

УДК 532.5.013.4

© 1998 г. А.Е. ДУБИНОВ, С.А. САДОВОЙ, В.Д. СЕЛЕМИР

## ФРАКТАЛЬНАЯ ЭВОЛЮЦИЯ ГРАНИЦ В ФИЗИЧЕСКИХ НЕУСТОЙЧИВОСТЯХ

Предложена универсальная процедура теоретического определения эволюции фрактальной размерности негладких границ на линейной стадии физических неустойчивостей с использованием известного закона дисперсии ее инкремента. Исследованы неустойчивость тонкого жидкого слоя по отношению к разбиению на отдельные струи, неустойчивость типа Рэлея – Тейлора и плазменные неустойчивости типа Вейбеля. Показано, что для неустойчивости типа Рэлея – Тейлора фрактальная размерность границы растет, а при неустойчивости тонкого жидкого слоя – убывает.

При теоретическом исследовании эволюции границ в различных гидродинамических и плазменных неустойчивостях (например, границ раздела течений с разными скоростями в неустойчивости Кельвина – Гельмгольца, раздела разноплотных жидкостей в неустойчивости Рэлея – Тейлора, плазмы в неустойчивости Вейбеля, электронной концентрации в плазме на фоне положительных ионов в неустойчивости Бунемана и т.д.) обычно поступают следующим образом: накладывают на стационарные границы гармоническое возмущение и следят за его эволюцией. В ряде случаев начальное возмущение выбирают в виде пространственно-локализованных регулярных границ типа одиночных "горба" или "ямки" [1, 2], но эволюция этих границ сводится к эволюции сумм их гармонических составляющих.

Кратко рассмотрим типовую эволюцию гармонического возмущения, которая, как правило, имеет несколько стадий. Первая стадия – линейная, характеризующаяся экспоненциальным ростом амплитуды возмущения; затем наступает нелинейная стадия, в течение которой в возмущенной границе появляются новые гармоники. Говорят, что здесь происходит взаимодействие гармоник.

Далее в ряде точек границы формируются изломы, число таких точек быстро растет, их становится несчетное количество, поэтому граница становится всюду недифференцируемой. Говорят, что на этой стадии происходит потеря гладкости границы.

Заключительная стадия эволюции характеризуется потерей связности границы с образованием разрывов, например плазмы в неустойчивости Вейбеля и отдельных "пузырьков" фаз в неустойчивости Рэлея – Тейлора. Для полноты картины укажем, что в неустойчивостях типа Рэлея – Тейлора могут появляться грибообразные струи (потеря однозначности функции, описывающей границу). И заканчивается вся эволюция полным перемешиванием фаз.

Аналитически хорошо исследованы лишь гладкие стадии неустойчивостей. Более поздние стадии удастся проследить лишь при полномасштабном компьютерном моделировании, хотя именно они в большей мере ответственны за срыв, например, процесса сжатия мишеней в лазерном термоядерном синтезе [3] или магнитной кумуляции [4].

Существует и другая постановка задачи о развитии неустойчивостей: малое начальное возмущение вследствие флуктуаций в реальной физической ситуации ближе всего к изначально всюду негладкому. Таким образом, важным представляется исследование эволюции границы для всюду негладкой стадии развития неустой-

чивости, причем в последней постановке оправданным можно считать исследование в рамках линейного подхода.

В [5] экспериментально определялась эволюция фрактальной размерности поверхности нагретой капли жидкости *n*-гептана в объеме той же жидкости с более низкой температурой. Здесь фрактальная размерность поверхности раздела является числовой мерой степени ее негладкости.

В данной работе предложена достаточно общая процедура теоретического определения эволюции фрактальной размерности негладких границ на линейной стадии физических неустойчивостей с использованием известного закона дисперсии ее инкремента  $\gamma(k)$ , где *k* – волновое число.

Начальное возмущение будем задавать в виде всюду негладкой функции Вейерштрасса – Мандельброта

$$f_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} q^{-na} \cos(q^n x) \quad (1)$$

Здесь  $q > 1$  – целое число,  $0 < a < 1$ . Фрактальная клеточная размерность функции  $f_0(x)$  равна  $2-a$  [6, 7].

Для исследования эволюции фрактальной функции рассмотрим

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp[\gamma(q^n)t] q^{-na} \cos(q^n x). \quad (2)$$

Для двух модельных неустойчивостей с дисперсией инкрементов в виде

$$\gamma(k) = \text{const} = b \quad (3)$$

$$\gamma(k) = \Omega \ln kh \quad (4)$$

рассмотрение удастся провести аналитически, переписав  $f(x, t)$  для (3) и (4) соответственно

$$f(x, t) = \exp(bt) \sum_{n=1}^{\infty} q^{-na} \cos(q^n x), \quad f(x, t) = h^{\Omega t} \sum_{n=1}^{\infty} q^{-n(a-\Omega t)} \cos(q^n x)$$

из чего легко заключить, что в этих случаях фрактальная размерность *D* границ постоянна для (3) и растет линейно по времени для (4).

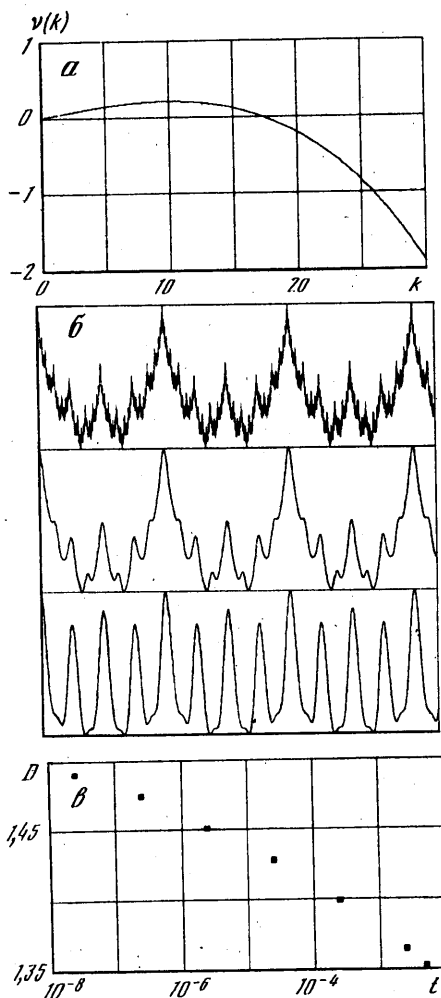
В общем случае эволюцию фрактальной размерности можно исследовать лишь численно. Для этого рассчитывалась фрактальная клеточная размерность границы (2) в различные моменты времени по методике, описанной в [6, 8]. Вкратце методика расчета фрактальной клеточной размерности заключается в следующем. Функция, описывающая профиль границы и представленная в виде числового массива, вычислительным образом покрывалась множеством квадратов (число квадратов варьировалось от  $10^2$  до  $10^6$ ) со стороны  $\eta$  и подсчитывалось число квадратов  $N(\eta)$ , через которые проходит граница. Тогда фрактальная клеточная размерность границы есть угловой коэффициент графика  $\lg N(\eta)$  как функции  $\lg \eta$ . При этом точность вычислений ограничивается только временем счета.

Для анализа были выбраны: 1) неустойчивости с инкрементами (3) и (4) в качестве тестов; 2) неустойчивость тонкого жидкого слоя по отношению к разбиению на отдельные струи; 3) неустойчивость границы тонкого слоя тяжелой несжимаемой жидкости, ускоряемой легкой жидкостью.

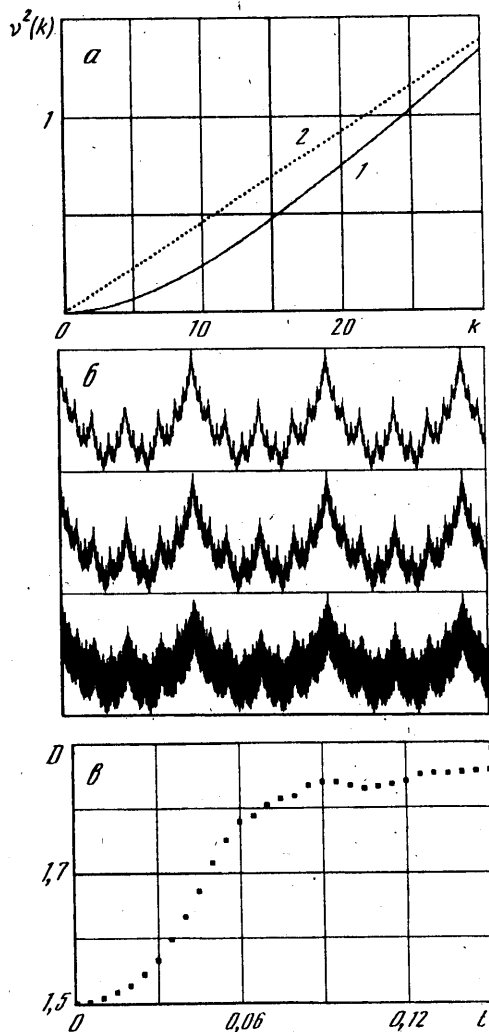
Теория второй неустойчивости разработана в [9–11], ее инкремент с точностью до числовых множителей имеет закон дисперсии

$$\gamma(k) = \frac{kh}{24\mu} \left[ \frac{A}{\pi h^2} - \sigma k^2 h^2 \right] \quad (5)$$

которая развивается лишь для длинноволновых возмущений и затухает для коротковолновых (фиг. 1, а). Заметим, что слабая электронная неустойчивость Вейбеля и шланговая неустойчивость в плазме имеют близкие к (5) зависимости [12]. Третья



Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 1. Результаты расчетов для неустойчивости тонкого слоя жидкости по отношению к разбиению на струи:

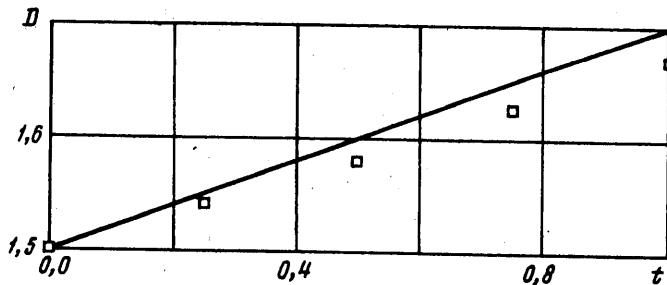
*a* – дисперсионная зависимость  $\gamma(k)$  инкремента, вычисленная по формуле (7), *б* – эволюция профиля, *в* – динамика фрактальной размерности профиля.<sup>1</sup>

Фиг. 2. Результаты расчетов для неустойчивости типа Рэля – Тейлора: *a* – дисперсионная зависимость  $\gamma^2(k)$  инкремента, вычисленная по формуле (8) (пунктиром показана асимптота), *б* – эволюция профиля, *в* – динамика фрактальной размерности профиля

неустойчивость – коротковолновая (фиг. 2, *a*) – родственна неустойчивости Рэля – Тейлора. Она возникает, например, при ускорении тонких металлических фольг мощным лазерным излучением [13]. Ее инкремент можно записать в виде

$$\gamma^2(k) = \frac{kg(1-\eta)}{1+\eta \coth(kh)}. \quad (6)$$

<sup>1</sup> На фиг. 1 и 2 по оси абсцисс  $v(k)$  и  $v^2(k)$  следует читать как  $\gamma(k)$  и  $\gamma^2(k)$ .



Фиг. 3. Результаты тестового расчета эволюции фрактальной размерности профиля для неустойчивости с логарифмической дисперсией в виде формулы (4) (сплошная прямая – точное значение)

Ниже приведены результаты расчетов для следующих числовых значений:  $A = 1,75$ ,  $h = 0,5$ ,  $\sigma = 0,03$ ,  $\mu = 1,5$  для неустойчивости (5) и  $h = 0,03$ ,  $g = 1$ ,  $\eta = 0,9$  – для (6). В обоих этих случаях, а также для тестовых примеров принято  $q = 2$ , начальная фрактальная размерность  $D = 2 - a = 1,5$ , а число членов ряда ограничено 11 слагаемыми. В этом случае для неустойчивости (5) нарастали лишь четыре низшие гармоники, а гармоники более высокого порядка затухали.

Различные стадии эволюции границы при неустойчивости (5) показаны на фиг. 1, б, а для неустойчивости (6) – на фиг. 2, б. Динамика фрактальной размерности этих границ рассчитана и показана соответственно на фиг. 1, в и 2, в.

Как и ожидалось, для (5) граница на малых масштабах длин сглаживается, что ведет за собой уменьшение фрактальной размерности границы. При этом в росте выделяется гармоника, соответствующая максимуму инкремента  $\gamma(k)$ . По-видимому, этим объясняется примерно одинаковое расстояние между сосульками, свисающими с края наклонной плоской крыши при таянии снега или льда.

Для неустойчивости (6) величина фрактальной размерности растет, а затем выходит на насыщение при значении примерно 1,8. Такое ее поведение практически точно совпадает с результатами измерений в [5].

Расчитанная динамика фрактальных размерностей для тестовых примеров (3) и (4) хорошо согласуется с аналитическими предсказаниями. Для тестового примера (4) рост фрактальной размерности показан на фиг. 3.

**Заключение.** Предложенная в данной работе методика исследования эволюции негладких границ в различных физических неустойчивостях на их линейных стадиях является универсальной.

Идея рассмотреть неустойчивость тонкого жидкого слоя по отношению к разбеганию на отдельные струи рекомендована В.И. Карелиным, за что авторы приносят ему искреннюю благодарность.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Трубников Б.А., Жданов С.К. Квазигазовые неустойчивые среды. М.: Наука, 1991. 174 с.
2. Михайловский А.Б. Теория плазменных неустойчивостей. М.: Атомиздат, 1971. Т. 1. 294 с.; 1979. Т. 2. 312 с.
3. Дюдерштадт Д.Д., Мозес Г.А. Инерциальный термоядерный синтез. М.: Энергоатомиздат, 1984. 301 с.
4. Павловский А.И., Колокольчиков Н.П., Долотенко М.И. и др. Исследование динамики схлопывания оболочки магнитокумулятивного генератора сверхсильных магнитных полей // Сверхсильные магнитные поля: физика, техника, применение. М.: Наука, 1984. С. 14–18.
5. Сыромятников С.Н. Фрактальные свойства поверхности нагретой капли // Теплофизика высоких температур. 1994. Т. 32. № 4. С. 433–435.
6. Федер Е. Фракталы. М.: Мир, 1991. 260 с.

7. Дубинов А.Е., Селемир В.Д. Обобщенные волновые уравнения для описания динамики электромагнитных волн в стационарных фрактальных средах // Фракталы в прикладной физике / Под ред. Дубинова А.Е. Арзамас-16: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 1995. С. 5–19.
8. Бонюшкин Е.К., Завада Н.И., Платонова Л.А. и др. Фрактальная природа процесса динамического разрушения // Фракталы в прикладной физике / Под ред. Дубинова А.Е. Арзамас-16: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 1995. С. 123–174.
9. Prevost M., Gallez D. Nonlinear rupture of thin free liquid films // J. Chem. Phys. 1986. V. 84. № 7. P. 4043–4048.
10. Erneux T., Davis S.H. Nonlinear rupture of free films // Phys. Fluids A. 1993. V. 5. № 5. P. 1117–1122.
11. De Wit A., Gallez D., Christov C.I. Nonlinear evolution equations for thin liquid films with insoluble surfactants // Phys. Fluids. 1994. V. 6. № 10. P. 3256–3266.
12. Протасов Ю.С., Чувашев С.Н. Физическая электроника газоразрядных устройств. Т. 2. М.: Высш. шк., 1993. С. 243–734.
13. Remington B.A., Haan S.W., Glendinning S.G. et al. Large growth, planar Rayleigh – Taylor experiments on Nova // Phys. Fluids. B. 1992. V. 4. № 4. P. 967–978.

Саров

Поступила в редакцию  
6.III.1997