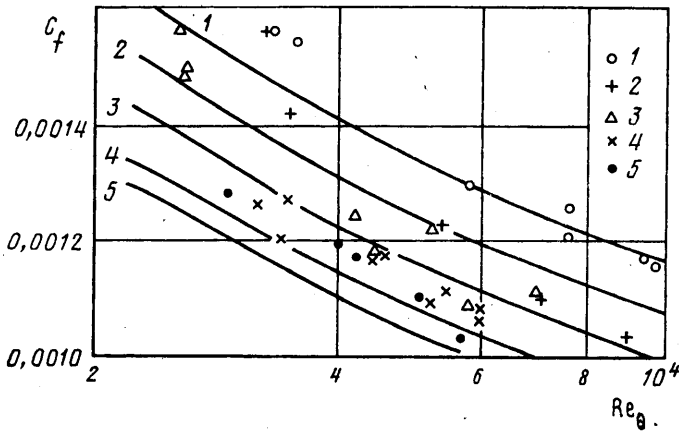
На фиг. 1 представлена расчетная зависимость $C_f(Re_\theta)$ для охлаждаемой стенки (линия 7) в сравнении с экспериментальными данными [16] (точки 7). Охлаждение стенки приводит к росту коэффициента трения C_f . Результаты расчета согласуются с экспериментом.

Охлаждение стенки также меняет вид профилей скорости (фиг. 2, а) и температуры (фиг. 2, б), построенных в универсальных координатах

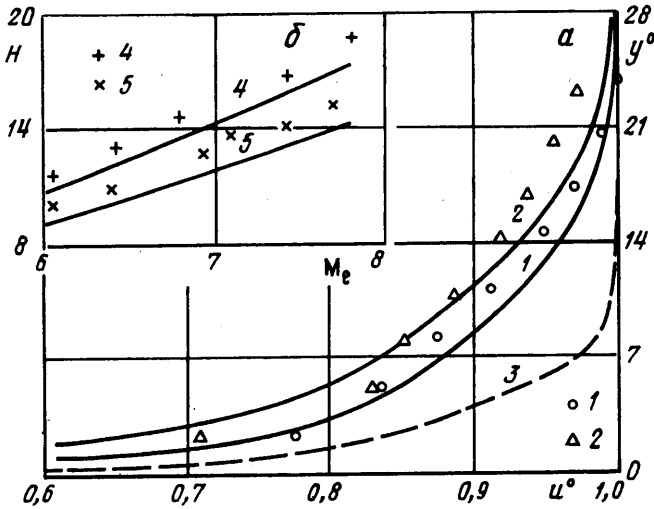
$$u_+ = \frac{u}{u_*}, \quad T_+ = \frac{T_w - T}{T_*}, \quad y_+ = y u_* \left(\frac{\rho}{\eta} \right)_w, \quad T_* = \frac{q_w}{\rho_w c_{pw} u_*}$$

Здесь u_* – динамическая скорость. Полученные для охлаждаемой стенки результаты расчета (линии 1–3) согласуются с экспериментальными данными [16] (точки 1–3) при различных числах Re_θ и лежат выше профилей u_+ , T_+ для теплоизолированной стенки (линии 4).

Экспериментальному исследованию влияния температурного фактора $\vartheta = T_w/T_{aw}$ на зависимость $C_f(Re_x)$ в сверхзвуковом ($M_e = 2,88$) пограничном слое посвящена работа [15]. Сравнение результатов расчета с экспериментальными данными показало, что с ростом температурного фактора коэффициент трения падает и хотя разброс экспериментальных данных [15] достаточно велик, можно считать, что они согласуются с расчетом. Отметим, что в [15] рекомендуется определять величины C_f и Re_x по температуре стенки T_w . Зависимость $C_{fw}(Re_{xw})$ (фиг. 3) отличается от зависимости $C_f(Re_x)$ тем, что C_{fw} с ростом ϑ возрастает, а разброс экспериментальных данных не выходит за пределы расчетной области $C_{fw}(Re_{xw})$.



Фиг. 4. Зависимость коэффициента трения C_f от числа Рейнольдса Re_θ для сверхзвукового пограничного слоя на охлаждаемой ($\vartheta = 0,3$) стенке: линии, точки 1–5 – результаты расчета и экспериментальные данные [17] для чисел $M_e = 5,9; 6,4; 6,9; 7,4; 7,7$

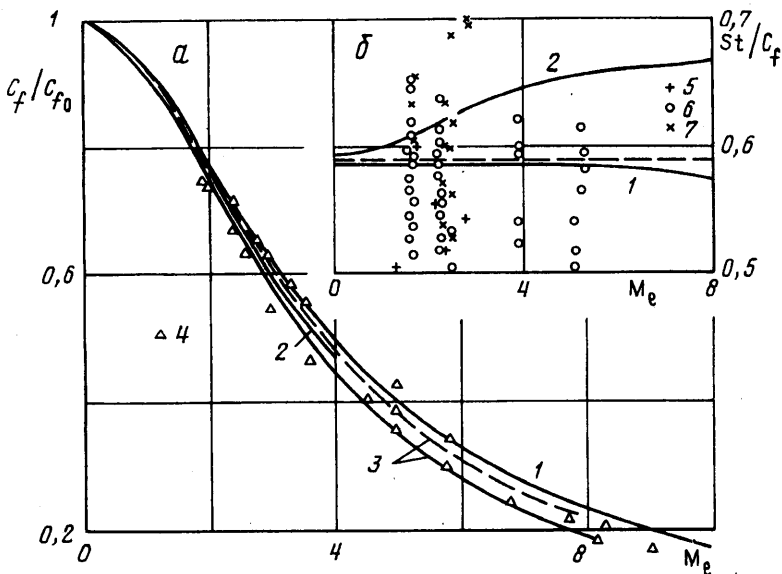


Фиг. 5. Профили скорости $u^o = u/u_e$, $y^o = y/\theta$ (а) и зависимость формпараметра H от числа Маха M_e (б) для сверхзвукового пограничного слоя на охлаждаемой стенке: линии, точки 1–2 – результаты расчета и экспериментальные данные [17] для чисел Маха $M_e = 6$ и $7,7$ при $Re_\theta = (5-10) \cdot 10^3$, $\vartheta = 0,3$; линия 3 – расчет для $M_e = 0,1$ при $Re_\theta = 10^4$, $\vartheta = 0,3$; линии, точки 4, 5 – результаты расчета и экспериментальные данные [17] для $\vartheta = 0,5$ и $0,3$ при $Re_\theta = (5-20) \cdot 10^3$

Интерполяционная зависимость, построенная в [15] в результате обработки экспериментальных данных (штриховые линии на фиг. 3)

$$C_{f_{iw}} = 0,085 Re_{xw}^{-0,29+0,01 \lg Re_{xw}} \left(\frac{T_w}{T_{aw}} \right)^{0,39} \left(1 - r \frac{\gamma_e - 1}{2} M_e^2 \right)^{0,2} \quad (3.6)$$

хорошо согласуется с результатами расчета в диапазоне чисел $Re_{xw} = 10^6-10^7$, температурного фактора $\vartheta = 0,6-0,9$ при числе Маха $M_e = 2,88$ и значениях $\gamma_e = 1,4$, $r = 0,88$.



Фиг. 6. Зависимость относительной величины коэффициента трения C_f/C_{f0} и коэффициента аналогии Рейнольдса St/C_f (б) от числа Маха Me : линии 1–3 – результаты расчета для значений $\vartheta = 0,5; 1; 1,5$ при $Re_\theta = 10^5$; штриховая линия 3 – расчет при $Re_\theta = 10^4$ для $\vartheta = 1,5$; точки 4 – экспериментальные данные, приведенные в [15], при $2 \cdot 10^3 < Re_\theta < 3,3 \cdot 10^4$; точки 5 – для $\vartheta < 1$; 7 – $\vartheta > 1$ [18]; точки 6 – $0,9 < \vartheta < 1,1$ [13]

Среди экспериментальных работ по сверхзвуковому пограничному слою следует отметить работу [17], где проведены обширные измерения поверхностного трения и профилей скорости в диапазоне чисел $Me = 5,9–7,9$ при значениях температурного фактора $\vartheta = 0,3$ и $0,5$.

Сравнение результатов расчета с экспериментальными данными [17] зависимости $C_f(Re_\theta)$ проведены для $\vartheta = 0,3$ (фиг. 4) и $0,5$ для всех исследованных чисел Маха Me . Полученное в расчетах снижение коэффициента трения C_f с ростом числа Маха Me согласуется с экспериментальными данными [17].

Сравнение расчетных профилей скорости в сверхзвуковом пограничном слое с экспериментальными данными для $\vartheta = 0,3$ представлено на фиг. 5, а. С ростом числа Маха Me профили скорости становятся более пологими (линии 1, 2), особенно по сравнению с профилями скорости в дозвуковом пограничном слое (линия 3). Аналогичная картина имеет место и при $\vartheta = 0,5$. Влияние температурного фактора на профили скорости намного слабее, чем числа Маха Me , как в сверхзвуковом, так и в дозвуковом пограничном слое.

Зависимость формпараметра H от числа Маха Me , полученная в расчете (фиг. 5, б), близка к линейной, как и в эксперименте [17], и отличается от последней не более чем на 10%, что можно считать приемлемым.

Таким образом, проведенное сравнение результатов расчета с экспериментальными данными для сверхзвукового пограничного слоя показало их хорошее согласование по коэффициенту трения и профилям скорости в широком диапазоне чисел Рейнольдса, Маха и температурного фактора. Что касается тепловых характеристик пограничного слоя, то экспериментальных данных для них значительно меньше и представляются они, как правило, в обобщенном виде с использованием ряда предположений, которые в свою очередь требуют экспериментального обоснования.

4. Обобщенные зависимости для трения и теплообмена. Большинство методов расчета сверхзвуковых пограничных слоев (см., например, обзор [13]) фактически сводятся к преобразованию коэффициента поверхностного трения C_f и числа Рейнольдса

Re_θ (или Re_x) к плоскости несжимаемого течения, для которого зависимость $C_f(Re_\theta)$ известна с хорошей точностью. При этом предполагается, что пограничный слой является полностью турбулентным с однозначным соответствием между C_f и Re_θ (или Re_x) для заданных значений числа Маха, температурного фактора ϑ и числа Прандтля.

Для коэффициента трения C_f в инженерной практике (см. в [4]) наиболее употребительно представление $C_f/C_{f0} = f(M_e)$ при $Re_\theta, Re_x = \text{const}$, где C_{f0} – коэффициент трения для числа Маха $M_e \approx 0$ при $Re_\theta, Re_x = \text{idem}$. Сравнение результатов расчета с экспериментальными зависимостями $C_f/C_{f0}(M_e)$ как при $Re_\theta = \text{const}$ (фиг. 6, а), так и при $Re_x = \text{const}$ для значений температурного фактора $\vartheta = 0,5; 1; 1,5$ показало их хорошее согласование. В расчете, как и в эксперименте, имеет место расслоение зависимостей C_f/C_{f0} по температурному фактору ϑ и числу Re_θ , что необходимо учитывать при определении коэффициента трения в сверхзвуковом потоке.

В инженерной практике расчет теплопередачи состоит в использовании аналогии Рейнольдса, которая позволяет при известном отношении числа Стантона St и коэффициента трения C_f , зная величину C_f (см. выше), найти значение числа St . Определению отношения St/C_f – коэффициента аналогии Рейнольдса – посвящено множество работ (см., например, обзор [13], а также [18]).

Несмотря на то, что величина коэффициента аналогии Рейнольдса, как и коэффициента трения C_f , должна зависеть от чисел Маха M_e , Рейнольдса Re_θ (или Re_x), температурного фактора ϑ , в [13] рекомендуется величина $St/C_f = 0,6$, не зависящая от указанных параметров. Это близко к величине $St/C_f = 0,61 \pm 0,13$, полученной ранее (см. в [18]) путем обобщения наиболее надежных экспериментальных данных по теплообмену и трению в сверхзвуковых потоках. Приведенные выше значения St/C_f мало отличаются от величины $St/C_f = 0,59$ [14] для несжимаемой жидкости в дзвукковых потоках.

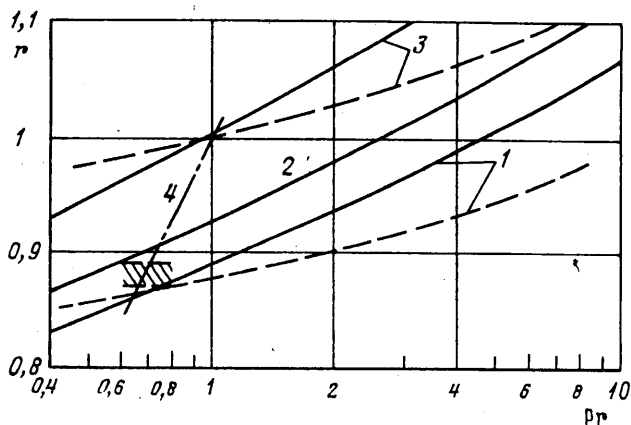
Проведенное численное исследование позволило установить следующее. Зависимость $St/C_f(Re_\theta)$, достаточно сильная в области невысоких ($< 10^4$) значений числа Re_θ , с ростом последнего ($Re_\theta > 10^5$) выходит на значение St/C_f , зависящее только от числа Маха и температурного фактора ϑ . Расчетные зависимости $St/C_f(M_e)$ для двух значений температурного фактора $\vartheta = 0,5$ и $1,5$ при $Re_\theta = 10^5$ представлены на фиг. 6, б. Как видно, с ростом числа Маха диапазон изменения коэффициента аналогии Рейнольдса увеличивается по сравнению с величиной $St/C_f = 0,59$ (штриховая линия на фиг. 6, б) для несжимаемой жидкости [14], хотя и не превосходит разброса экспериментальных данных (точки 4–6 на фиг. 6, б).

Проведенные расчеты позволили установить зависимость коэффициента аналогии Рейнольдса St/C_f от параметров $Re_\theta, M_e, \vartheta$, однако подтвердить ее ввиду невысокой точности экспериментальных данных в настоящее время не представляется возможным.

Такое же замечание можно сделать и относительно коэффициента восстановления энтальпии r , входящего в определение числа St (2.5) через энтальпию теплоизолированной стенки I_{aw} .

Как показали расчеты, величина r зависит от чисел Re_x и M_e . Сильная зависимость имеет место при не очень высоких значениях числа Re_x . При больших Re_x коэффициент восстановления энтальпии r меняется очень слабо и зависит только от M_e , отличаясь для воздуха от общепринятого значения $r = 0,88$ не более чем на 3% при $M_e = 5$ и $Re_x = 10^9$.

Величина r существенно зависит от значения турбулентного числа Прандтля Pr_t , используемого в модели турбулентности. Так, значение $Pr_t = 0,87$ дает зависимость $r(M_e)$, расположенную ближе к величине $r = 0,88$, чем значение $Pr_t = 0,85$, принятое в [6] по рекомендации [14]. Учитывая достаточно сильный характер зависимости $r(Pr_t)$, целесообразно использовать модель турбулентности не с постоянным значением Pr_t для турбулентного потока тепла q_t (1.6), а уравнение переноса для q_t [19].



Фиг. 7. Расчетная зависимость коэффициента восстановления энтальпии r от числа Прандтля Pr ($Re_x = 10^9$, $M_e = 3$) для значений турбулентного числа Прандтля: сплошные линии 1–3 – $Pr_t = 0,85; 0,9; 1$; штриховые линии 1, 3 – зависимость (4.1); линия 4 – $r = Pr^{1/3}$; заштрихованная область – экспериментальные данные для воздуха ($Re_x \approx 10^7$, $M_e = 2-4,5$) [12]

Для оценки влияния молекулярного числа Прандтля на коэффициент восстановления в литературе (см. [12]) принимается соотношение $r = Pr^{1/3}$, что для воздуха при $Pr = 0,7$ дает $r = 0,89$.

Многopараметрическая зависимость для r получена Ротта (см. в [12])

$$r = Pr + b(Pr - Pr_t)1/2C_f + 7(1 - Pr_t)\sqrt{1/2C_f} \quad (4.1)$$

Здесь C_f – местный коэффициент поверхностного трения, b – некоторая функция отношения Pr/Pr_t .

Сравнения приведенных зависимостей с результатами расчетов $r(Pr)$ для ряда значений числа $Pr = Pr_t$ при $Re_x = 10^9$ и $M_e = 3$ представлено на фиг. 7. Экспериментальные данные для воздуха [12] на фиг. 7 представлены заштрихованной областью. Как видно, результаты расчета $r(Pr_t)$ близки к зависимости (4.1), а при значениях $Pr = Pr_t = 1$ все упомянутые зависимости дают величину $r = 1$.

Таким образом, проведенные расчеты показали, что коэффициенты аналогии Рейнольдса St/C_f и восстановления энтальпии r являются функциями чисел Re_θ , Re_x , M_e , Pr и температурного фактора ϑ . Поэтому принимать их постоянными при определении числа Стантона в сверхзвуковых пограничных слоях можно лишь приближенно при больших значениях числа Рейнольдса и в диапазоне чисел Маха, Прандтля и температурного фактора, исследованном экспериментально.

Представленные выше обобщенные зависимости в конечном счете необходимы для определения величин трения и теплообмена в сверхзвуковом пограничном слое с заданными параметрами набегающего потока и условиями на стенке. Для ЖРД по указанным величинам рассчитываются потери удельного импульса тяги двигателя и температура стенки сопла – параметры, которые являются определяющими с точки зрения эффективности двигателя и работоспособности его конструкции.

Учитывая высокие требования по точности определения этих величин и зависимость их от многих параметров, в настоящее время с развитием дифференциальных моделей турбулентности и высокоскоростной вычислительной техники нет необходимости использовать обобщенные многopараметрические зависимости для трения и теплообмена, точность которых невелика.

Разработанная авторами методика расчета, базирующаяся на трехпараметрической дифференциальной модели турбулентности, позволяет рассчитывать необходимые величины трения и теплообмена в сверхзвуковом пограничном слое в широком

диапазоне изменения определяющих параметров с достаточно высокой точностью.

Заключение. Для пограничного слоя на теплоизолированной стенке расчетная зависимость коэффициента трения C_f от чисел Рейнольдса Re_θ , Re_x хорошо согласуется с известными экспериментальными данными в диапазоне чисел Маха $M_e = 0,05-4,2$. Для теплопередающей стенки исследовано влияние температурного фактора ($\vartheta \geq 0,3$) на интегральные и локальные характеристики дозвукового и сверхзвукового ($M_e \leq 7,7$) пограничного слоя. Показано, что охлаждение стенки приводит к росту коэффициента трения C_f , а с ростом числа M_e величина C_f снижается. Влияние температурного фактора на профили скорости намного слабее, чем числа Маха, как в сверхзвуковом, так и в дозвуковом пограничном слое. Полученные результаты численного исследования согласуются с известными экспериментальными данными.

Проведено обобщение результатов численного исследования для коэффициента трения C_f и числа Стантона St в сверхзвуковом пограничном слое в виде зависимостей относительного коэффициента трения C_f/C_{f0} и коэффициента аналогии Рейнольдса St/C_f от чисел M_e , Re_x , Re_θ и температурного фактора. Для величины C_f/C_{f0} получено хорошее согласование с экспериментом, для величины St/C_f подтвердить полученную зависимость от указанных параметров ввиду невысокой точности экспериментальных данных в настоящее время не представляется возможным.

При расчете величин трения и теплообмена в соплах ЖРД, требующих высокой точности определения, предложено отказаться от использования многопараметрических обобщенных зависимостей для указанных величин, а находить их непосредственно по разработанной методике, базирующейся на дифференциальной модели турбулентности, которая позволяет достаточно точно рассчитывать их в сверхзвуковом пограничном слое в широком диапазоне определяющих параметров.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09-01-00260).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гиневский А.С., Иоселевич В.А., Колесников А.В. и др. Методы расчета турбулентного пограничного слоя // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. М.: ВИНТИ, 1978. Т. 11. С. 155–304.
2. Исвалев В.М. Турбулентное движение высокотемпературных сплошных сред. М.: Наука, 1975. 256 с.
3. Авдудевский В.С. Метод расчета пространственного турбулентного пограничного слоя в сжимаемом газе // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1962. № 4. С. 3–12.
4. Кутателадзе С.С., Леонтьев А.И. Теплообмен и трение в турбулентном пограничном слое. М.: Энергия, 1972. 342 с.
5. Луцик В.Г., Павельев А.А., Якубенко А.Е. Трехпараметрическая модель сдвиговой турбулентности // Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. № 3. С. 13–25.
6. Луцик В.Г., Павельев А.А., Якубенко А.Е. Трехпараметрическая модель турбулентности: расчет теплообмена // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 2. С. 40–52.
7. Луцик В.Г., Павельев А.А., Якубенко А.Е. Турбулентные течения. Модели и численные исследования. Обзор // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 4. С. 4–27.
8. Луцик В.Г., Якубенко А.Е. Сравнительный анализ моделей турбулентности для расчета пристенного пограничного слоя // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 1. С. 44–58.
9. Луцик В.Г., Сизов В.И., Стернин Л.Е., Якубенко А.Е. Потери удельного импульса из-за трения и рассеяния в сопле ЖРД с завесным охлаждением // Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 4. С. 82–93.
10. Луцик В.Г., Якубенко А.Е. Пристенная газовая щелевая завеса на пластине. Сравнение расчета с экспериментом // Изв. РАН. МЖГ. 1997. № 6. С. 48–62.
11. Варгафтик Н.Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Наука, 1972. 720 с.

12. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.
13. Hopkins E.J., Inouye M. An evaluation of theories for predicting turbulent skin friction and heat transfer on flat plates at supersonic and hypersonic Mach numbers // AIAA Journal. 1971. V. 9. № 6. P. 993–1003. (Рус. перев.: Хопкинс, Инуе. Оценка методов расчета турбулентного поверхностного трения и теплопередачи на плоской пластине при сверхзвуковых и гиперзвуковых числах Маха // Ракетная техника и космонавтика. 1971. Т. 9. № 6. С. 3–15.)
14. Кадер Б.А., Яглом А.М. Законы подобия для пристенных турбулентных течений // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. М.: ВИНТИ, 1980. Т. 15. С. 81–155.
15. Козлов Л.В. Экспериментальное исследование поверхностного трения на плоской пластине в сверхзвуковом потоке при наличии теплообмена // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1963. № 2. С. 11–19.
16. Back L.H., Cuffel R.F. Effect of wall cooling on the mean structure of a turbulent boundary layer in low-speed gas flow // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 1970. V. 13. № 6. P. 1029–1047.
17. Hopkins E.J., Keener E.R., Polek T.E. Hypersonic turbulent skin-friction and boundary-layer profiles on nonadiabatic flat plates // AIAA Journal. 1972. V. 10. № 1. P. 40–48. (Рус. перев.: Гопкинс, Кинер, Полек. Трение на поверхности и профили скорости в гиперзвуковом турбулентном пограничном слое на нетеплоизолированных плоских пластинах // Ракетная техника и космонавтика. 1972. Т. 10. № 1. С. 49–58.)
18. Козлов Л.В. Связь аэродинамического нагрева с поверхностным трением // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1963. № 4. С. 108–111.
19. Луцик В.Г., Павельев А.А., Якубенко А.Е. Уравнение переноса для турбулентного потока тепла. Расчет теплообмена в трубе // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 6. С. 42–50.

Москва

Поступила в редакцию
5.IV.1997