МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 • 1998

УДК 533.6.01

© 1998 г. Н.Д. НИКИТИН

К ВОПРОСУ ОБ УНИВЕРСАЛЬНЫХ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ СООТНОШЕНИЯХ, ВЫТЕКАЮЩИХ ИЗ ТЕОРИИ НЬЮТОНА

В рамках модифицированной теории Ньютона предложен новый, более общий по сравнению с [1], подход к анализу аэродинамических коэффициентов. Выведены универсальные аэродинамические соотношения, аналогичные [1], но легко разрешаемые относительно аэродинамических коэффициентов. Получены универсальные соотношения для площадей проекций "наветренной" зоны на плоскости, перпендикулярные осям прямоугольной системы координат.

В [1] показано, что в рамках модифицированной теории Ньютона [1, 2] коэффициенты аэродинамических сил связаны универсальными (не зависящими от формы тела) дифференциальными соотношениями с такими параметрами, как площади проекций "наветренной" поверхности тела. Если принимать, что направление вектора скорости относительно некоторой прямоугольной системы кооординат XYZ, связанной с телом, определяется углами α и φ так, как это показано на фигуре, то эти соотношения имеют вид

$$12C_{xa} + \operatorname{ctg}\alpha(C_{xa})'_{\alpha} + (C_{xa})''_{\alpha\alpha} + (C_{xa})''_{\varphi\varphi}\sin^{-2}\alpha = 6K^*S_a \tag{0.1}$$

или

$$6\mathbf{C} + \operatorname{ctg}\alpha(\mathbf{C})'_{\alpha} + (\mathbf{C})''_{\alpha\alpha} + (\mathbf{C})''_{\varphi\varphi}\sin^{-2}\alpha = 2K^*\mathbf{S_n} \tag{0.2}$$

$$K^* = K/S^*,\ \mathbf{C} = (C_x, -C_y, -C_z),\ \mathbf{S_n} = (S_x, S_y, S_z)$$

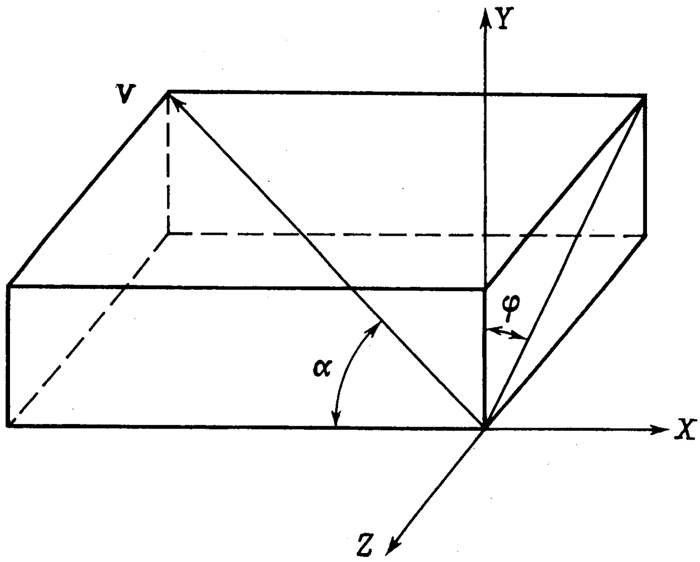
$$S_x = \int_s n_x dS,\ S_y = \int_s n_y dS,\ S_z = \int_s n_z dS$$

$$S_a = \cos\alpha S_x - \sin\alpha\cos\varphi S_y + \sin\alpha\sin\varphi S_z$$

Здесь $C_{x,y,z}$ – коэффициенты аэродинамических сил в связанной системе координат, C_{xa} – коэффициент лобового сопротивления в скоростной системе координат, K – некоторый постоянный множитель (в классическом случае $K = 2$), S^* – характерная площадь, S_a – площадь проекции "наветренной" поверхности тела на плоскость, перпендикулярную набегающему потоку, $S_{x,y,z}$ – площади проекций "наветренной" поверхности тела на плоскости, перпендикулярные соответствующим осям системы координат, $n_{x,y,z}$ – составляющие единичной нормали к поверхности тела $\mathbf{n}$, S – площадь "наветренной" поверхности.

Разработан ряд методов аэродинамического расчета, в которых аэродинамические коэффициенты рассчитывались из этих универсальных соотношений [3–8].

Однако указанные соотношения не позволяют в общем случае достаточно просто (т.е. в удобном для применения виде) выразить аэродинамические коэффициенты, более того, проблема разрешения этих соотношений относительно аэродинамических коэффициентов вылилась фактически в самостоятельную, достаточно сложную задачу.



Углы, определяющие ориентацию тела

В то же время в рамках модифицированной теории Ньютона возможен другой подход, позволяющий получить соотношения, аналогичные рассмотренным, но лишенные их недостатков.

1. В рамках модифицированной теории Ньютона коэффициенты аэродинамических сил в связанной системе координат можно записать в виде

$$\mathbf{C} = K * \sum_{j=0}^{2}(-1)^j C_2^j \cos^{2-j}\alpha \sin^j \alpha \sum_{m=0}^{j}(-1)^m C_j^m \cos^{j-m}\varphi \sin^m \varphi \mathbf{\Phi} \tag{1.1}$$

$$\mathbf{\Phi} = (F_{m,3-j}, F_{m,2-j}, F_{m+1,2-j}),\ F_{i,k} = \int_s n_x^k n_y^{3-i-k} n_z^i dS$$

где C_2^j и C_j^m – биноминальные коэффициенты.

Можно показать, что в условиях ньютонианского обтекания параметры $F_{i,k}$ связаны между собой универсальными (не зависящими от формы тела) дифференциальными соотношениями, записываемыми в обобщенном виде как

$$(F_{i,k})'_\xi = \mathrm{tg}^k\alpha \sum_{j=0}^{k}(-1)^j C_k^j \cos^{k-j}\varphi \sin^j \varphi (F_{i+j,0})'_\xi,\ \xi = (\alpha, \varphi) \tag{1.2}$$

2. Проводя соответствующие операции над уравнениями (1.1) с учетом универсальных соотношений (1.2), можно получить универсальные дифференциальные соотношения между коэффициентами $C_{x,y,z}$ и параметрами $F_{i,k}$ в виде

$$\begin{aligned}&[\mathrm{tg}^{n-p-1}\alpha \sin^2\alpha[(\cos^{2-n}\alpha \sin^n\alpha)^{-1}\mathbf{C}]'_\alpha]'_\alpha = \\ &= K*(-1)^j C_2^j (j-n)(j-p)\mathrm{tg}^{j-p-1}\alpha(\cos^2\alpha)^{-1}\sum_{m=0}^{j}(-1)^m C_j^m \cos^{j-m}\varphi \sin^m\varphi \mathbf{\Phi}\end{aligned} \tag{2.1}$$

где $j = 3-n-p$, причем, $n \neq p$ и $(n, p) = 0, 1, 2$.

В частности, из уравнений (2.1) при $j = 0$ можно получить

$$\begin{aligned}&\mathbf{C} - \frac{1}{2}\sin 2\alpha(\mathbf{C})'_\alpha + \frac{1}{2}\sin^2\alpha(\mathbf{C})''_{\alpha\alpha} = K * \mathbf{\Phi}_0 \\ &\mathbf{\Phi}_0 = (F_{0,3}, F_{0,2}, F_{1,2})\end{aligned} \tag{2.2}$$

Левая часть уравнений (2.2) сворачивается двумя способами

$$K*\Phi_0=\frac{1}{2}\sin^2\alpha[\sin^2\alpha(\sin^2\alpha)^{-1}\mathbf{C})'_\alpha]'_\alpha=\frac{1}{2}\frac{\sin^3\alpha}{\cos\alpha}\left[\cos^2\alpha((\cos\alpha\sin\alpha)^{-1}\mathbf{C})'_\alpha\right]'_\alpha$$

Уравнения (2.2) – аналоги уравнений (0.2), выведенных в рамках подхода [1], но в отличие от них вновь полученные уравнения разрешаются сразу же путем двойного интегрирования по углу α их свернутого вида, а влияние угла φ сказывается лишь косвенным образом через границу "наветренной" поверхности.

3. Для коэффициента лобового сопротивления в скоростной системе координат C_{xa} аналогичным образом можно получить

$$\cos\alpha(1+\frac{1}{2}\sin^2\alpha)C_{xa}-\sin\alpha(1+\frac{1}{6}\sin^2\alpha)(C_{xa})'_\alpha+\frac{1}{2}\cos\alpha\sin^2\alpha(C_{xa})''_{\alpha\alpha}-$$
$$-\frac{1}{6}\sin^3\alpha(C_{xa})'''_{\alpha\alpha\alpha}=K*F_{0,3} \quad (3.1)$$

Левая часть уравнения (3.1) может быть свернута уже шестью способами.

Уравнение (3.1) – аналог уравнения (0.1), полученного в рамках подхода [1], но в отличие от (0.1) в правой части имеется лишь один поверхностный интеграл и только от одной составляющей нормали поверхности. Уравнение (3.1) разрешается сразу же путем тройного интегрирования по углу α его свернутого вида.

4. Проекции "наветренной" площади на плоскости, перпендикулярные осям системы координат, связаны с параметрами $F_{i,k}$ уравнениями

$$F_{0,3}+F_{0,1}+F_{2,1}=S_x,\ F_{0,0}+F_{0,2}+F_{2,0}=S_y,\ F_{3,0}+F_{1,0}+F_{1,2}=S_z$$

Используя соотношения (1.2), можно получить следующее свойство:

$$(S_x)'_\xi\cos\alpha=((S_y)'_\xi\cos\varphi-(S_z)'_\xi\sin\varphi)\sin\alpha,\ \xi=(\alpha,\varphi) \quad (4.1)$$

В свою очередь, используя (4.1), можно получить

$$(S_a)'_\alpha=-S_x\sin\alpha-(S_y\cos\varphi-S_z\sin\varphi)\cos\alpha$$
$$(S_a)'_\varphi=(S_y\sin\varphi+S_z\cos\varphi)\sin\alpha$$

Откуда следует

$$S_x=-(S_a)'_\alpha\sin\alpha+S_a\cos\alpha \quad (4.2)$$
$$S_y=-(S_a\sin\alpha+(S_a)'_\alpha\cos\alpha)\cos\varphi+\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}(S_a)'_\varphi$$
$$S_z=(S_a\sin\alpha+(S_a)'_\alpha\cos\alpha)\sin\varphi+\frac{\cos\varphi}{\sin\alpha}(S_a)'_\varphi$$

Уравнение (4.2) можно записать в виде

$$S_x=-\sin^2\alpha(S_a\sin^{-1}\alpha)'_\alpha$$

Заключение. Изложенный подход применим и для исследования коэффициентов аэродинамических моментов, он позволяет получить все результаты, следующие из подхода [1], и является более общим.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Jaslow H.* Aerodynamic relationships inherent in newtonian impact theory // AIAA Journal. 1968. V. 6. № 4. P. 608–612.
2. *Черный Г.Г.* Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959. 220 с.

3. *Pike J.* Newtonian lift and drag of blunt-cone cylinder bodies // AIAA Journal. 1972. V. 10. № 2. P. 176–180.
4. *Pike J.* Newtonian aerodynamic forces from Poisson's equation // AIAA Journal. 1973. V. 11. № 4. P. 499–504.
5. *Pike J.* Moments and forces on general convex bodies in hypersonic flow // AIAA Journal. 1974. V. 12. № 9. P. 1241–1247.
6. *Бунимович А.И., Чистолинов В.Г.* Аналитический расчет аэродинамических характеристик тел вращения в условиях закона локальности // Изв. АН СССР. МЖГ. 1975. № 5. С. 94–100.
7. *Бунимович А.И., Чистолинов В.Г.* Аналитический метод расчета аэродинамических сил в пространственной задаче в условиях "закона локальности" // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 3. С. 466–472.
8. *Басс В.П., Тимошенко В.И.* Применение метода локального взаимодействия к расчету аэродинамических характеристик тел сложной формы в гиперзвуковом потоке разреженного газа // Тр. ЦАГИ. 1977. Вып. 1833. С. 28–37.

Москва

Поступила в редакцию
15.V.1997