

УДК 532.526.3.013.4

© 1998 г. М.В. УСТИНОВ

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕОДНОРОДНОГО ПО РАЗМАХУ ТЕЧЕНИЯ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Исследована линейная устойчивость течения в пограничном слое с периодической по размаху неоднородностью профиля скорости. Такое течение является моделью полосатой структуры, возникающей в пограничном слое при повышенной степени турбулентности набегающего потока. Показано, что при малой амплитуде неоднородности наиболее неустойчивы симметричные моды, подобные волнам Толлмина–Шлихтинга. При большой амплитуде неоднородности наиболее быстрорастущими становятся антисимметричные моды, качественно отличные от волн Толлмина–Шлихтинга и имеющие большую фазовую скорость.

При повышенной степени турбулентности набегающего потока $0,2\% \leq \varepsilon \leq 10\%$ в пограничном слое наблюдаются квазистационарные возмущения в виде уединенных или периодически расположенных полос с повышенной или пониженной скоростью течения [1]. Неоднородность течения в направлении размаха, созданная такими возмущениями, достигает величины 20–30% скорости набегающего потока и приводит к значительному изменению характеристик устойчивости пограничного слоя. Поэтому исследование устойчивости неоднородных по размаху течений необходимо для понимания механизма ламинарно-турбулентного перехода при повышенной степени турбулентности потока.

Устойчивость неоднородных течений с периодически расположенными продольными вихрями различной природы, исследовалась методом Флокэ в [2, 3] и методом прямого численного моделирования в [4]. Оказалось, что в таких течениях появляется особый вид неустойчивых возмущений, имеющих высокую частоту и распространяющихся со скоростью $(0,5-0,6) u_\infty$, где u_∞ – скорость набегающего потока. Подобные возмущения были обнаружены в эксперименте [5], в котором изучалась устойчивость пограничного слоя с искусственно созданной периодической вдоль размаха неоднородностью течения, моделирующей полосатую структуру, появляющуюся при повышенной степени турбулентности. Однако результаты [2–4] только качественно описывают эксперимент [5] и развитие возмущений в пограничном слое при наличии полосатой структуры. В настоящей работе исследуется устойчивость неоднородных по размаху течений, максимально приближенных к полосатой структуре в переходном пограничном слое, причем рассматриваются как периодические по размаху, так и уединенные неоднородности профиля скорости. Полученные результаты могут быть полезны для создания теории перехода при повышенной степени турбулентности набегающего потока.

1. Постановка задачи. Рассмотрим устойчивость неоднородного по размаху течения вязкой несжимаемой жидкости в пограничном слое на плоской пластине. Рассматривая развитие возмущений в рамках уравнений Навье–Стокса, ограничимся плоскопараллельным приближением и исследованием временной эволюции периодических по пространству возмущений. Оси x, y, z декартовой системы координат направим вдоль потока, по нормали к поверхности пластины и в поперечном направлении. В качестве масштабов для координат и скорости выберем осредненную по z толщину

вытеснения пограничного слоя δ^* и скорость набегающего потока u_∞ . Основное течение $V_0(y, z)$ будем считать периодическим по z с периодом T_z и представим его в виде ряда Фурье

$$V_0 = \{U_0(y), 0, 0\} + V_i, \quad V_i = \sum_{n=-N}^N V_{0n} \exp(in\beta_i z) \quad (1.1)$$

где $U_0(y)$ – профиль скорости в пограничном слое Блазиуса, V_i – неоднородность течения, $\beta_i = 2\pi/T_z$. Течение с уединенной неоднородностью также может быть описано в рамках (1.1), если период T_z выбрать большим по сравнению с характерным поперечным размером неоднородности.

По теореме Флокэ, неустойчивые возмущения V_p периодического течения (1.1) имеют общий вид

$$V_p = V_a(y, z) \exp[i(\alpha x + \beta_0 z - \omega t)], \quad V_a = \{u, v, w\}$$

где V_a – периодическая по z функция с периодом основного течения, α, β_0 – волновые числа в продольном и поперечном направлениях, ω – частота. Если устойчивость рассматривается во временной постановке, то при заданных вещественных α и β_0 ищется комплексная частота ω , мнимая часть которой определяет скорость нарастания возмущений. В периодических течениях обычно наиболее быстрорастущими являются возмущения с периодом основного течения и субгармонические возмущения, имеющие удвоенный период. В дальнейшем ограничимся рассмотрением этих двух типов возмущений, для которых $\beta_0 = 0$ и $1/2 \beta_i$. Возмущения обоих типов будем искать в едином виде

$$V_p = \left(\sum_{n=-N}^N V_n(z) \exp(in\beta z) \right) \exp[i(\alpha x - \omega t)], \quad \beta = \frac{1}{2} \beta_i \quad (1.2)$$

Подставляя суммарное поле скоростей $V = V_0 + \varepsilon V_p$ в уравнения Навье – Стокса и учитывая линейные по ε члены, получим задачу на собственные значения для ω

$$-i\omega L_2 V_p = L_1 V_p \quad (1.3)$$

Здесь L_1 и L_2 – линейные дифференциальные операторы, конкретный вид которых для краткости не приводится.

2. Численный метод. Путем дискретизации задача (1.3) может быть сведена к обобщенной задаче на собственные значения для матриц

$$-i\omega D F = A' F \quad (2.1)$$

где F – вектор, составленный из дискретного представления возмущений скорости V_p , A' и D – матричные представления операторов L_1 и L_2 . Элементарными преобразованиями соотношение (2.1) сводится к нахождению собственных значений λ_j матрицы

$$A = D^{-1} A' \quad (2.2)$$

которые связаны с собственными значениями (2.1) соотношением $\omega_j = -i\lambda_j$.

Во всех работах, посвященных исследованию устойчивости течений сложной геометрии, применялся описанный способ решения задачи на собственные значения с различными способами дискретизации. Недостатком такого подхода является его неуниверсальность, выражающаяся в том, что для каждого течения необходимо разрабатывать специальный способ дискретизации и формирования матриц D и A . В настоящей работе применялся другой, универсальный способ решения задачи об устойчивости периодических течений, основанный на использовании алгоритма для прямого численного моделирования переходных течений в пограничном слое. Изложим

кратко этот алгоритм, подробно описанный в [6]. Он предназначен для расчета эволюции по времени периодического течения в пограничном слое вида

$$\mathbf{V} = \{U_0(y), 0, 0\} + \sum_{m=0}^M \left(\sum_{n=-N}^N \mathbf{V}_{mn}(y, t) \exp[i(m\alpha x + n\beta z)] \right) + \text{с.с.} \quad (2.3)$$

Здесь с.с. означает выражение, комплексно-сопряженное первому слагаемому.

Подстановка (2.3) в уравнения Навье – Стокса дает систему эволюционных уравнений для отдельных гармоник

$$\mathbf{K}_{mn} \frac{\partial \mathbf{V}_{mn}}{\partial t} = \mathbf{M}_{mn} \mathbf{V}_{mn} + \mathbf{N}_{mn} \mathbf{V} \quad (2.4)$$

Здесь \mathbf{K}_{mn} , \mathbf{M}_{mn} – линейные дифференциальные операторы, \mathbf{N}_{mn} – нелинейный оператор, учитывающий взаимодействие различных гармоник. Для аппроксимации этих уравнений по времени применяется схема Кранка–Николсона с итерациями

$$\frac{2}{\tau} \mathbf{K}_{mn} (\mathbf{V}_{mn}^s - \mathbf{V}_{mn}^k) = \mathbf{M}_{mn} \mathbf{V}_{mn}^s + \mathbf{N}_{mn} \mathbf{V}^{s-1} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{V}_{mn}^s = \frac{1}{2} (\mathbf{V}_{mn}^{k+1(s)} + \mathbf{V}_{mn}^k), \quad \mathbf{V}_{mn}^0 = \mathbf{V}_{mn}^k$$

где τ – шаг по времени, а индексы k и s обозначают номера временного слоя и итерации. Дискретизация (2.5) по y производится методом коллокаций. В качестве базисных функций используются $F_l = y \exp(-y/2) L_l^0(z)$, $l = 0, 1, \dots, Q-1$, где $L_c^{(0)}(y)$ – полиномы Лаггера. За узлы коллокаций принимаются нули полинома $L_Q^{(0)}(y)$. После дискретизации (2.5) и ее разрешения относительно \mathbf{V}_{mn}^s получается итерационный алгоритм, позволяющий вычислить дискретное поле течения \mathbf{G} в момент времени $t + \tau$ для любого заданного поля течения \mathbf{G}^k в момент времени t .

Покажем, как, используя этот алгоритм, решить задачу об устойчивости периодического по размаху течения вида (1.1) по отношению к периодическим по x и z возмущениям. Зададим начальное поле течения (в момент времени t) в виде суперпозиции основного течения, которое описывают гармоники с $m = 0$ в (2.3), и достаточно малых возмущений произвольного вида, которые соответствуют остальным гармоникам. Ввиду малости возмущений их эволюция с достаточной степенью точности описывается линейными уравнениями. Поэтому векторы, составленные из дискретного представления возмущений в моменты времени t и $t + \tau$ (\mathbf{F}^k и \mathbf{F} соответственно), связаны некоторой матрицей перехода \mathbf{B}

$$\mathbf{F} = \mathbf{B} \mathbf{F}^k \quad (2.6)$$

Эта матрица определяется путем расчета изменения на одном шаге по времени набора начальных полей течения \mathbf{F}^{ki} ($i = 1, \dots, I$; I – порядок матрицы \mathbf{B}), представляющий собой столбцы единичной матрицы с элементами δ_i^i . Полученные векторы \mathbf{F}^i являются столбцами матрицы \mathbf{B} . Соотношение между \mathbf{B} и матрицей \mathbf{A} из (2.2) находится, если оставить в (2.4) только уравнения для гармоник, описывающих возмущения, и отбросить нелинейные члены, связанные с взаимодействием гармоник возмущений между собой. При этом (2.4) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{L}_2 \mathbf{V}'_p = \mathbf{L}_1 \mathbf{V}'_p \quad (2.7)$$

где \mathbf{V}'_p – часть (2.3), представляющая возмущения.

Если искать решение (2.7) в виде $\mathbf{V}'_p = \mathbf{V}_p \exp(-i\omega t)$, обычно используемом для

анализа устойчивости, то получится задача на собственные значения вида (1.3). Путем дискретизации по y ранее описанным способом она сводится к нахождению собственных значений матрицы A , определяемой (2.2). С другой стороны, дискретизация (2.7) по y и использование схемы Кранка–Николсона для аппроксимации ее по t дают

$$\frac{2}{\tau}(\mathbf{F}^{k+1/2} - \mathbf{F}^k) = A\mathbf{F}^{k+1/2}, \quad \mathbf{F}^{k+1/2} = \frac{\mathbf{F} + \mathbf{F}^k}{2}$$

с той же матрицей A . Исключая отсюда $\mathbf{F}^{k+1/2}$, получим связь между \mathbf{F} и \mathbf{F}^k и искомое выражение для матрицы перехода B через A

$$\mathbf{F} = B\mathbf{F}^k, \quad B = \left[E - \frac{\tau}{2}A \right]^{-1} \left[E + \frac{\tau}{2}A \right]$$

Здесь E – единичная матрица. Путем элементарных преобразований покажем, что матрицы A и B имеют одинаковые собственные векторы, а собственные числа μ_j матрицы B связаны с собственными значениями λ_j матрицы A соотношением

$$\mu_j = \frac{1 + \tau\lambda_j/2}{1 - \tau\lambda_j/2}$$

из которого имеем окончательное выражение ω_j через собственные значения матрицы перехода

$$\omega_j = -\frac{2i}{\tau} \frac{1 - \mu_j}{1 + \mu_j}$$

Форма возмущений скорости, соответствующих частотам ω_j , определяется собственными векторами матрицы B .

Описанный способ решения уступает по эффективности традиционным методам из-за большого количества вычислений, используемых для нахождения матрицы перехода. Решающим преимуществом этого метода является универсальность, т.е. возможность без существенного изменения алгоритма исследовать устойчивость широкого класса течений, периодических по x или z , или по обоим переменным одновременно. Единственное требование к исследуемому течению – стационарность в какой-либо равномерно движущейся системе отсчета.

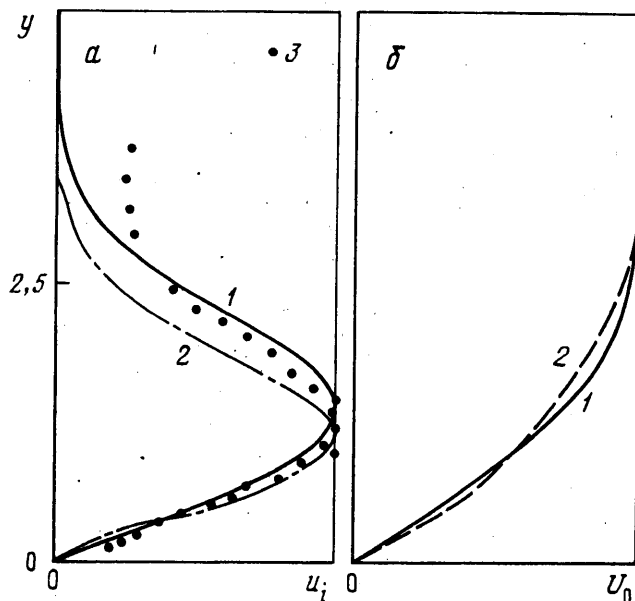
Изложенный метод был опробован на расчете устойчивости периодического по x течения, созданного волной Толлмина–Шлихтинга, по отношению к трехмерным вторичным возмущениям. Полученные инкременты нарастания совпали с результатами расчетов традиционным методом [7].

3. Результаты расчетов. Исследовалась устойчивость двух видов течения в пограничном слое: с неоднородностью профиля скорости, распределенной по гармоническому закону, и с уединенной неоднородностью. В обоих течениях неоднородность скорости V_i имела только продольную компоненту u_i , которая задавалась в виде

$$u_i(y, z) = af(y)g(z)$$

Здесь a – множитель, определяющий амплитуду неоднородности. Функция $f(y)$, учитывающая неоднородность скорости по толщине пограничного слоя, задавалась одинаковой для обоих течений

$$f(y) = \frac{A(y)}{\max(A)}, \quad A = \exp D^- - \exp D^+, \quad D^- = \left(\frac{y - y_0}{\sigma} \right)^2, \quad D^+ = \left(\frac{y + y_0}{\sigma} \right)^2$$



Фиг. 1. Профили неоднородности скорости (а): 1 - $f(y)$, 2 - эксперимент [5], 3 - пульсации скорости [1]. Профили скорости в пограничном слое (б): 1 - Блазиуса, 2 - эксперимент [5]

Параметры $y_0 = 1,4$ и $\sigma = 1,2$ подобраны из условия максимального соответствия $f(y)$ профилям низкочастотных пульсаций скорости в пограничном слое при повышенной степени турбулентности потока. Выбранное здесь распределение $f(y)$ и нормированное распределение пульсаций скорости из [1] при $\epsilon = 1,35\%$ и $R = u_\infty \delta^* / \nu = 860$ показаны на фиг. 1, а кривой 1 и точками 3 соответственно. Из фиг. 1, а видно, что $f(y)$ хорошо описывает пульсации скорости в основной части пограничного слоя, где их распределение в известной степени универсально, т.е. не зависит от степени турбулентности во внешнем потоке, расстояния от передней кромки и других факторов. Различие между ними становится заметным на внешней границе пограничного слоя, где $f(y) \rightarrow 0$, а в эксперименте пульсации выходят на постоянное значение, равное степени турбулентности набегающего потока. Это несоответствие, по-видимому, не оказывает существенного влияния на устойчивость течения.

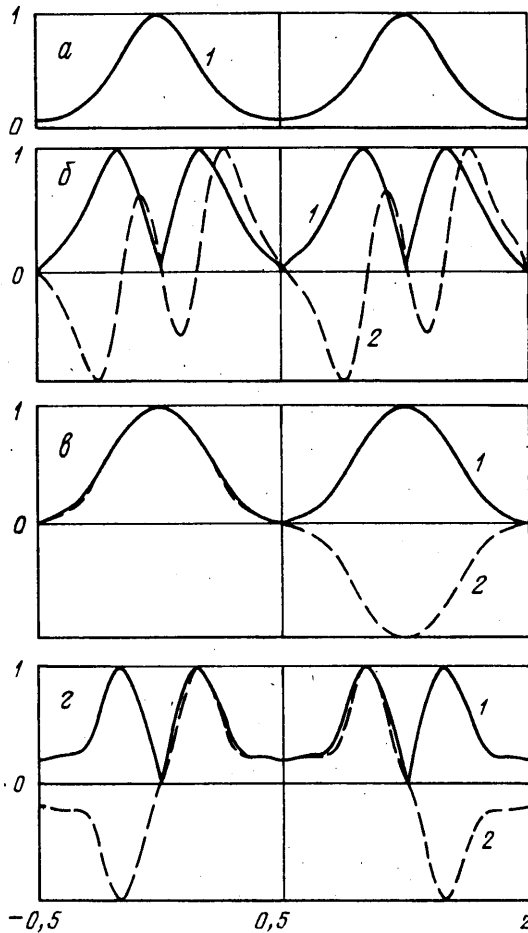
Функция $g(z)$, учитывающая распределение неоднородности скорости по размаху, задавалась двумя способами: $g(z) = \cos \beta_i z$ для течения с гармонической неоднородностью и рядом для уединенной неоднородности

$$g(z) = \frac{1-q}{2} \left[1 + (1+q) \sum_{n=1}^N q^n \cos n\beta_i z \right], \quad q < 1 \quad (3.1)$$

При достаточно большом числе гармоник N и величине q , близкой к единице, этот ряд задает распределение скорости, имеющее узкий максимум при $z = 0$ и мало отличающееся от нуля на остальной части периода.

Вследствие симметрии основного течения относительно $z = 0$ возмущения могут иметь два вида симметрии. Возмущения первого типа, имеющие четные продольную и вертикальную компоненты скорости, будем называть симметричными, моды второго типа с нечетными этими компонентами скорости - антисимметричными. Свойство симметрии возмущений использовалось для уменьшения размерности задачи.

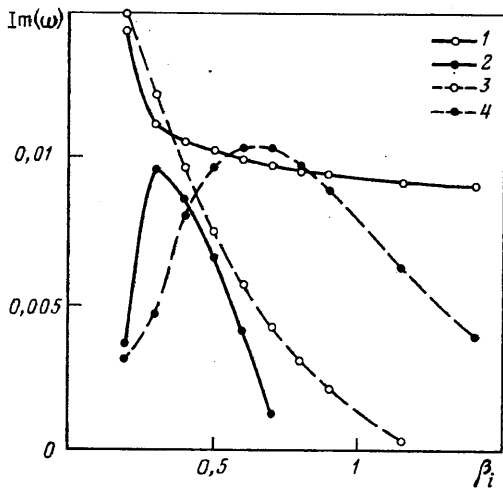
Для анализа устойчивости неоднородных течений выбрано число Рейнольдса $R = u_\infty \delta^* / \nu = 1000$, примерно соответствующее условиям экспериментов [1] и [5]. Методические расчеты показали, что для получения инкрементов нарастания возму-



Фиг. 2. Распределения по размаху: модуля амплитуды пульсаций скорости $|u|$ (1) и их действительной части $\text{Re}(u)$ (2) для различных мод при $y = 1, 2$

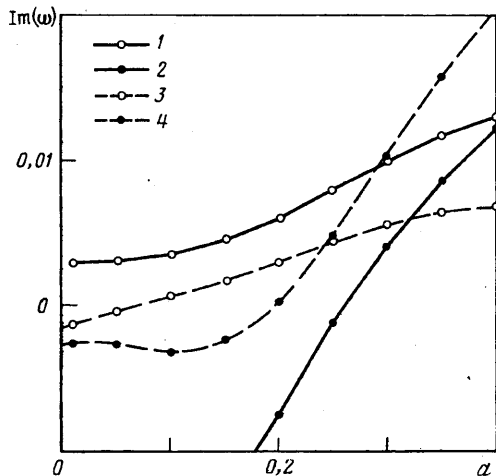
щений в гармонических течениях с $\beta_i \leq 1,5$ и $a \leq 0,4$ с точностью 1% необходимо выбрать число узлов коллокации $Q \geq 51$ и количество гармоник $N \geq 12$. Последующие расчеты устойчивости гармонических течений проводились при $Q = 61$ и $N = 12$, что гарантировало надежность результатов. Течения с уединенной неоднородностью требовали лучшего разрешения по z , поэтому для них выбирались $N = 32$ и $Q = 51$.

Различные типы неустойчивых возмущений гармонического течения с параметрами $a = -0,3$, $\alpha = 0,25$ и $\beta_i = 0,6$ показаны на фиг. 2. На этой фигуре построены зависимости модуля амплитуды продольной составляющей скорости возмущений $|u|$ и ее действительной части $\text{Re}(u)$ от нормированной поперечной координаты $z' = z/T_z$. Симметричные и антисимметричные возмущения основного периода изображены на фиг. 2, а и б, симметричные и антисимметричные субгармонические возмущения – на фиг. 2, в и г. Видно, что максимумы пульсаций скорости симметричных мод совпадают с минимумами скорости основного течения, тогда как максимальные пульсации антисимметричных мод наблюдаются в промежутках между максимумами и минимумами в области максимальных градиентов скорости основного течения. Антисимметричные возмущения имеют повышенную фазовую скорость $c \sim 0,6$. По этому



Фиг. 3

Фиг. 3. Зависимости инкрементов нарастания различных мод от поперечного волнового числа β_i при $a = -0,3$, $\alpha = 0,25$: симметричные и антисимметричные моды (1, 2) основного периода; 3, 4 – субгармонические



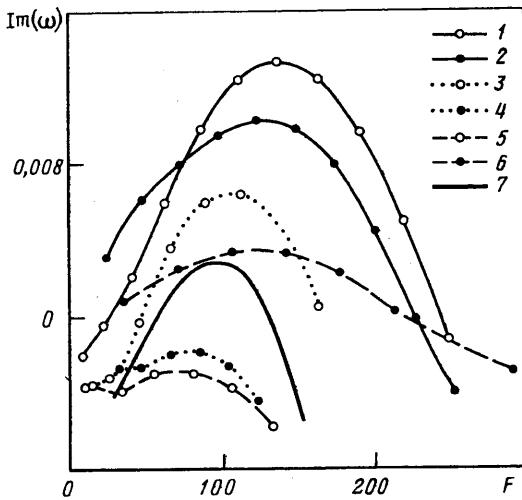
Фиг. 4

Фиг. 4. Зависимости инкрементов нарастания различных мод от амплитуды неоднородности a при $\beta_i = 0,6$, $\alpha = 0,25$; обозначения, как на фиг. 3

параметру они соответствуют высокочастотным возмущениям, наблюдаемым в эксперименте [5]. Фазовая скорость симметричных возмущений $c \sim 0,4$ лишь немного больше, чем у волны Толлмина–Шлихтинга, и примерно соответствует скорости распространения низкочастотных возмущений в [5]. Субгармонические возмущения отличаются от мод основного периода тем, что у них продольная компонента скорости на соседних периодах основного течения имеет противоположный знак, т.е. $u(z + T_2) = -u(z)$. При этом модуль амплитуды скорости, соответствующий среднеквадратичным пульсациям, остается периодической функцией с периодом основного течения. Поэтому по данным измерения среднеквадратичных пульсаций скорости невозможно отличить субгармонические моды от мод основного периода.

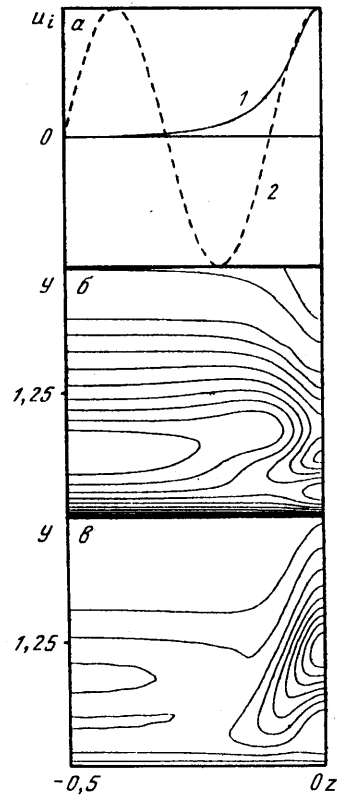
Зависимости инкрементов нарастания упомянутых выше четырех типов мод от поперечного волнового числа β_i при фиксированных $a = -0,3$ и $\alpha = 0,25$ и от амплитуды a при $\beta_i = 0,6$ и $\alpha = 0,25$ показаны на фиг. 3 и 4 соответственно. Кривыми 1 и 2 на этих фигурах изображены результаты для симметричных и антисимметричных возмущений основного периода, кривыми 3 и 4 – для симметричных и антисимметричных субгармонических мод. На фигуре 3 показано, что зависимости инкрементов нарастания от β_i для симметричных и антисимметричных мод качественно различны. Инкременты нарастания симметричных мод монотонно убывают с ростом β_i или уменьшением периода неоднородности. При $\beta_i \rightarrow 0$ или $T_2 \rightarrow \infty$ эти моды описывают перегибную неустойчивость течения в широкой области с отрицательным дефектом скорости в пограничном слое. При увеличении β_i области течения с перегибными профилями в окрестностях минимумов скорости сужаются и проявление перегибной неустойчивости становится слабее, что и приводит к уменьшению скорости роста симметричных мод.

Инкременты нарастания антисимметричных мод сначала увеличиваются, достигают максимума, а затем уменьшаются с ростом β_i . Такое их поведение можно объяснить, приняв гипотезу [5] о том, что антисимметричные моды связаны с неустойчивостью, вызванной градиентом скорости в направлении размаха. Действительно, с ростом β_i увеличивается производная du_i/dz , которая и вызывает неустойчивость.



Фиг. 5

Фиг. 5. Зависимости инкрементов нарастания различных мод от приведенной частоты $F = 10^6 \omega/R$: 1,2 – симметричные и антисимметричные моды при $a = -0,3$, $\beta_i = 0,6$; 3,4 – при $a = -0,2$, $\beta_i = 1,15$; 5,6 – в пограничном слое с профилем скорости из [5] при $a = -0,2$, $\beta_i = 1,15$; 7 – волны Толлмина–Шлихтинга



Фиг. 6

Фиг. 6. Зависимости неоднородности скорости от z' (*a*): 1 – гармоническая неоднородность при $\beta_i = 0,6$; 2 – уединенная неоднородность при $\beta_i = 0,24$; $q = 0,63$. Пульсации скорости в плоскости (y, z) при $a = +0,3$ (*b*) и $-0,3$ (*v*); шаг изолиний $-0,1$ максимума

Однако когда период становится совсем малым, вязкие члены, связанные с градиентом скорости возмущений по размаху, подавляют их рост.

Инкременты нарастания всех мод увеличиваются с ростом амплитуды неоднородности (см. фиг. 4). При $a \rightarrow 0$ симметричные моды основного периода вырождаются в волну Толлмина–Шлихтинга, а остальные моды становятся затухающими. При малых амплитудах неоднородности наиболее быстрорастущими являются симметричные, а при больших амплитудах – антисимметричные возмущения. Из фиг. 3 и 4 видно, что в течениях с достаточно малым периодом неоднородности ($\beta_i > 0,4$) из симметричных возмущений наиболее неустойчивыми являются моды основного периода, а из антисимметричных – субгармонические возмущения. Поэтому в дальнейшем ограничимся исследованием симметричных мод основного периода и субгармонических антисимметричных мод, которые будем называть просто симметричными и антисимметричными возмущениями.

Зависимости инкрементов нарастания этих мод от приведенной частоты $F = 10^6 \omega/R$ показаны на фиг. 5. При большой амплитуде неоднородности $a = -0,3$ и поперечном волновом числе $\beta_i = 0,6$, соответствующем максимуму скорости роста антисиммет-

ричных мод, возмущения обоих типов имеют примерно равные инкременты нарастания, намного превышающие скорость роста волн Толлмина–Шлихтинга в однородном пограничном слое. Диапазон частот, в котором нарастают возмущения, также намного шире диапазона роста волн Толлмина–Шлихтинга. Антисимметричные моды быстрее усиливаются при низких частотах, а симметричные – при высоких.

При относительно малой амплитуде $a = -0,2$ и большом $\beta_i = 1,15$, соответствующих условиям эксперимента [5], антисимметричные моды затухают, а усиливаются только симметричные возмущения. Это противоречит данным эксперимента, где усиливались оба вида мод, причем наибольшие инкременты нарастания имели антисимметричные возмущения при $F \sim 150$. Соответствие результатов расчета и данных эксперимента улучшается, если за исходный профиль в пограничном слое взять профиль, измеренный в [5] посередине между максимумами и минимумами скорости основного течения. Этот профиль, показанный кривой 2 на фиг. 1,б, мало отличается от профиля в пограничном слое Блазиуса, изображенного кривой 1 на этой же фигуре.

Инкременты нарастания симметричных и антисимметричных мод в течении с измененным профилем скорости при $a = -0,2$, $\beta_i = 1,15$ показаны кривыми 5 и 6 на фиг. 5. В таком течении в отличие от исходного наблюдается неустойчивость только к антисимметричным модам, которые усиливаются в диапазоне частотных параметров $25 < F < 220$, что примерно соответствует данным [5]. В отличие от результатов эксперимента симметричные моды в течении с измененным профилем скорости являются слабозатухающими. Однако это расхождение не столь существенно, так как в эксперименте симметричные низкочастотные возмущения росли достаточно медленно. Оставшиеся расхождения с экспериментом можно объяснить недостаточно точным заданием формы профилей скорости и неоднородности в расчетах, а также возможным влиянием непараллельности течения в пограничном слое.

Кроме устойчивости гармонических по размаху течений рассчитана устойчивость двух течений с уединенной неоднородностью. Распределение скорости по размаху в этих течениях задавалось по (3.1) с $\beta_i = 0,24$ и $q = 0,63$, а амплитуда неоднородности a выбиралась равной $\pm 0,3$. Используемая форма уединенной неоднородности, показанная кривой 1 на фиг. 6,а, близка к гармонической неоднородности с $\beta_i = 0,6$, построенной кривой 2 на половине периода последней. Для проведения расчетов устойчивости течений с уединенной неоднородностью выбрано продольное волновое число $\alpha = 0,25$, соответствующее максимальным инкрементам нарастания в гармоническом течении с $\beta_i = 0,6$. По сравнению с гармонически неоднородным течением той же амплитуды инкременты нарастания всех мод в течениях с уединенной неоднородностью обоих знаков оказались значительно меньше. Скорость роста антисимметричных мод получилась меньше, чем у волны Толлмина–Шлихтинга: при $a = 0,3$, $\omega = 0,09735 + i 1,10 \cdot 10^{-3}$ и при $a = -0,3$ $\omega = 0,09960 + i 3,11 \cdot 10^{-4}$. Интересно отметить, что полоса с повышенной скоростью оказалась более неустойчивой по отношению к антисимметричным возмущениям, чем аналогичная по форме полоса с пониженной скоростью.

Симметричные моды представляют больший интерес, так как являются наиболее неустойчивыми возмущениями в течениях с уединенной неоднородностью. Распределения амплитуды пульсаций для мод этого типа при $a = +0,3$ и $-0,3$ показаны изолиниями на фиг. 6,б и в, собственные значения этих мод равны $0,08808 + i 3,36 \cdot 10^{-3}$ и $0,08836 + i 4,52 \cdot 10^{-3}$ соответственно. На фиг. 6 изображена левая половина периода. Пульсации скорости на правой половине симметричны относительно $z = 0$. При пониженной скорости в зоне неоднородности ($a = -0,3$) пульсации сконцентрированы в ее центре и практически равны нулю вне неоднородности. Это означает, что изображенная мода является порождением именно неоднородности и поэтому имеет инкремент нарастания, заметно больший, чем у волны Толлмина–Шлихтинга при том же α , собственная частота которой $\omega_{TS} = 0,08757 + i 3,00 \cdot 10^{-3}$. При повышенной скорости в полосе неоднородности

(фиг. 6,в) возмущения вытесняются из нее. Следовательно, мода, возникающая при этом, является волной Толлмина–Шлихтинга, искаженной взаимодействием с неоднородностью, и ее собственное значение лишь незначительно отличается от собственной частоты последней.

Заключение. В результате исследования устойчивости течения в пограничном слое с неоднородным по размаху профилем скорости найдены два основных типа неустойчивых возмущений: моды с симметричным и антисимметричным распределением скорости по размаху. Моды первого типа имеют фазовую скорость $c \sim 0,4$ и являются наиболее быстрорастущими возмущениями при малых и умеренных амплитудах неоднородности. При больших амплитудах неоднородности наиболее быстрорастущими становятся антисимметричные моды, имеющие фазовую скорость $c \sim 0,6$. Инкременты нарастания этих мод сначала растут, а потом убывают при уменьшении периода неоднородности, достигая максимума при $\beta_i \approx 0,6$. В эксперименте [5] низкочастотные возмущения соответствуют симметричным, а высокочастотные – антисимметричным модам.

Показано, что уединенная полоса с повышенной скоростью в пограничном слое не приводит к существенному изменению характеристик устойчивости, а полоса с пониженной скоростью создает неустойчивость по отношению к симметричным модам.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научно-технического центра (проект 199-95) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95-01-01201а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Westin R.J.A., Boiko A.V., Klingmann B.G.B. et al.* Experiments in a boundary layer subjected to free stream turbulence. Pt I. Boundary layer structure and receptivity // *J. Fluid Mech.* 1994. V. 281. P. 193–218.
2. *Xiuyang Y., Liu J.T.C.* The secondary instability in Goertler flow // *Phys. Fluids. A.* 1991. V. 3. № 8. P. 1845–1847.
3. *Fischer T.M., Hein S., Dallman U.* A theoretical approach for describing the secondary instability features in three-dimensional boundary layer flows // *AIAA Paper.* 1993. № 0080.
4. *Liu W., Domaradzky J.A.* Direct numerical simulation of transition to turbulence in Goertler flow // *J. Fluid Mech.* 1993. V. 246. P. 267.
5. *Bakchinov A.A., Grek G.R., Klingmann B.G.B., Kozlov V.V.* Transition experiments in a boundary layer with embedded streamwise vortices // *Phys. Fluids.* 1995. V. 7. № 4. P. 820–832.
6. *Устинов М.В.* Исследование субгармонического перехода в плоском канале методом прямого численного моделирования // *Изв. РАН. МЖГ.* 1993. № 3. С. 46–53.
7. *Herbert T., Bartolotti F.P., Santos G.R.* Floquet analysis of secondary instability in shear flows // *Stability of Time Dependent and Spatially Varying Flows / Ed. D.L. Dwoyer, M.Y. Hussaini, N.Y.: Springer-Verlag, 1987. P. 43–57.*

Москва

Поступила в редакцию
21.III.1997