

УДК 532.516.5-3

© 1998 г. С.Н. АРИСТОВ

ТРЕХМЕРНЫЕ КОНИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ В ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Найдены новые точные решения уравнений Навье – Стокса для стационарных трехмерных конических течений. В этом классе течений скорость убывает обратно пропорционально расстоянию от источника и исходные уравнения сводятся к двумерным. Показано, что в сферической системе координат уравнения движения сводятся к одному нелинейному уравнению относительно скалярной функции, зависящей от полярных углов. Обсуждается случай, когда указанное уравнение редуцируется к интегрируемому уравнению Лиувилля, что позволяет найти широкий класс трехмерных решений в аналитическом виде.

Исследование конических течений в вязкой несжимаемой жидкости продолжается уже более 80 лет. Первоначально в работах Джеффри и Гамеля [1, 2] были исследованы двумерные течения, индуцированные источником в виде нити. Позднее Слезкиным [3] была сформулирована задача о течениях от точечного источника, наиболее известные решения которой принадлежат Ландау, Яцееву, Сквайру [4–6]. В обзорах [7, 8] содержатся многочисленные ссылки на последующие работы, в которых обсуждаются как интересные теоретические аспекты, так и многочисленные приложения различных осесимметричных течений. В данной работе обсуждается более общий трехмерный случай.

1. Постановка задачи. Рассмотрим несжимаемую жидкость в неограниченном пространстве, в которую помещен точечный или линейный источник импульса. Требуется определить течение жидкости, затухающее при удалении от источника. Уравнения Навье – Стокса запишем так

$$\mathbf{V} \times \text{rot } \mathbf{V} = -\nabla \left(\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} \mathbf{V}^2 \right) - \nu \text{rotrot } \mathbf{V}, \quad \nabla \mathbf{V} = 0 \quad (1.1)$$

где \mathbf{V} , P – скорость и давление, ρ , ν – плотность жидкости и коэффициент вязкости. Для решения задачи воспользуемся следующими представлениями, соответствующими коническим течениям:

$$\mathbf{V} = -\nu \text{rotrot } (\Phi \mathbf{r}), \quad \frac{P}{\rho} = -\frac{\mathbf{V}^2}{2} + \frac{\nu^2 B}{r^2} + \frac{P_0}{\rho} \quad (1.2)$$

где Φ , B – неизвестные функции углов ϑ , φ , \mathbf{r} – радиус-вектор в сферической системе координат. Представление (1.2) приводит к следующей зависимости компонент завихренности и скорости от неизвестной функции Φ :

$$V_\vartheta = -\frac{\nu \partial \Phi}{r \partial \vartheta}, \quad V_\varphi = -\frac{\nu \partial \Phi}{r \sin \vartheta \partial \varphi}, \quad V_r = \frac{\nu W}{r} \quad (1.3)$$

$$\Omega_\varphi = -\frac{\nu \partial W}{r^2 \partial \vartheta}, \quad \Omega_\vartheta = \frac{\nu \partial W}{r^2 \sin \vartheta \partial \varphi}, \quad \Omega_r = 0, \quad W = \Delta \Phi$$

$$\Delta = \sin \vartheta^{-1} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \sin \vartheta^{-2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

где Δ – двумерный оператор Лапласа, записанный на сфере единичного радиуса. Подставляя (1.3) в исходные уравнения (1.1), получим следующую переопределенную систему уравнений в частных производных:

$$W \frac{\partial W}{\partial \vartheta} = \frac{\partial B}{\partial \vartheta} - \frac{\partial W}{\partial \vartheta}, \quad W \frac{\partial W}{\partial \varphi} = \frac{\partial B}{\partial \varphi} - \frac{\partial W}{\partial \varphi} \quad (1.4)$$

$$2B + \Delta W + \nabla W \nabla \Phi = 0$$

После интегрирования первой пары уравнений и несложных преобразований получим явное выражение для функции Бернулли и одно уравнение, определяющее функцию Φ

$$B = \frac{1}{2} W^2 + W - \frac{1}{2} q \quad (1.5)$$

$$\nabla[(W + 2)\nabla(\Phi + \ln(W + 2))] = q \quad (1.6)$$

где q – постоянная интегрирования и все операторы записаны на сфере единичного радиуса. В осесимметричном случае уравнение (1.6) совпадает с уравнением Слезкина [3] и имеет общее решение [5]. Это уравнение является основным уравнением задачи.

2. Точные решения. В случае, когда $q = 0$, уравнение (1.6) может быть проинтегрировано [9]. Для этого достаточно считать выражение стоящее под знаком градиента равным нулю. Откуда после простых преобразований имеем:

$$\Delta \Phi = -2 + A \exp(-\Phi) \quad (2.1)$$

где A – произвольная постоянная. Для решения уравнения (2.1) представим функцию Φ в виде

$$\Phi = 2 \ln \sin \vartheta + \Psi(x, y), \quad x = \varphi, \quad y = \ln \left(\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \right) \quad (2.2)$$

Подставляя (2.2) в уравнение (2.1), получим

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = A \exp(-\Psi) \quad (2.3)$$

Уравнение (2.3) есть уравнение Лиувилля, которое имеет общее решение. Оно выражается через произвольные аналитические функции комплексного аргумента [10], что затрудняет интерпретацию результатов, либо может быть построено по решениям уравнения Лапласа [11]. В [9] приведены некоторые из возможных решений. Здесь ограничимся случаем, соответствующим разделению переменных. А именно рассмотрим решение вида

$$\Psi = 2 \ln(\alpha \exp(my) + \beta \exp(-my) + \varepsilon \cos(mx)), \quad A = 2m^2(4\alpha\beta - \varepsilon^2) \quad (2.4)$$

где $\alpha, \beta, \varepsilon, m$ – произвольные постоянные. Справедливость (2.4) проще всего проверить простой подстановкой. Для анализа полученного решения подставим (2.4) в (2.2) и вернемся к старым переменным

$$\Phi = 2 \ln \left[\frac{\alpha(1 - \cos \vartheta)^m + \beta(1 + \cos \vartheta)^m + \varepsilon \sin^m \vartheta \cos m\varphi}{\sin^{m-1} \vartheta} \right] \quad (2.5)$$

где m – целое положительное число, определяющее количество струй. При $m = 0$

выражение (2.5) описывает безвихревое течение, соответствующее линейному стоку [12]. При $m = 1$ течение трансформируется в затопленную струю Ландау [4] с произвольной ориентацией в пространстве. Это единственное решение, соответствующее точечному источнику импульса, помещенному в начало координат. Во всех остальных случаях (2.5) определяет вихревое течение с произвольным числом струй, порождаемое линейным источником массы, удельная мощность которого равна $2(m - 1)$.

Для ненулевых значений параметра q решение уравнения (1.6) будем искать в виде

$$\Phi = m \ln \sin \vartheta + \Psi(\varphi) \quad (2.6)$$

где m – произвольная постоянная. Подставляя (2.6) в исходное уравнение (1.6) и группируя слагаемые при одинаковых степенях $\sin \vartheta$, получим

$$\Psi_{\varphi\varphi\varphi} + (4 - 2m)\Psi_{\varphi\varphi} + \Psi_{\varphi}\Psi_{\varphi\varphi\varphi} + \Psi_{\varphi\varphi}\Psi_{\varphi\varphi} = 0, \quad q = m(m - 2) \quad (2.7)$$

где нижний индекс у функции тока обозначает дифференцирование по углу φ . Исследование уравнения (2.7) показало, что решения, удовлетворяющие условиям периодичности, существуют только при $m \leq 2$. Причем все периодические решения могут быть найдены в квадратурах. А именно, интегрируя (2.7) и полагая постоянную интегрирования равной нулю, получим

$$\Psi_{\varphi\varphi\varphi} + (4 - 2m)\Psi_{\varphi\varphi} + \Psi_{\varphi}\Psi_{\varphi\varphi\varphi} = 0$$

Полученное уравнение имеет следующий интеграл:

$$\Psi_{\varphi\varphi} = (2m - 4) + A \exp(-\Psi)$$

где A – произвольная постоянная. Легко видеть, что указанное уравнение сводится к квадратуре

$$\varphi = \pm \int \frac{\partial \Psi}{\sqrt{C - 2(4 - 2m)\Psi - 2A \exp(-\Psi)}} \quad (2.8)$$

где C – постоянная интегрирования. Данный интеграл не выражается в элементарных функциях и характер полученных решений необходимо исследовать численно. Перейдем к новым функциям u , w и параметру k , в результате уравнение (2.7) после интегрирования сводится к уравнению типа Бюргерса

$$u = \Psi_{\varphi}, \quad w = \Psi_{\varphi\varphi}, \quad k^2 = 4 - 2m \quad (2.9)$$

$$u_{\varphi\varphi} = -u(k^2 + u_{\varphi})$$

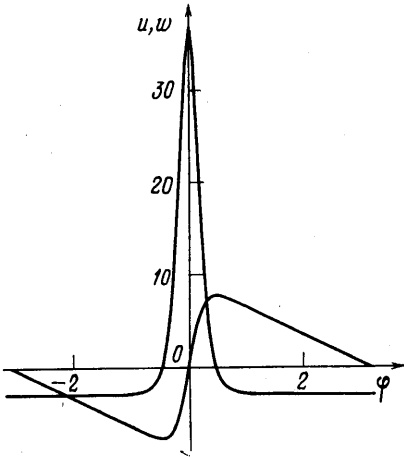
Численные исследования показали, что при любом действительном значении параметра k всегда существует периодическое решение, соответствующее струйному течению с произвольным количеством струй. При этом в области вытекающей струи и вне ее справедливы следующие выражения:

$$u = -k^2\varphi, \quad w = -k^2 \quad (2.10)$$

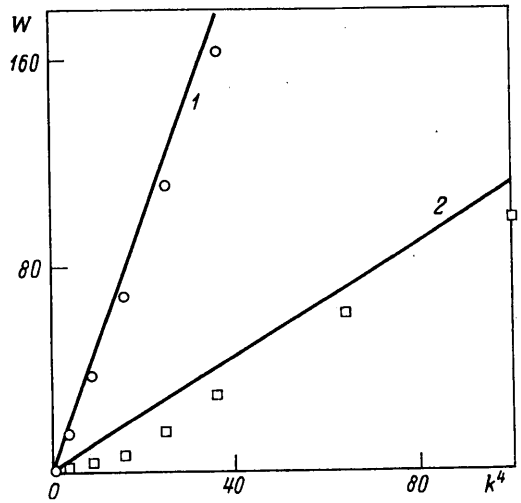
$$u \approx 2n\text{th}(n\varphi), \quad w \approx 2n^2\text{ch}^{-2}(n\varphi) \quad (2.11)$$

где n – произвольное число. Причем (2.10) описывает потенциальное течение втекающей жидкости и является точным решением исследуемого уравнения, а (2.11) справедливо в области вытекающей струи. Сравнивая разложения (2.10)–(2.11), можно найти зависимость параметра n , определяющего ширину струи и максимальную скорость в ней, от определяющих параметров задачи

$$n = \frac{\pi k^2}{2N}, \quad W = \frac{2\pi^2 k^4}{N^2} \quad (2.12)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 1. Качественные зависимости радиальной u и азимутальной скоростей w от азимутального угла в плоскости $\vartheta = \pi/2$ для случая образования одной струи

Фиг. 2. Зависимость максимальной радиальной скорости от мощности источника для одной (1) и двух (2) струй. Сплошная линия – результат асимптотического анализа, точки – численный расчет

где N – произвольное число, равное количеству вытекающих струй, W – максимальная скорость истечения жидкости. Как следует из приведенных оценок, максимальное отношение скорости вытекающей струи к скорости втекающей жидкости достигается в случае, когда струя одна. На фиг. 1 приведены качественные графики для компонент скорости, соответствующие случаю одной вытекающей струи. На фиг. 2 показаны зависимости максимальной радиальной скорости от параметров задачи, причем сплошной линией указаны результаты асимптотического анализа (2.12), а точками – данные численного эксперимента.

Закключение. Полученные точные решения уравнений Навье – Стокса описывают течения от линейного источника при нарушении осесимметричности, что может быть результатом потери устойчивости известных двумерных течений Джеффри – Гамеля. Приведенные результаты не исчерпывают всех возможных решений для течений конического типа, а уравнение (1.6) представляет собой любопытный объект для математического исследования хотя бы в силу того, что при нулевой правой части данное уравнение обладает свойством конформной инвариантности. Особый класс решений для вращающихся струй имеет вид $\Phi = \Gamma\varphi + \Psi(\vartheta)$ и описывает суперпозицию вихревой нити, интенсивность которой определяется параметром Γ и любого осесимметричного решения из класса конических течений. Вероятно, наиболее интересен случай, когда в качестве осесимметричного решения выбирается затопленная струя Ландау [8]. Другой класс решений соответствует потенциальным течениям и описывается уравнением $\Delta\Phi = \text{const}$. Осесимметричные режимы потенциальных течений указанного типа были подробно описаны в работе [12].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 97-01-00063).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hamel G. Spiralförmige Bewegungen zäher Flüssigkeiten // Jahresber. Dtsch. Mat.-Ver. 1916. B. 25. H. 1–3. S. 34–60.

2. Jeffery G.B. The two-dimensional steady motion of a viscous fluid // Philos. Mag. Ser. 6. 1915. V. 29. № 172. P. 455–465.
3. Слезкин Н.А. Об одном случае интегрируемости полных дифференциальных уравнений движения вязкой жидкости // Учен. зап. МГУ. 1934. Вып. 2. С. 89–90.
4. Ландау Л.Д. Об одном новом точном решении уравнений Навье – Стокса // Докл. АН СССР. 1944. Т. 43. № 7. С. 299–301.
5. Яцеев В.И. Об одном классе точных решений уравнений движения вязкой жидкости // ЖЭТФ. 1950. Т. 20. Вып. 11. С. 1031–1034.
6. Squire H.B. The round laminar jet // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1951. V. 4. Pt. 3. P. 321–329.
7. Wang C.Y. Exact solution of the steady-state Navier – Stokes equations // Annu. Rev. Fluid Mech. 1991. V. 23. P. 159–177.
8. Goldshtik M.A. Viscous flow paradoxes // Annu. Rev. Fluid Mech. 1990. V. 22. P. 441–472.
9. Аристов С.Н. Точное решение задачи о точечном источнике // Докл. РАН. 1995. V. 343. № 1. P. 50–52.
10. Liouville J. Sur L'équation aux differences partielles $\frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial u \partial v} \pm \frac{\lambda}{2a^2} = 0$ // J. Math. Pure et Appl. 1853. № 18. P. 71–72.
11. Попов А.Г. Точные формулы построения решений уравнения Лиувилля $\Delta_2 U = e^U$ по решениям уравнения Лапласа $\Delta_2 V = 0$ // Докл. РАН. 1993. Т. 333. № 4. С. 440–441.
12. Paull R., Pillow A.F. Conically similar viscous flows. Pt. 2. One-parameter swirl-free flows // J. Fluid Mech. 1985. V. 155. P. 343–358.

Пермь

Поступила в редакцию
2.IV.1997