

УДК 532.526.2:536.42

© 1998 г. А.В. КАЗАКОВ

ВЛИЯНИЕ ОБЪЕМНОГО ПОДВОДА ЭНЕРГИИ НА ЗАКРУЧЕННЫЕ ТЕЧЕНИЯ В СПУТНОМ ДОЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

Проведены численные исследования влияния подвода тепла на закрученное течение вязкого теплопроводного газа в спутном дозвуковом потоке. Рассмотрен начальный этап развития закрученного течения вблизи оси вихря с постоянной величиной циркуляции во внешней области течения для двух начальных распределений продольной составляющей вектора скорости, моделирующих закрученное течение струйного типа и течение в следе с дефицитом продольной скорости. Исследовано влияние локального объемного подвода энергии вблизи оси вихря, величины циркуляции окружной составляющей скорости и внешнего продольного градиента давления в невязком потоке на развитие закрученного течения и процесс разрушения спутных завихренных течений.

К завихренным течениям, представляющим большой практический интерес, относятся прежде всего вихри, сходящие с законцовок крыльев большого удлинения и простирающиеся затем на большие расстояния в следе за самолетом, и закрученные течения в каналах и трубах. Другим важным примером могут служить вихри, формирующиеся вблизи острых кромок треугольных крыльев, обтекаемых под большим углом атаки.

Математическое моделирование таких сложных трехмерных течений, характеристик их устойчивости и в особенности адекватное описание процесса распада и разрушения вихрей [1] в газовых потоках являются одной из важных задач аэродинамики. В большинстве исследований [2–7] завихренные течения, их устойчивость [8–9] и процессы разрушения вихрей рассматривались в рамках модели несжимаемой жидкости.

Физические механизмы разрушения первоначально устойчивых вихревых течений, а также роль сжимаемости и подвода тепла в окрестности ядра вихря в спутном дозвуковом потоке остаются до сих пор полностью не выясненными. Можно ожидать, что характеристики устойчивости завихренных течений будут существенно изменяться при учете сжимаемости и теплопроводности газа [10–13]. Настоящая работа посвящена изучению влияния объемного подвода тепла вблизи оси закрученного потока на эволюцию вихря в спутном дозвуковом потоке вязкого теплопроводного газа.

1. Постановка задачи. Рассматривается стационарное осесимметричное течение вязкого теплопроводного газа. Будем полагать, что вне ядра вихря течение однородно, а циркуляция скорости в потоке вне ядра вихря постоянна. Введем обозначения: l^* – длина, характеризующая продольный масштаб течения, u_0^* , ρ_0^* , μ_0^* , h_0^* – скорость, плотность, коэффициент динамической вязкости и энтальпия в невозмущенном потоке; l^*x , l^*r , φ – цилиндрические координаты с осью x , совпадающей с осью симметрии вихря $r = 0$, $u_0^*v_x$, $u_0^*v_r$, $u_0^*v_\varphi$ – проекции вектора скорости, ρ_0^*p , $\mu_0^*\mu$, $\rho_0^*u_0^{*2}p$, $u_0^{*2}h$ – плотность, коэффициент динамической вязкости, давление и энтальпия соответственно, $Re = \rho_0^*u_0^*l_0^*/\mu_0^*$ – характерное число Рейнольдса.

Так как циркуляция вне вязкого ядра вихря в невязкой области течения постоянна, для вихря в спутном потоке удобно ввести новую переменную $V_\varphi = v_\varphi r$, которая фактически представляет собой циркуляцию окружной составляющей скорости, деленную на 2π . Уравнение импульса для V_φ имеет вид

$$\rho V_x \frac{\partial V_\varphi}{\partial x} + \rho \nu_r \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial}{\partial r} \mu \left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial r} \right) - \frac{\mu}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} - \frac{2V_\varphi}{r} \frac{\partial \mu}{\partial r} \right)$$

При больших числах Re можно считать, что действие вязких сил сосредоточено в области ядра вихря, толщина которого может определяться, например, толщиной пограничного слоя, сформировавшегося на обтекаемом теле. В области внешнего потенциального течения, где $x \cong O(1)$, $r = O(1)$, при $\text{Re} \gg 1$, течение можно полагать невозмущенным (или слабо возмущенным при наличии внешнего градиента давления). В вязком ядре вихря решение при больших числах Re удобно искать в переменных

$$x_1 = x, \quad r_1 = r \text{Re}^{1/2}, \quad V_r = \text{Re}^{1/2} v_r, \quad V_{\varphi 1} = \text{Re}^{1/2} V_\varphi \quad (1.1)$$

В новых переменных система уравнений, описывающая течение в вязком ядре вихря, имеет вид

$$\frac{\partial \rho V_x}{\partial x_1} + \frac{\rho V_r}{r_1} + \frac{\partial \rho V_r}{\partial r_1} = 0, \quad p = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \rho h \quad (1.2)$$

$$\rho V_x \frac{\partial V_x}{\partial x_1} + \rho V_r \frac{\partial V_x}{\partial r_1} = -\frac{\partial p}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial}{\partial r_1} \left(\mu \frac{\partial V_x}{\partial r_1} \right) + \frac{\mu}{r_1} \frac{\partial V_x}{\partial r_1} \right)$$

$$\frac{\rho V_{\varphi 1}^2}{r_1^3} = \frac{\partial p}{\partial r_1}$$

$$\rho V_x \frac{\partial V_{\varphi 1}}{\partial x_1} + \rho V_r \frac{\partial V_{\varphi 1}}{\partial r_1} = \left(\frac{\partial}{\partial r_1} \mu \left(\frac{\partial V_{\varphi 1}}{\partial r_1} \right) - \frac{\mu}{r_1} \frac{\partial V_{\varphi 1}}{\partial r_1} - \frac{2V_{\varphi 1}}{r_1} \frac{\partial \mu}{\partial r_1} \right)$$

$$\rho V_x \frac{\partial h}{\partial x_1} + \rho V_r \frac{\partial h}{\partial r_1} = V_x \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\rho V_r V_{\varphi 1}^2}{r_1} + \frac{1}{\sigma} \left[\frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} \left(\mu r_1 \frac{\partial h}{\partial r_1} \right) \right] +$$

$$+ \mu \left[\left(\frac{\partial V_x}{\partial r_1} \right)^2 + \left(\frac{1}{r_1} \frac{\partial V_{\varphi 1}}{\partial r_1} - \frac{2V_{\varphi 1}}{r_1} \right)^2 \right] + Q(x_1, r_1)$$

$$r_1 = 0: \quad V_r = 0, \quad \frac{\partial V_x}{\partial r_1} = 0, \quad V_{\varphi 1} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial r_1} = 0$$

$$r_1 \rightarrow \infty: \quad V_x = V_{xe}(x_1), \quad V_{\varphi 1} = V_{\varphi 1e} = \text{const}, \quad h = h_e(x_1)$$

$$x_1 = 0: \quad V_x = V_{x0}(r_1), \quad V_{\varphi 1} = V_{\varphi 10}(r_1), \quad h = h_0(r_1)$$

Здесь приведены также краевые условия на оси симметрии, внешней границе вязкой завихренной области течения и начальные условия при $x_1 = 0$. Система уравнений (1.2) является по существу системой композитного типа и представляет собой аналог квазицилиндрического приближения, использованного в [18, 19] для описания закрученного течения несжимаемой жидкости.

Течение вне вязкой области предполагается изоэнтропическим и однородным (все функции течения остаются постоянными вдоль оси вихря) либо с наложенным извне

продольным градиентом давления: $V_{xe}(x_1)$, $h = h_e(x_1)$, $p = P_e(x_1)$, $M = M_e(x_1)$. Коэффициент динамической вязкости предполагается зависящим от температуры (энтальпии) по степенному закону $\mu/\mu_0 = (h/h_0)^\omega$. Здесь и в (1.2) M – число Маха, σ – число Прандтля, γ – показатель адиабаты. В расчетах принято $\omega = 0,7$, $\sigma = 0,75$, $\gamma = 1,4$.

Для интегрирования краевой задачи (1.2) использовалась конечно-разностная аппроксимация уравнений второго порядка точности по координате r_1 и первого порядка точности по продольной координате x_1 . Решение конечно-разностных уравнений находилось итерационным способом с помощью двухточечной прогонки, предложенной в [14] для решения систем параболических уравнений.

В отличие от незакрученных течений ($V_\varphi \equiv 0$) для рассматриваемого класса завихренных течений распределение давления поперек вихря в каждом его сечении находится в процессе итераций.

В расчетах использовалась неравномерная сетка, задаваемая геометрической прогрессией с шагом $\Delta_m = 1,005-1,01$ и имеющая от 900 до 1300 узлов при постоянной внешней координате $r_e = 17$. Итерации считались сошедшимися, когда максимальная относительная ошибка при расчете компонент скорости и температуры оказывалась меньше 10^{-5} .

2. Результаты расчетов. Проведены расчеты течения вязкого теплопроводного газа вблизи оси вихря в спутном потоке. В начальном сечении задавались распределения скорости

$$V_{x0} = 1 + \alpha \exp(-\beta r_1^2), \quad V_{\varphi 10} = V_{\varphi 1c} (1 - \exp(-\beta r_1^2))$$

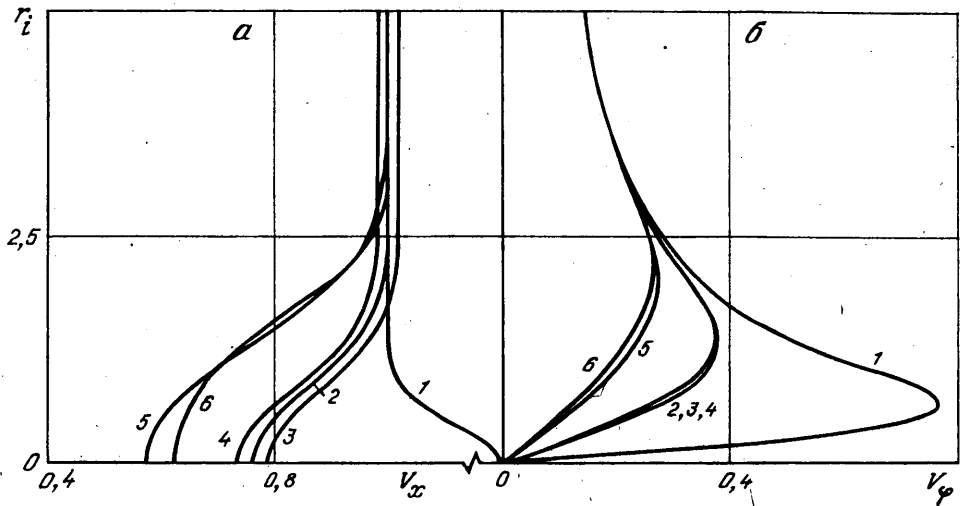
Начальное распределение соответствует распределениям скорости в "q"-вихре [7-9] в спутном потоке, а профиль V_φ полностью идентичен распределению тангенциальной составляющей скорости в модели вихря Ламба-Озеена [7-9, 15-16].

Параметр α позволяет получать различные распределения V_x вблизи оси вихря: $\alpha = 0$ соответствует однородному потоку в его начальном сечении, $\alpha > 0$ – завихренному течению струйного типа, $\alpha < 0$ – завихренному течению в следе. Распределение энтальпии в начальном сечении предполагалось однородным по пространству: $h_0(r_1) = h_e(x_1 = 0)$. В расчетах принималось $Re = 300$, в начальном сечении при $r_1 = 0$ число Маха $M_0 = 0,8$, $\beta = 3$.

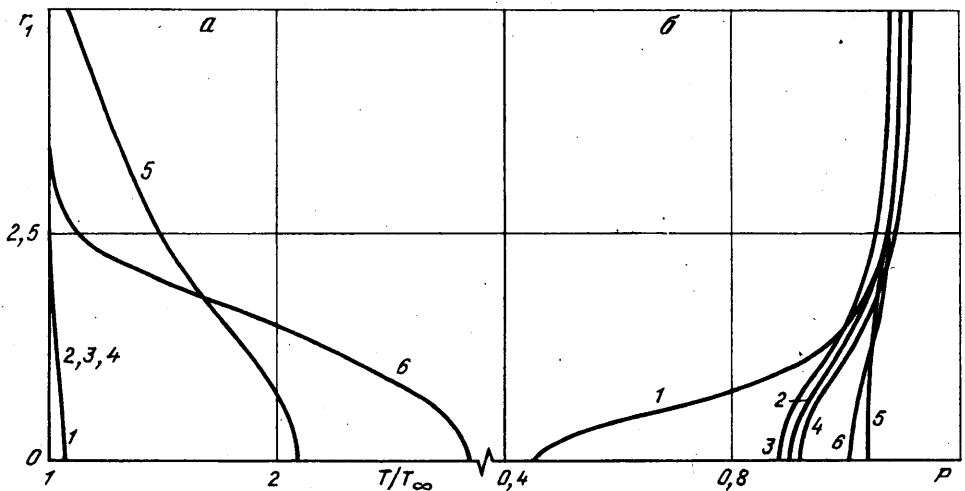
Известно, что градиент давления во внешнем потоке способствует более раннему разрушению вихревого течения при $dP_e/dx > 0$, и, наоборот, его затягиванию, если $dP_e/dx < 0$. Однако даже при $dP_e/dx < 0$ диффузия завихренности и перестройка профилей скорости приводят к появлению неблагоприятного градиента давления вблизи оси вихря. Это вызывает торможение потока, уменьшение V_x и изменение величины циркуляции окружающей скорости V_φ вблизи оси вихря, что может приводить к разрушению вихря. Детальное рассмотрение динамики завихренности внутри вихревой нити в несжимаемой жидкости проведено в [17].

Численные результаты показывают, что в некотором сечении $x = x_0$ в решении параболической системы уравнений, описывающей течение в вихревой области, может появиться особенность [18-21], аналогичная особенностям в точке отрыва пограничного слоя. Однако в случае закрученного течения это происходит при $V_x > 0$ на оси симметрии вихря. Решение параболической системы уравнений в этом случае не удастся продолжить за особую точку.

Рассмотрим динамику развития вязкого вихревого течения струйного типа с $\alpha = 0,2$ и "циркуляцией" окружной скорости $V_{\varphi 1c} = V_{\varphi 1e} = 0,04 Re^{1/2}$. Краевые условия на внешней границе вязкого ядра вихря $r_1 \rightarrow \infty$ при расчетах задавались на конечном расстоянии от оси вихря $r_1 = r_e = 17$, что позволяло получить численные решения задачи (1.2) вплоть до координаты $x_1 = 1-2$ без видимого влияния величины r_e на профили скорости, давления и энтальпии в вязкой области течения.

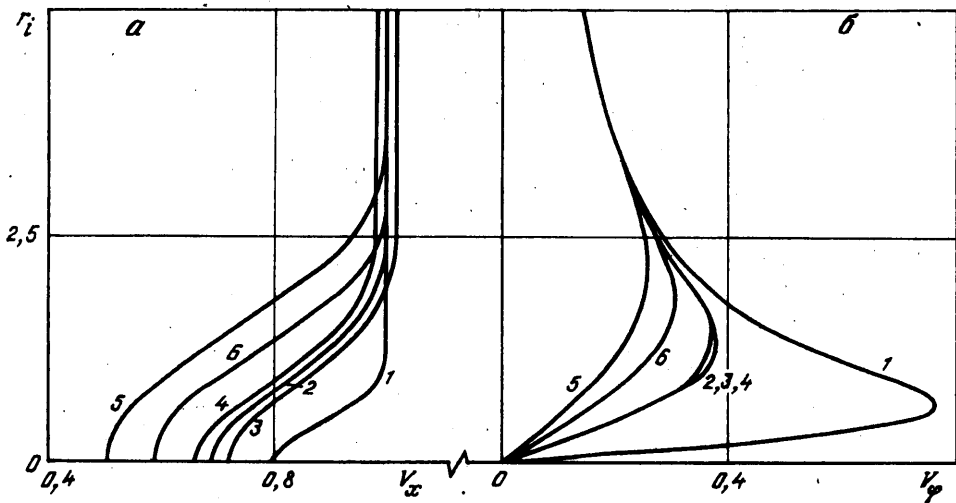


Фиг. 1. Распределения продольной V_x (а) и окружной v_ϕ (б) составляющих скорости в вихре струйного типа. Кривая 1 соответствует начальному сечению $x = 0$. В сечении $x = 0,2$ кривые 2-4 - $dM = 0$ и $\pm 0,08$, кривые 5, 6 - подводу тепла с параметрами $Q_{V0} = 10^4$; $r_q = 0,25 r_e$ и $Q_{V0} = 2 \cdot 10^4$, $r_q = 0,1 r_e$



Фиг. 2. Распределения температуры (а) и давления (б) поперек ядра вихря струйного типа. Значения параметров указаны на фиг. 1

Для выбранного распределения начальных параметров (продольной и окружной составляющей скорости и температуры) проведены расчеты для пяти различных типов закрученных течений: безградиентного течения, двух типов градиентных течений без подвода энергии и двух типов безградиентных течений с объемным подводом тепла вблизи ядра вихря. Для градиентных течений распределения составляющей скорости V_x , энтальпии и давления в невязкой области (вне ядра вихря) определялись по заданному распределению числа Маха спутного потока $M_e(x_1)$, которое изменялось по линейному закону $M_e(x_1) = M_{e0} + dM(x_1 - x_0)$, где $M_{e0} = 0,8$, $dM = \pm 0,08$. При расчетах течений с подводом энергии источник член в уравнении энергии задавался в области подвода энергии в поток $x_1 < x < x_e$ в виде



Фиг. 3. Распределения продольной V_x (а) и окружной v_ϕ (б) составляющих скорости в ядре вихря следового типа. Кривая 1 соответствует начальному сечению $x = 0$. В сечении $x = 0,2$ кривые 2-4 - $dM = 0$ и $\pm 0,08$, кривые 5, 6 - подводу тепла с параметрами $Q_{V0} = 10^4$, $r_q = 0,25 r_e$ и $Q_{V0} = 10^4$, $r_q = 0,1 r_e$

$$Q(x_1, r_1) = Q_{V0}(x_1 - x_b)(x_e - x_1) \cos\left(\frac{\pi r_1}{2r_q}\right) \quad (2.1)$$

$$x_b \leq x_1 \leq x_e, \quad r_1 \leq r_q, \quad x_b = 0,1, \quad x_e = 0,2$$

Вне области, ограниченной цилиндром, $Q(x_1, r_1) = 0$.

На фиг. 1 приведены распределения продольной $V_x(r_1)$ (а) и окружной $v_\phi = v_{\phi 1} = V_{\phi 1}/r_1$ (б) составляющих скорости для безградиентного течения, двух типов градиентных течений и двух случаев с подводом тепловой энергии вблизи ядра вихря для указанных на фигуре параметров. В сечении $x_1 = 0,2$ профили окружной составляющей скорости для безградиентного и градиентных течений с $dM = \pm 0,08$ практически совпадают.

На фиг. 2 приведены соответствующие описанным выше типам течений распределения температуры (а) и давления (б) поперек ядра вихря.

Приведенные результаты показывают, что даже при $dP_e/dx < 0$ благодаря интенсивной диссипации завихренности в начале области вязкого течения вблизи оси вихря создается значительный неблагоприятный градиент давления, что приводит к быстрому росту давления на оси вихря в направлении основного потока (фиг. 2, б) и, как следствие этого, к интенсивному торможению вязкого течения и быстрому уменьшению V_x на оси вихря (фиг. 1, а).

Подвод тепловой энергии в поток вблизи оси вихря приводит к значительному увеличению неблагоприятного градиента давления в этой области даже при $dP_e/dx > 0$, вызывая интенсивное торможение потока и быстрое уменьшение V_x вблизи оси вихря. В случае $dP_e/dx > 0$ подвод тепла приводит к более резкому торможению течения вблизи оси вихря. Таким образом, объемный подвод тепла может оказывать при определенных условиях даже более сильное влияние на формирование завихренного течения и распределение скоростей поперек вихря, чем градиент давления во внешнем невязком потоке, который в обычных условиях считается одним из наиболее важных механизмов, вызывающих разрушение вихря [1-8, 18-21].

Расчеты завихренных течений типа следа с дефицитом продольной составляющей скорости были выполнены для $\alpha = -0,2$ при величине циркуляции окружной скорости в невязком потоке $V_{\phi 1c} = 0,04 Re^{1/2}$. На фиг. 3 приведены распределения $V_x(a)$ и $v_\phi(b)$ для безградиентного потока, двух течений с заданным внешним градиентом давления и двух случаев подвода энергии в поток.

Совпадение кривых 2–4 на фиг. 3,б показывает слабое влияние малых градиентов давления во внешнем окружающем вихрь потоке на распределение v_ϕ поперек вязкой области. Кривые 5 и 6 иллюстрируют влияние подвода тепла вблизи оси вихря с указанными выше параметрами на окружную скорость v_ϕ .

Результаты расчетов показывают, что для течения типа следа диссипация завихренности также приводит к появлению неблагоприятного градиента давления вблизи оси вихря и интенсивному торможению потока, которое усиливается при объемном подводе энергии в поток. Благодаря наличию дефицита продольной скорости в начальном сечении начальное интенсивное торможение газа, вызванное неблагоприятным градиентом давления, приводит к относительно более быстрому уменьшению V_x вблизи оси, чем для течений струйного типа. Такое поведение профилей V_x вблизи ядра вихря может инициировать более раннее появление особенности, указывающей на возможность разрушения завихренного течения.

Действительно, уже для параметров $Q_{v0} \geq 1,4 \cdot 10^4$, $r_q = 0,1 r_e$ в области нагрева появляется особая точка, при подходе к которой численное решение системы уравнений (1.2) начинает расходиться, а ниже по течению от этой точки решение не может быть получено в рамках используемой в данной работе модели течения. Можно предполагать, что поведение завихренного течения в вязком теплопроводном газе в смысле появления особой точки в вязкой области течения аналогично поведению завихренного течения в несжимаемой жидкости, где в решении соответствующих уравнений также появляется особая точка, которая может быть отождествлена с точкой разрушения вихря [16–21].

Заключение. Подвод тепла к завихренным трехмерным течениям в спутных дозвуковых потоках, начальные профили скорости которых соответствуют либо струйному, либо следовому типу с дефицитом продольной скорости может приводить к существенной перестройке течения, усилить неблагоприятный градиент давления вдоль оси вихря, оказывать существенное влияние на распределения продольной v_x и окружной v_ϕ составляющих скорости. Изменение v_ϕ за счет подвода тепла вблизи оси вихря оказывается даже более значительным, чем соответствующее перераспределение v_ϕ , вызванное неблагоприятным градиентом давления во внешнем невязком потоке. Перестройка профилей окружной составляющей скорости, связанная с объемным подводом энергии, в свою очередь может приводить к дальнейшему увеличению неблагоприятного продольного градиента давления в области оси вихря и торможению потока.

При интенсивной закрутке вязкая диссипация и соответствующая перестройка профилей скорости даже при $dP_e/dx \leq 0$ вызывают вблизи оси вихря значительный неблагоприятный градиент давления и интенсивное торможение потока. Величина v_x на оси при этом оказывается на 20–60% меньше величины продольной скорости в основной части потока, что может, как показывают экспериментальные и расчетные данные [16–21], приводить к разрушению завихренного течения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-00586).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Werle H. Visualisation en tunnel hydrodynamique // Rech. Aeronaut. 1953. № 33. P. 3–7.
2. Hall M.G. Vortex breakdown // Annual. Rev. Fluid Mech. 1972. V. 4. P. 195–218.

3. *Leibovich S.* Vortex stability and breakdown: survey and extension // *AIAA Journal*. 1984. V. 22. № 9. P. 1192–1206.
4. *Escudier M.* Vortex breakdown observations and explanations // *Progr. Aerospace Sci.* 1988. V. 25. № 2. P. 189–229.
5. *Spall R.E., Gatski T.B., Ash R.L.* The structure and dynamic of a bubble-type vortex breakdown // *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A*. 1990. V. 429. № 1877. P. 613–637.
6. *Сычев Вук.В.* Асимптотическая теория разрушения вихря // *Изв. РАН. МЖГ*. 1993. № 3. С. 78–90.
7. *Liu C., Menne S.* Simulation of a three-dimensional vortex breakdown // *AIAA Paper*. 1989. № 1806. 5 p.
8. *Lessen M.R., Singh P.J., Paillet F.* The stability of trailing line vortex: Pt. 1. Inviscid theory // *J. Fluid Mech.* 1974. V. 63. Pt. 4. P. 753–763.
9. *Batchelor G.K.* Axial flow in trailing line vortices // *J. Fluid Mech.* 1964. V. 20. Pt 4. P. 645–658.
10. *Ганонов С.А., Маслов А.А.* Развитие возмущений в сжимаемых потоках. Новосибирск: Наука, 1980. 144 с.
11. *Казаков А.В., Коган М.Н., Купарев В.А.* Об устойчивости дозвукового пограничного слоя при нагреве поверхности плоской пластины вблизи передней кромки // *Изв. АН СССР. МЖГ*. 1985. № 3. С. 68–72.
12. *Казаков А.В., Купарев В.А.* О ламинаризации пограничного слоя на теплоизолированной поверхности при подводе энергии в поток // *Изв. АН СССР. МЖГ*. 1988. № 5. С. 58–61.
13. *Казаков А.В., Коган М.Н.* Устойчивость дозвукового ламинарного пограничного слоя на плоской пластине при объемном подводе энергии // *Изв. АН СССР. МЖГ*. 1988. № 2. С. 62–67.
14. *Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р.* Вычислительная гидромеханика и теплообмен. Т. 2. М.: Мир, 1990. 726 с.
15. *Menne S.* Vortex breakdown in axisymmetric flow // *AIAA Paper* 1988. № 0506. 9 p.
16. *Menne S.* Simulation of Vortex Breakdown in Tubes // *AIAA Paper* 1988. № 3573. 12 p.
17. *Brown G.L., Lopez J.M.* Axisymmetric vortex breakdown. Pt 2. Physical mechanisms // *J. Fluid Mech.* 1990. V. 221. P. 553–576.
18. *Hall M.G.* A new approach to vortex breakdown // *Proc. Heat Transfer and Fluid Mech. Inst. San Diego-La Jolla, Calif.* 1967. Stanford, Calif.: Univ. Press, 1967. P. 319–340.
19. *Reyna L.G., Menne S.* Numerical prediction of flow in slender vortices // *Comput. and Fluids*. 1988. V. 16. № 3. P. 239–256.
20. *Тригуб В.Н.* К вопросу о разрушении вихревой нити // *ПММ*. 1985. Т. 49. Вып. 2. С. 220–226.
21. *Benjamin T.B.* Theory of the vortex breakdown phenomenon // *J. Fluid Mech.* 1962. V. 14. Pt 4. P. 593–629.

Москва

Поступила в редакцию
15.IV.1997