

УДК 532.517.4:536.25

© 1998 г. С.А. ЛОЖКИН, П.Г. ФРИК

## ИНЕРЦИОННЫЙ ИНТЕРВАЛ ОБУХОВА – БОЛДЖИАНО В КАСКАДНЫХ МОДЕЛЯХ КОНВЕКТИВНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Рассмотрена каскадная модель развитой конвективной турбулентности несжимаемой жидкости. Численно исследованы режимы, возникающие при больших числах Рэлея в случае трех- и двухмерного движения. Показано, что в модели трехмерной турбулентной конвекции на больших масштабах возникает инерционный интервал Обухова – Болджиано, но он неустойчив и сменяется колмогоровским режимом, в котором температура ведет себя как пассивная примесь. В модели двухмерной турбулентной конвекции обнаружен конечный интервал масштабов, в котором силы плавучести определяют характер пульсаций, но устанавливающиеся спектральные законы отличны от тех, которые следуют из соображений размерности для интервала Обухова – Болджиано.

На специфику развитой турбулентности в среде с неоднородной плотностью, связанную с существенным влиянием архимедовых сил на динамику инерционного интервала, впервые указано в [1, 2]. В [1] показано существование граничного масштаба, при превышении которого колмогоровский каскад может быть подавлен притоком энергии за счет сил Архимеда. Для устойчиво стратифицированной среды, в которой, наоборот, кинетическая энергия трансформируется в потенциальную, на основе анализа размерностей в [2] получен вид спектральных законов для кинетической энергии и энергии пульсаций температуры в конвективном интервале ( $E_v(k) \sim k^{-11/5}$ ,  $E_t(k) \sim k^{-7/5}$ ).

Вопрос о реализуемости этих законов в природных и лабораторных течениях не получил однозначного ответа. Сравним, например, спектр пульсаций температуры в атмосфере [3, рис. 80], который аппроксимируется законом Колмогорова, и данные лабораторных экспериментов [4, рис. 4.10], в которых выделен интервал Обухова. Оба графика подобны и характеризуются изменяющимся наклоном без четкой границы между крупно- и мелкомасштабными частями спектра, что дает свободу для интерпретаций.

Находит своих сторонников и точка зрения, согласно которой силы плавучести не влияют на структуру развитой конвективной турбулентности вдали от пограничных слоев (см., например, [5]). По этой версии, температура ведет себя как пассивная примесь и в системе устанавливается колмогоровский каскад со степенным законом  $-5/3$  для спектров пульсаций как скорости, так и температуры.

Результаты лабораторных экспериментов достаточно противоречивы. В экспериментах с жидким гелием [6] и водой [7] для температурных пульсаций получен закон  $-7/5$ , а в [8] описан эксперимент по конвекции в ртути, где определен закон Колмогорова распределения энергии по спектру. Отметим, что все измерения касаются спектра пульсаций температуры, для которого различия между колмогоровским и обуховским режимами менее выражены, чем для спектра пульсаций скорости.

Самым простым и часто достаточно эффективным средством изучения спектральных свойств развитой турбулентности являются каскадные модели, позволяющие

рассмотреть широкий интервал масштабов с помощью динамической системы относительно небольшой размерности [4,9]. Уже в первых работах по каскадным моделям конвективной турбулентности указывалось на появление решений, соответствующих законам "-11/5" и "-7/5" [4, 10, 11]. Однако ограниченные возможности вычислительной техники позволяли реализовать лишь короткие временные ряды для относительно узкого интервала волновых чисел. В подробном исследовании конвективной турбулентности в каскадной модели [12] режим Обухова – Болджиано удалось получить только в модели, в которой искусственным образом навязывался обратный спектральный каскад кинетической энергии (подчеркнем, не в двухмерных, а в обычных трехмерных течениях, для которых нет физических аргументов для появления обратного каскада). Во всех остальных случаях получались распределения, близкие к закону "-5/3".

Все это послужило основанием для того, чтобы вернуться к вопросу о реализуемости в каскадных моделях турбулентной конвекции решений, соответствующих режиму Обухова – Болджиано.

**1. Турбулентная конвекция.** Рассматриваются течения, описываемые в рамках приближения Буссинеска для термогравитационной конвекции несжимаемой жидкости. Уравнения движения в безразмерной форме имеют вид

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla P + \text{Gr}^{-1/2} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{e} T$$

$$\partial_t T + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \sigma^{-1} \text{Gr}^{-1/2} \Delta T, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

Здесь  $\mathbf{u}$  – скорость,  $P$  – давление,  $T$  – температура,  $\mathbf{e}$  – единичный вектор вдоль вертикальной оси,  $\text{Gr} = g\beta L^3 T^* \nu^{-2}$  – число Грассгофа,  $\sigma = \nu/\chi$  – число Прандтля,  $\nu$  – кинематическая вязкость,  $\chi$  – теплопроводность. В качестве единиц измерений выбраны: макромасштаб  $L$ , характерная для него разность температуры  $T^*$ , скорость  $V = (g\beta L T^*)^{1/2}$  и время  $t = L/V$ . Тогда число Грассгофа связано с числом Рейнольдса:  $\text{Gr} = V^2 L^2 \nu^{-2} = \text{Re}^2$ .

В случае, когда единственной причиной движения являются неоднородности температуры, а малые значения вязкости и теплопроводности позволяют развиваться инерционному интервалу, простые соображения размерности, следуя Колмогорову, позволяют предсказать спектральные законы для пульсаций скорости и температуры. Спектральный поток кинетической энергии, который в случае колмогоровской турбулентности пронизывает все масштабы и равен скорости диссипации энергии  $\epsilon$ , в конвективной турбулентности перестает быть константой, так как силы плавучести приводят к обмену энергией в каждом масштабе. В то же время сохраняющейся величиной становится поток энергии пульсаций температуры  $\epsilon_t$ , который на масштабе  $l$  есть  $\delta T_l^2 / t_l$  (характерное время переноса  $t_l = l/\delta v_l$ ). Постоянство  $\epsilon_t$  дает для характерных пульсаций скорости  $\delta v_l$  и пульсаций температуры  $\delta T_l$  на расстоянии  $l$  ( $L \gg l \gg l_\nu, l_\chi$ ) оценку

$$\delta T_l^2 \delta v_l \sim l \quad (1.1)$$

Предположение, что динамика конвективного интервала определяется помасштабным балансом нелинейного члена и члена, описывающего архимедовы силы в уравнении для скорости, приводит к соотношению

$$\frac{\delta v_l^2}{l} \sim \delta T_l \quad (1.2)$$

Комбинируя (1.2) и (1.1), для инерционного интервала Обухова – Болджиано получают оценки

$$\delta v_l \sim l^{3/5}, \quad \delta T_l \sim l^{1/5}$$

соответствующие спектральным законам

$$E_v(k) \sim k^{-11/5}, \quad E_t(k) \sim k^{-7/5} \quad (1.3)$$

Появление инерционного интервала с законами (1.3) можно ожидать, когда масштабы вязкой диссипации  $l_v$  и тепловой диффузии  $l_\chi$  много меньше макромасштаба  $L$ . Однако и в пределе бесконечно малых  $v$  и  $\chi$  интервал (1.3) не растет неограниченно. Обмен энергией за счет архимедовых сил падает по мере уменьшения масштаба пропорционально  $l^{4/5}$  и на масштабе  $l_b = (g\beta)^{-3/2} \epsilon^{5/4} \epsilon_t^{-3/4}$  (часто называемом масштабом Болджиано) возникает ситуация, когда обычный каскадный перенос становится эффективнее термогравитационной конвекции и в турбулентном потоке устанавливается колмогоровский спектр.

**2. Каскадные модели.** Эти модели появились как попытка описать процессы спектрального переноса в развитой турбулентности с помощью небольшого числа переменных  $U_n$ , каждая из которых является коллективной характеристикой амплитуд пульсаций поля скорости в целой октаве волновых чисел  $2^n < |k| < 2^{n+1}$ . Уравнения для  $U_n$  должны воспроизводить базовые свойства уравнений Навье – Стокса, а именно иметь по меньшей мере те же интегралы движения и тот же вид нелинейности. Каскадные модели, используемые начиная с 70-х годов [13–16], стали особенно активно исследоваться в 90-х (например, [17–20]), после того как было показано, что они воспроизводят поведение структурных функций высших порядков в реальной турбулентности [21]. Наиболее активно применяется модель Gledzer, Ohkitani, Yamada, которая может быть записана для комплексных переменных  $U_n$  в виде [19]

$$d_t U_n = ik_n \left\{ \bar{U}_{n+1} \bar{U}_{n+2} - \frac{\eta}{2} \bar{U}_{n-1} \bar{U}_{n+1} - \frac{(1-\eta)}{4} \bar{U}_{n-2} U_{n-1} \right\} - \text{Re}^{-1} k_n^2 U_n + f_n \quad (2.1)$$

где  $\text{Re}$  – число Рейнольдса,  $k_n = k_0 2^n$  – волновое число, а  $\eta$  – параметр модели.

Уравнения (2.1) в пределе  $\text{Re} \rightarrow \infty, f_n \rightarrow 0$  удовлетворяют двум законам сохранения. При любом значении  $\eta$  система сохраняет энергию

$$E = \sum_n |U_n|^2$$

и величину, зависящую от параметра  $\eta$ , которую запишем в виде [22]

$$H = \sum_n (\text{sign}(\eta - 1))^n k_n^{\alpha(\eta)} |U_n|^2 \quad (2.2)$$

где  $\alpha(\eta) = -\log_2(|\eta - 1|/2)$ . При  $\eta > 1$   $\text{sign}(\eta - 1) = 1$  и сохраняется положительно определенная квадратичная величина, которую можно назвать обобщенной энтропией. Если  $\eta < 1$ , то  $\text{sign}(\eta - 1) = -1$  и сохраняемая величина имеет произвольный знак, являясь интегралом типа обобщенной спиральности.

Двум законам сохранения отвечают и два стационарных решения: колмогоровского типа с постоянным потоком энергии ( $U_n = k_n^{-1/3} g_1(n)$ ) и с нулевым потоком энергии ( $U_n = k_n^{\gamma(\eta)} g_2(n)$ , где  $g_1(n), g_2(n)$  – произвольные функции с периодом три,  $\gamma = (\log(|\eta - 1|/2))/3$ ) [19].

Ниже рассматриваются два случая, соответствующие трех- и двумерным уравнениям Навье – Стокса: 1)  $\eta = 1/2$ ;  $\alpha = 1$  и  $\text{sign}(\eta - 1) = -1$ ; 2)  $\eta = 5/4$ ;  $\alpha = 2$  и  $\text{sign}(\eta - 1) = 1$ . Интегралами движения в первом случае являются энергия и спиральность [22] (размерность интеграла (2.2) совпадает с размерностью спиральности, являющейся сохраняемой величиной в трехмерной гидродинамике несжимаемой жидкости). Это наиболее исследуемый случай, рассматриваемый как аналог изотропной трехмерной турбулентности (см., например, [17, 18, 21]); во втором – энергия и величина

$\sum k_n^2 U_n^2$ , являющаяся аналогом энстрофии в двухмерной турбулентности. Соответствующие решения ( $U_n \sim k_n^{-1/3}$  и  $U_n \sim k_n^{-1}$ ) отвечают при этом известным для двухмерной турбулентности спектральным законам:  $k^{-5/3}$  с обратным каскадом энергии на масштабах, больших масштаба действия внешних сил, и  $k^{-3}$  с прямым каскадом энстрофии на малых масштабах.

Следует указать на два основных качественных отличия каскадных моделей от уравнений Навье – Стокса. Во-первых, это полная потеря информации о пространственном распределении исследуемых случайных полей. Во-вторых, уравнения типа (2.1) описывают только локальные (в  $k$ -пространстве) взаимодействия. Первый недостаток является неизбежной платой за низкую размерность динамической системы, второго можно избежать, оставаясь в рамках каскадных моделей. Впервые модель с нелокальными взаимодействиями построена в [16] для двухмерной турбулентности. Модель для конвективной турбулентности описана в [10], модификация которой использовалась в [23] для изучения спектральных свойств конвективной турбулентности при экстремальных значениях числа Прандтля, когда нелокальные взаимодействия играют принципиальную роль.

**3. Каскадная модель конвективной турбулентности.** Эта модель строится на основе уравнений (2.1), дополненных членом, описывающим действие сил плавучести, и уравнений для пульсаций температуры с той же структурой нелинейных членов

$$d_t U_n = ik_n \left\{ \bar{U}_{n+1} \bar{U}_{n+2} - \frac{\eta}{2} \bar{U}_{n-1} \bar{U}_{n+1} - \frac{(1-\eta)}{4} \bar{U}_{n-2} \bar{U}_{n-1} \right\} - \text{Re}^{-1} k_n^2 U_n + F_n \Theta_n \quad (3.1)$$

$$d_t \Theta_n = ik_n \left\{ \bar{U}_{n+1} \bar{\Theta}_{n+2} + \bar{U}_{n-1} \bar{\Theta}_{n+1} - \frac{1}{2} \bar{U}_{n-2} \bar{\Theta}_{n-1} + \bar{\Theta}_{n+1} \bar{U}_{n+2} - \frac{1}{2} \bar{\Theta}_{n-1} \bar{U}_{n+1} - \frac{1}{4} \bar{\Theta}_{n-2} \bar{U}_{n-1} \right\} - (\sigma \text{Re})^{-1} k_n^2 \Theta_n \quad (3.2)$$

где  $\Theta_n$  – переменные, характеризующие пульсации температуры.

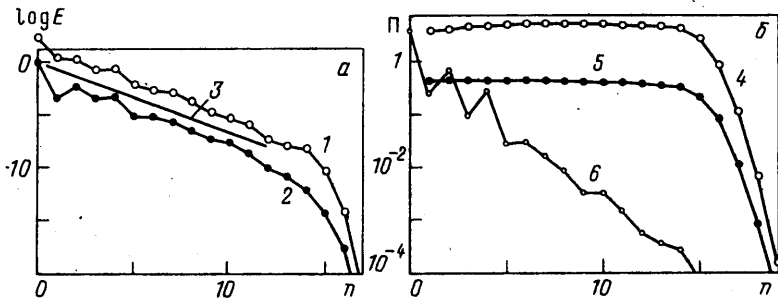
Выбор коэффициентов при нелинейных членах уравнений (3.2) обеспечивает в невязком пределе сохранение энергии пульсаций температуры

$$E_t = \sum_n |\Theta_n|^2$$

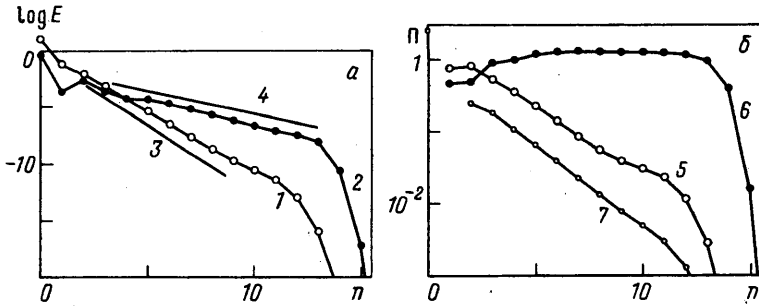
**4. Трехмерная турбулентная конвекция.** Уравнения (3.1)–(3.2) интегрировались численно методом Рунге – Кутты четвертого порядка с постоянным шагом для  $\eta = 0,5$ . Число ярусов было равно 21 ( $0 \leq n \leq 20$ ), число Рейнольдса  $\text{Re} = 10^6$  ( $\text{Gr} = 10^{12}$ ), число Прандтля  $\sigma = 1$ . Равномерный нагрев на макромасштабе моделировался путем поддержания стационарного значения модуля переменной  $|\Theta_0| = 1$ .

Стационарные решения каскадных моделей неустойчивы и спектральные распределения энергии получаются путем осреднения по времени квадратов соответствующих каскадных переменных. На фиг. 1, а представлен стационарный режим, устанавливающийся в модели трехмерной конвективной турбулентности. Показаны значения энергии пульсаций скорости и температуры в отдельных октавах  $E_v(n)$  и  $E_t(n)$ , осредненные по времени в интервале  $100 < t < 1000$ . По оси  $OX$  отложен номер яруса  $n$ , пропорциональный логарифму волнового числа  $k_n$ , а по оси  $OY$  – логарифм энергии. Прямая 3 соответствует колмогоровскому распределению для спектров  $E_v(k)$  и  $E_t(k)$ . Показатель степени для величины  $E(n)$  на единицу больше, чем для самого спектра  $E(k)$ , что связано с принятым делением оси волновых чисел на октавы.

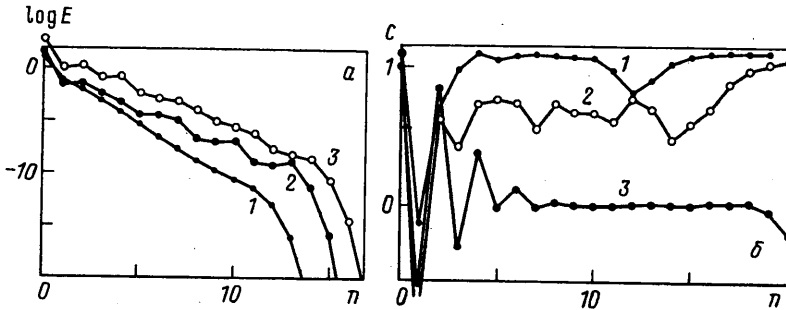
В спектре кинетической энергии устанавливается колмогоровский закон “–5/3”. Энергия пульсаций температуры также распределена по этому закону, что характерно для ситуации, когда температура ведет себя как пассивная примесь. Для



Фиг. 1. Стационарный режим в модели трехмерной турбулентной конвекции: *a* – спектры энергии  $E_v(n)$  (кривая 1),  $E_t(n)$  (2); *b* – спектральные потоки энергии  $\Pi_v$  (4),  $\Pi_t$  (5),  $\Pi_a$  (6)



Фиг. 2. Начальная стадия развития трехмерной турбулентной конвекции: *a* – спектры энергии  $E_v(n)$  (кривая 1),  $E_t(n)$  (2); *b* – спектральные потоки энергии  $\Pi_v$  (5),  $\Pi_t$  (6),  $\Pi_a$  (7)



Фиг. 3. Энергия пульсаций скорости  $E_v(n)$  (*a*) и коэффициент корреляции между пульсациями скорости и температуры  $C(n)$  (*b*) для различных интервалов времени:  $0,5 < t < 0,6$  (кривые 1);  $0,6 < t < 1$  (2);  $2 < t < 50$  (3)

непосредственной проверки гипотез (1.1) и (1.2) на фиг. 1, *b* представлены спектральный поток энергии пульсаций температуры  $\Pi_t$ , поток кинетической энергии  $\Pi_v$ , обеспечиваемый нелинейными членами, и приток энергии в масштаб  $n$  за счет действия сил плавучести  $\Pi_a$ . Можно видеть, что гипотеза (1.2) о постоянстве потока энергии пульсаций температуры  $\Pi_t$  выполняется точно. В то же время гипотеза (1.1) не выполняется, так как во всех масштабах, кроме максимального ( $n = 0$ ), работа сил плавучести  $\Pi_a$  значительно меньше потока энергии по спектру  $\Pi_v$ . Используя значения потоков энергии, можно непосредственно оценить масштаб Болджиано и получить  $l_b \approx 15$ , что соответствует масштабу с номером  $n = -4$ , значительно превосходящему максимальный рассматриваемый масштаб.

Результаты [11], где законы (1.3) обнаружены в каскадной модели с небольшим числом переменных и при сравнительно коротких временах интегрирования, побудили к более тщательному изучению начальной стадии развития системы. Действительно, на фиг. 2, где показаны распределения энергии и потоки, полученные усреднением на временах  $0,5 < t < 0,6$ , удается увидеть режим со спектральными законами  $-11/5$  (прямая 3) и  $-7/5$  (прямая 4). В этом случае работа сил Архимеда  $\Pi_a$  и поток энергии пульсаций скорости  $\Pi_v$  распределены по одному закону, хотя по величине  $\Pi_v > \Pi_a$ . Отметим, что в этом режиме поток пульсаций температуры в несколько раз больше, чем в колмогоровском, а поток кинетической энергии несоизмеримо меньше. В результате и оценка масштаба Болджиано дает величину  $l_b \approx 0,005$ , что соответствует  $n = 8$ .

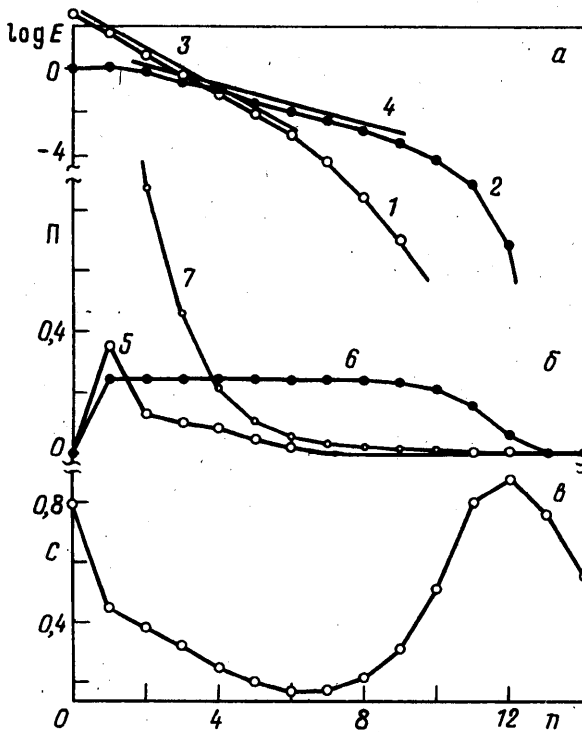
Приток кинетической энергии за счет действия сил Архимеда определяется величиной  $\langle U_n \Theta_n \rangle$ , а это значит, что оценка (1.2) справедлива, только если коэффициент корреляции между пульсациями скорости и температуры  $C(n) = \langle U_n \Theta_n \rangle / (\langle U_n^2 \rangle \langle \Theta_n^2 \rangle)^{1/2}$  не сильно отличается от единицы. На начальной стадии развития системы действительно  $C(n) = 1$  для всех  $n$  (см. фиг. 3, б, на которой показаны значения  $C(n)$  для различных интервалов времени). На поздней стадии существования режима Обухова – Болджиано коррелируемость нарушается на краях интервала и падает с течением времени на протяжении всего спектра. Когда система выходит на колмогоровский режим, коэффициент корреляции сильно осциллирует на крупных масштабах (малые  $n$ ) и практически равен нулю для всех  $n > 5$ .

**5. Двухмерная турбулентная конвекция.** Динамика двухмерных турбулентных потоков качественно отличается от динамики трехмерных течений благодаря наличию дополнительных интегралов движения в невязком пределе. Одновременное сохранение энергии и энтропии (среднего квадрата завихренности) приводит к тому, что эти величины переносятся к противоположным краям спектра и появляются два инерционных интервала [24]: интервал каскадного переноса энтропии к малым масштабам, в котором энергия распределена по закону  $E(k) \sim k^{-3}$ , и интервал обратного каскада энергии к большим масштабам со спектром  $E(k) \sim k^{-5/3}$ . Поскольку энергия не попадает в малые масштабы, где происходит вязкая диссипация, то для получения стационарной ситуации в численных экспериментах по двухмерной турбулентности обычно искусственно вводится дополнительная диссипация кинетической энергии на больших масштабах (в каскадных уравнениях для  $U_n$  дописывается член вида  $-\mu U_n$ ).

Под двухмерной конвекцией понимается течение в вертикальной плоскости (например, рассматривается плоскость  $XOY$ , в которой сила тяжести направлена против оси  $Y$ ). Отметим, что исключение из определяющих параметров спектрального потока энергии  $\epsilon$  делает результаты (1.3) не зависящими от размерности пространства. Следовательно, на масштабах, больших  $l_b$ , можно также ожидать развития интервала Обухова – Болджиано. На меньших масштабах возможно появление обоих интервалов, характерных для двухмерной турбулентности, причем обратный каскад энергии должен блокировать отток энергии к мелким масштабам.

На фиг. 4 показаны результаты интегрирования системы (3.1), (3.2) для  $\eta = 1,25$ ;  $Gr = 10^{11}$ ;  $\sigma = 7,0$ ;  $\mu = 0,3$ ;  $0 \leq n \leq 15$ , осредненные по времени на интервале  $10^3 < t < 10^4$ .

В спектрах на фиг. 4, а выделены участки со степенными законами, для которых методом наименьших квадратов получены наклоны  $-1,93$  (линия 3) и  $-1,46$  (прямая 4) соответственно для энергии пульсаций скорости и температуры. Закон для температуры близок к ожидаемому  $-7/5$ , а для скорости значительно отличается от распределения Болджиано. Анализ потоков энергии свидетельствует о том, что динамика конвективного интервала определяется в значительной степени линейным трением. Именно оно компенсирует приток энергии за счет сил плавучести, который



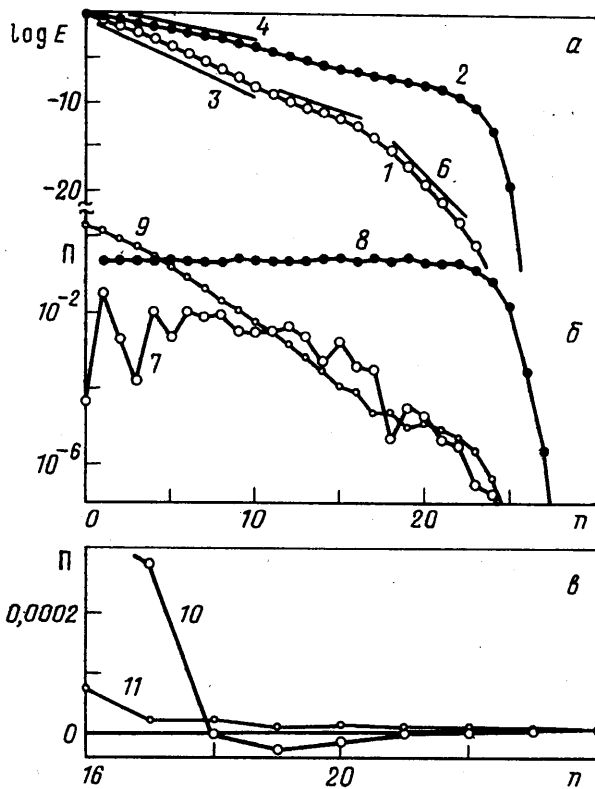
Фиг. 4. Двухмерная турбулентная конвекция: а – спектры энергии  $E_v(n)$  (кривая 1),  $E_t(n)$  (2); б – спектральные потоки энергии  $\Pi_v$  (5),  $\Pi_t$  (6),  $\Pi_a$  (7); в – коэффициент корреляции между пульсациями скорости и температуры  $C(n)$

значительно превосходит нелинейный поток энергии по спектру (фиг. 4, б). Следует отметить, что поток положителен, т.е. направлен в малые масштабы, а коэффициент корреляции между пульсациями скорости и температуры хотя и не столь велик, как в чисто обуховском случае, но все же имеет конечную положительную величину, падая с ростом  $n$  от 0,5 до 0,2 (фиг. 4, в).

Если коэффициент линейного трения  $\mu$  устремить к нулю, то происходит накопление кинетической энергии на больших масштабах (малых  $n$ ), приводящее к установлению спектрального распределения вида  $E(k) \sim k^{-3}$  на всем интервале масштабов от максимального до диссипативного.

Рассмотрим решения, соответствующие двумерной турбулентной конвекции при очень больших числах Грасгофа, когда широкий интервал значений волновых чисел позволяет проследить за формированием спектров по обе стороны от масштаба Болджиано. На фиг. 5 показаны осредненные по времени значения энергии пульсаций скорости и температуры в отдельных октавах  $E_v(n)$  и  $E_t(n)$  для случая  $Gr = 10^{24}$ ,  $\sigma = 1$ ,  $\mu = 1$ . Проведены линии 3–6, соответствующие степенным законам для спектров  $E_v(k)$  и  $E_t(k)$ :  $k^{-1,9}$ ,  $k^{-1,4}$ ,  $k^{-5/3}$ ,  $k^{-3}$ . Качественно картина хорошо описывает ожидаемую спектральную картину для двумерной конвективной турбулентности, хотя наклон спектра пульсаций скорости в конвективном интервале по-прежнему меньше ожидаемых "–11/5". Отметим, что границы различных интервалов более четко выражены в спектре пульсаций скорости. В спектре пульсаций температуры переходы размыты и степенные участки не столь ярко выражены.

Отметим, что описанный численный эксперимент есть первая удачная попытка получения стационарного интервала с законом "–5/3" в каскадных моделях двумерной турбулентности. Инверсный каскад с законом, близким к "–5/3", регист-



Фиг. 5. Двухмерная турбулентная конвекция: а – спектры энергии  $E_v(n)$  (кривая 1),  $E_r(n)$  (2); б, в – спектральные потоки энергии  $\Pi_v$  (кривые 7, 10),  $\Pi_r$  (8),  $\Pi_a$  (9, 11)

рировался в каскадных моделях двухмерной гидродинамической турбулентности при рассмотрении свободной эволюции системы [16], но все попытки получения стационарного интервала с постоянным потоком энергии не дали положительного результата – после накопления некоторой энергии в крупных масштабах (малые  $n$ ) устанавливался режим равномерного распределения энергии между переменными  $U_n$ , соответствующий спектру  $E_v(k) \sim k^{-1}$  [25, 26].

Однако в рассмотренном случае интервал с законом " $-5/3$ " сопровождается слабым ( $\Pi_v \sim 0,005$ ), но прямым каскадом энергии. Следует подчеркнуть, что на фиг. 5, б используется логарифмический масштаб и поэтому приводится модуль потока энергии. На фиг. 5, в фрагмент этих же графиков дается в линейном масштабе для мелко-масштабной части спектра. Видно, что незначительный по величине отрицательный поток кинетической энергии присутствует в спектре, приходясь на пограничную область спектра между участками " $-5/3$ " и " $-3$ ". Используя значение потока энергии для интервала  $8 \leq n \leq 13$ , где он более или менее постоянен, можно получить оценку для масштаба Болдзиано  $l_b \approx 0,0015$ , соответствующего масштабу с номером  $n = 9$ , который приходится на границу конвективного интервала и интервала с законом " $-5/3$ ".

**Заключение.** Рассмотрены модели трех- и двухмерной турбулентной конвекции. В трехмерном случае режим Обухова – Болдзиано возникает, но неустойчив и сменяется колмогоровским, когда сила Архимеда эффективна только в макромасштабе, а во всех остальных температура ведет себя как пассивная примесь. Смена режимов происходит по мере потери коррелированности между каскадными переменными, описывающими пульсации скорости и температуры заданного масштаба.



В двухмерном случае стационарное решение возможно только при введении дополнительной диссипации в больших масштабах. В решении появляется интервал масштабов, в котором существенны силы плавучести, но влияние линейного трения меняет динамику конвективного интервала и приводит к установлению спектральных законов, отличающихся от тех, что следуют из соображений размерности для интервала Обухова – Болджиано.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 94-01-00951а).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Обухов А.М. О влиянии архимедовых сил на структуру температурного поля в турбулентном потоке // Докл. АН СССР. 1959. Т. 125. № 6. С. 1246–1248.
2. *Bolgiano R.* Turbulent spectra in a stably stratified atmosphere // *J. Geophys. Res.* 1959. V. 64. № 12. P. 2226–2229.
3. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Наука, 1967. 720 с.
4. Зимин В.Д., Фрик П.Г. Турбулентная конвекция. М.: Наука, 1988. 173 с.
5. *Siggia E.D.* High Rayleigh number convection. Review // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1994. V. 26. P. 137–168.
6. *Wu X.-Z., Kadanoff L., Libchaber A., Sano M.* Frequency power spectrum of temperature fluctuations in free convection // *Phys. Rev. Lett.* 1990. V. 64. № 18. P. 2140–2143.
7. *Chilla F., Ciliberto S., Innocenti C., Pampaloni E.* Boundary layer and scaling properties in turbulent thermal convection // *Nuovo cim. D.* 1993. V. 15. № 9. P. 1229–1249.
8. *Cioni S., Ciliberto S., Sommeria J.* Temperature structure function in turbulent convection at low Prandtl number // *Europhys. Lett.* 1995. V. 32. № 5. P. 413–418.
9. Гледзер Е.Б., Должанский Ф.В., Обухов А.М. Системы гидродинамического типа и их применение. М.: Наука, 1981. 366 с.
10. Фрик П.Г. Моделирование каскадных процессов в двумерной турбулентной конвекции // ПМТФ. 1986. № 2. С. 71–79.
11. Шайдурова Т.Е. Иерархическая модель турбулентной конвекции: Препринт. Свердловск: Ин-т механики сплошных сред, 1986. 35 с.
12. *Brandenburg A.* Energy spectra in a model for convective turbulence // *Phys. Rev. Lett.* 1992. V. 69. № 4. P. 605–608.
13. Деснянский В.Н., Новиков Е.А. Моделирование каскадных процессов в турбулентных течениях // ПММ. 1974. Т. 38. № 3. С. 507–513.
14. Гледзер Е.Б. Система гидродинамического типа, допускающая два квадратичных интеграла движения // Докл. АН СССР. 1973. Т. 209. № 5. С. 1046–1048.
15. Зимин В.Д. Иерархическая модель турбулентности // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1981. Т. 17. № 12. С. 1265–1273.
16. Фрик П.Г. Иерархическая модель двухмерной турбулентности // Магнитн. гидродинамика. 1983. № 1. С. 60–66.
17. *Jensen M.H., Paladin G., Vulpiani A.* Shell model for turbulent advection of passive scalar fields // *Phys. Rev. A.* 1992. V. 45. № 10. P. 7214–7221.
18. *Pisarenko D., Biferale L., Courvoisier D., Frisch U., Vergassola M.* Further results on multifractality in shell models // *Phys. Fluids A.* 1993. V. 5. № 10. P. 2533–2538.
19. *Biferale L., Lambert A., Lima R., Paladin G.* Transition to chaos in a shell model of turbulence // *Physica D.* 1995. V. 80. № 1–2. P. 105.
20. *Frick P., Dubrulle B., Babiano A.* Scaling properties of a class of shell-models // *Phys. Rev. E.* 1995. V. 51. № 6. Pt A. P. 5582–5593.
21. *Yamada M., Ohkitani K.* The constant of motion and the inertial subrange spectrum in fully-developed model turbulence // *Phys. Lett. A.* 1988. V. 134. № 3. P. 165–169.
22. *Kadanoff L., Lohse D., Wang J., Benzi R.* Scaling and dissipation in the GOY shell model // *Phys. Fluids.* 1995. V. 7. № 3. P. 617–629.

23. Ложкин С.А., Фрик П.Г. Моделирование каскадных процессов в конвективной турбулентности при экстремальных значениях числа Прандтля // Математическое моделирование систем и процессов. 1996. № 4. С. 53–60.
24. Kraichnan R.H. Inertial ranges in two-dimensional turbulence // Phys. Fluids. 1967. V. 10. № 7. P. 1417–1423.
25. Frick P., Aurell E. On spectral laws of 2D turbulence in shell models // Europhys. Lett. 1993. V. 24. № 9. P. 725–730.
26. Aurell E., Boffetta G., Crisanti A., Frick P., Vulpiani A. Statistical mechanics of shell models for two-dimensional turbulence // Phys. Rev. E. 1994. V. 50. № 6. P. 4705–4715.

Пермь

Поступила в редакцию  
12.V.1997