

УДК 532.68.013.4:537.21

© 1998 г. Д.Ф. БЕЛОНОЖКО, А.И. ГРИГОРЬЕВ, С.О. ШИРЯЕВА

## НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ДВУХ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ПРОВОДЯЩИХ ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ В НОРМАЛЬНОМ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Численно проанализировано дисперсионное уравнение для движений заряженной плоской границы раздела двух вязких несжимаемых несмешивающихся электропроводных жидкостей при конечных значениях всех входящих в него параметров. Показано, что кроме известной неустойчивости аperiодического характера (типа Тонкса – Френкеля) при определенных значениях физических параметров в системе реализуется колебательная неустойчивость с периодически нарастающей амплитудой.

Исследование устойчивости границы раздела двух несмешивающихся жидкостей, различающихся своими физико-химическими характеристиками, неоднократно проводилось для различных предельных ситуаций в связи с многочисленными приложениями в физических, технических и технологических проблемах [1]. Аperiодическая неустойчивость однородно проводящей заряженной плоской свободной поверхности идеально проводящей жидкости в поле сил тяжести известна как неустойчивость Тонкса – Френкеля. Влияние на устойчивость границы раздела двух жидкостей нормального к границе постоянного электрического поля относительно детально изучено лишь в постановке, не учитывающей релаксацию заряда на поверхности раздела [2–4]. Известные авторам исследования влияния на спектр капиллярных движений жидкости в рассматриваемой системе релаксации заряда проведены лишь для некоторых асимптотических ситуаций [5–7]. Анализ дисперсионного уравнения задачи при конечных значениях всех входящих в него параметров до сих пор не проведен. Несмотря на наличие экспериментальных данных о возможности проявления колебательной неустойчивости в обсуждаемой модели [8, 9], четкое теоретическое указание на ее возможность в литературе не приводится.

Ниже анализируется задача об устойчивости плоской границы раздела двух несмешивающихся проводящих вязких жидкостей в нормальном электростатическом поле с учетом эффекта релаксации заряда (по схеме, использованной в [7]) с численным анализом получающегося дисперсионного уравнения при конечных значениях входящих в него параметров.

1. Рассмотрение устойчивости проведем на модели несжимаемых вязких проводящих жидкостей, заполняющих в поле силы тяжести все пространство. Невозмущенная граница раздела между жидкостями совпадает с плоскостью  $XU$  декартовой системы координат, ось  $Z$  которой направлена противоположно вектору силы тяжести. Вся система находится в электростатическом поле, создаваемом бесконечно протяженными пластинами плоского конденсатора, параллельными невозмущенной границе раздела сред и разнесенными на весьма большое расстояние. Между пластинами течет постоянный электрический ток, вызывающий появление на невозмущенной границе раздела сред с различными значениями удельных электропроводностей  $\sigma_j$  и диэлектрических проницаемостей  $\epsilon_j$  однородно распределенного поверхностного заряда с плотностью  $\kappa$ . Жидкости обладают кинематической вязкостью  $\nu_j$ , плотностью  $\rho_j$ .

Индекс  $j = 1$  относится к полупространству  $z > 0$ ,  $j = 2$  – к полупространству  $z < 0$ , причем  $\rho_1 < \rho_2$ . Примем также, что невозмущенная граница раздела жидкостей обладает поверхностным натяжением с коэффициентом  $\gamma$ . Электростатические поля  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{E}_2$  в верхней и нижней областях будем описывать с помощью электростатических потенциалов  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  соответственно.

Для отыскания условий линейной неустойчивости в системе будем решать задачу [7]

$$\frac{\partial \mathbf{U}_j}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_j} \text{grad } P_j + \nu_j \Delta \mathbf{U}_j + \mathbf{g}; \quad \text{div } \mathbf{U}_j = 0, \quad j = (1, 2) \quad (1.1)$$

$$\Delta \Phi_j = 0; \quad \mathbf{E}_j = -\text{grad } \Phi_j \quad (1.2)$$

$$z \rightarrow \infty: \mathbf{U}_1 = 0; \quad \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{10} \mathbf{n}_z \quad (1.3)$$

$$z \rightarrow -\infty: \mathbf{U}_2 = 0; \quad \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{20} \mathbf{n}_z; \quad 4\pi\kappa = \varepsilon_1(\mathbf{n}_1, \mathbf{E}_1) + \varepsilon_2(\mathbf{n}_2, \mathbf{E}_2) \quad (1.4)$$

$$z = \zeta(x, y, t): \quad \frac{\partial \kappa}{\partial t} + \text{div}_S(\kappa \mathbf{U}_\tau) + \sigma_1(\mathbf{n}_1, \mathbf{E}_1) + \sigma_2(\mathbf{n}_2, \mathbf{E}_2) = 0 \quad (1.5)$$

$$\text{div}_S \equiv \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\Phi_1 = \Phi_2; \quad \mathbf{U}_1(\mathbf{r}, t) = \mathbf{U}_2(\mathbf{r}, t); \quad \mathbf{U}_{jz} \approx \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad (1.6)$$

$$\frac{\nu_1}{\rho_1} [(\boldsymbol{\tau}_1(\mathbf{n}_1, \nabla), \mathbf{U}_1) + (\mathbf{n}_1(\boldsymbol{\tau}_1, \nabla), \mathbf{U}_1)] -$$

$$- \frac{\nu_2}{\rho_2} [(\boldsymbol{\tau}_2(\mathbf{n}_2, \nabla), \mathbf{U}_2) + (\mathbf{n}_2(\boldsymbol{\tau}_2, \nabla), \mathbf{U}_2)] = \Pi_x \quad (1.7)$$

$$P_1 - P_2 + 2\nu\rho_2 \frac{\partial U_{2z}}{\partial z} - 2\nu\rho_1 \frac{\partial U_{1z}}{\partial z} = P_x + P_\gamma; \quad P_\gamma = -\gamma \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \quad (1.8)$$

$$P_x = P_{x1} - P_{x2}; \quad P_{xj} = \frac{\varepsilon_j}{8\pi} [(\mathbf{n}_j, \mathbf{E}_j)^2 - (\boldsymbol{\tau}_j, \mathbf{E}_j)^2] \quad (1.9)$$

Здесь  $P_j = P_j(\mathbf{r}, t)$  – давление внутри  $j$ -й жидкости,  $\mathbf{U}_j = \mathbf{U}_j(\mathbf{r}, t)$  – поле скоростей в ней;  $z = \zeta(x, y, t) = \zeta_0 \exp(st - ikx)$  – уравнение границы раздела сред, возмущенной капиллярным волновым движением;  $\mathbf{g}$  – ускорение свободного падения;  $P_\gamma$  – давление сил поверхностного натяжения под искривленной волновым движением плоской поверхностью жидкости [10];  $P_x$  – электростатическое давление на нее из-за наличия поверхностного заряда, распределенного с плотностью  $\kappa$  [10]

$$\Pi_x = \Pi_{x1} - \Pi_{x2}; \quad \Pi_{xj} = (\varepsilon_j / 4\pi) (\mathbf{n}_j, \mathbf{E}_j) (\boldsymbol{\tau}_j, \mathbf{E}_j) \quad (1.10)$$

где  $\Pi_x$  – электрическая часть касательных компонент тензора натяжений;  $k$  – волновое число;  $\boldsymbol{\tau}_j$  и  $\mathbf{n}_j$  – орты касательной и нормали к поверхности  $j$ -й жидкости.

Как видно из (1.5), учет эффекта релаксации заряда проводится в предположении, что перенос заряда вдоль границы раздела вследствие подвижности его носителей в поле  $\mathbf{E}_\tau$  много слабее переноса заряда с токами, связанными с приповерхностными течениями, т.е.  $b \ll U_\tau / E_\tau$ , где  $b$  – подвижность носителей заряда. Поскольку  $\mathbf{E}_\tau$  и  $\mathbf{U}_\tau$  – малые одного порядка, то их отношение конечно и, следовательно, приведенное ограничение будет выполняться для достаточно широкого класса жидкостей.

Электрические свойства сред будут описываться с помощью параметров

$$\sigma = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}; \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}; \quad \beta = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{4\pi(\sigma_1 + \sigma_2)}$$

где  $\beta$  имеет смысл приведенного времени релаксации заряда.

Безразмерный параметр Тонкса – Френкеля

$$W = \frac{\epsilon_1 E_{10}^2}{4\pi\sqrt{\rho_2 g \gamma}}$$

будет характеризовать отношение сил электрического давления, действующих на поверхность, и сил тяжести.

2. Решая задачу (1.1)–(1.10) путем разделения поля скоростей на потенциальную и вихревую компоненты [10], в линейном по малым величинам  $\zeta$  и  $U_j$  приближении можно получить дисперсионное соотношение для капиллярных движений жидкости в анализируемой системе [10].

Когда  $g = \rho_2 = \gamma = 1$ , характерные масштабы размерных величин имеют вид

$$s_* = \left(\frac{\rho_2 g^3}{\gamma}\right)^{1/4}; \quad k_* = \left(\frac{\rho_2 g}{\gamma}\right)^{1/2}; \quad \rho_* = \rho_2$$

$$v_{j*} = \left(\frac{\gamma^3}{\rho_2^3 g}\right)^{1/4}; \quad \beta_* = \left(\frac{\gamma}{\rho_2 g^3}\right)^{1/4}$$

В безразмерных параметрах дисперсионное уравнение запишем в форме

$$\begin{aligned} & -\alpha^2 (s^2 (1 + s\beta)n + sk\theta d) - sk^3 H\Lambda + \\ & + (1 + s\beta)^2 (s^4 (\rho + 1)n - 4s^2 k^3 v^2 (\rho - 1)^2 d + 4s^3 k^2 v (\rho - 1)m + 4\rho s^4 k) + \\ & + (1 + s\beta) (s^3 k^2 \theta n + s^3 k\theta (\rho + 1)d + k^2 (H + \Lambda s) (s^2 m - 2sk\theta v (\rho - 1)d) = 0 \end{aligned}$$

$$n = \rho(A_2 + A_1); \quad m = \rho(A_2 - A_1); \quad d = A_2 A_1; \quad A_j = \sqrt{k^2 + s/v_j} - k$$

$$\rho = \frac{\rho_1}{\rho_2}; \quad \alpha^2 = (1 + s\beta) (k(\rho - 1) - k^3) + k^2 F \quad (2.1)$$

$$F = W(1 - \sigma) \left( s\beta \frac{1 - \sigma}{1 + \epsilon} + \frac{1 + \epsilon\sigma^2}{1 + \sigma} \right)$$

$$H = W(1 - \epsilon\sigma) \left( s\beta \left[ 1 - \frac{1 - \sigma}{1 + \epsilon} \right] + \frac{2\sigma}{1 + \sigma} \right)$$

$$\Lambda = W(1 - \epsilon\sigma)\beta \left( 1 - \frac{1 - \sigma}{1 + \epsilon} \right); \quad \theta = W(1 - \epsilon\sigma)\beta \left( 1 - \frac{1 + \sigma}{1 + \epsilon} \right)$$

Вопрос аналитического исследования полученного уравнения ввиду громоздкости является предметом отдельного анализа, относительно подробно проведенного в некоторых асимптотических ситуациях [7], и в настоящей работе не обсуждается. Дисперсионное уравнение исследуется численно.

Левая часть дисперсионного уравнения – аналитическая функция от комплексной частоты  $\Omega = \Omega(s)$ . Все расчеты проводились для  $v_1 = v_2 = v$ . В этом случае  $\Omega(s) = \Omega(s, \sqrt{k^2 + s/v})$  – рациональная относительно  $s$  и  $\sqrt{k^2 + s/v}$  функция,  $\Omega(s)$  имеет две однозначные ветви. Комплексную плоскость, которая является областью определения ветви  $\Omega(s)$ ,  $\text{Re} \sqrt{k^2 + s/v} \geq 0$ , будем называть верхним листом римановой поверхности. Область определения другой ветви – нижним листом. Под римановой поверхностью понимается линейное многообразие, образуемое парой комплексных

плоскостей в евклидовом пространстве  $R^3$ , на которых определены однозначные ветви  $\Omega(s)$ . Плоскости располагаются параллельно, а множество, на котором значения  $\Omega(s)$  совпадают для обеих ветвей, считается общим.

Поскольку функции тока поля скоростей  $\psi_1 \sim \exp(-z\sqrt{k^2 + s/v})$  и  $\psi_2 \sim \exp \times (z\sqrt{k^2 + s/v})$ , то условию ограниченности на бесконечности удовлетворяют лишь решения дисперсионного уравнения, расположенные на верхнем листе римановой поверхности. В общем случае, когда  $v_1 \neq v_2$ , дисперсионное уравнение определено на четырехлистной римановой поверхности, а физически реализуются только решения, лежащие на верхнем листе. Высшая, шестая степень  $s$  входит в (2.1), вместе с множителем  $\sqrt{k^2 + s/v}$ , поэтому число решений (2.1) определяется числом корней полинома по  $s$  степени 13. На представленных ниже графиках из 13 найденных изображены лишь решения дисперсионного уравнения, полностью либо частично принадлежащие верхнему листу римановой поверхности.

Для уравнения (2.1) численно исследовался характер зависимостей безразмерной комплексной частоты  $s$  от отношения удельных проводимостей верхней и нижней жидкостей  $\sigma \equiv \sigma_1/\sigma_2$  при различных безразмерных волновых числах  $k$  и фиксированных остальных параметрах ( $v_1 = v_2 = 0,1$ ;  $\varepsilon = 0,1$ ;  $\rho = 0,01$ ;  $\beta = 0,01$ ). В каждом случае принятое значение  $W$  на 10% превышало величину критического для реализации неустойчивости Тонкса – Френкеля значения параметра  $W_*$  для данного волнового числа при  $\sigma_1 = 0$ . При используемом обезразмеривании

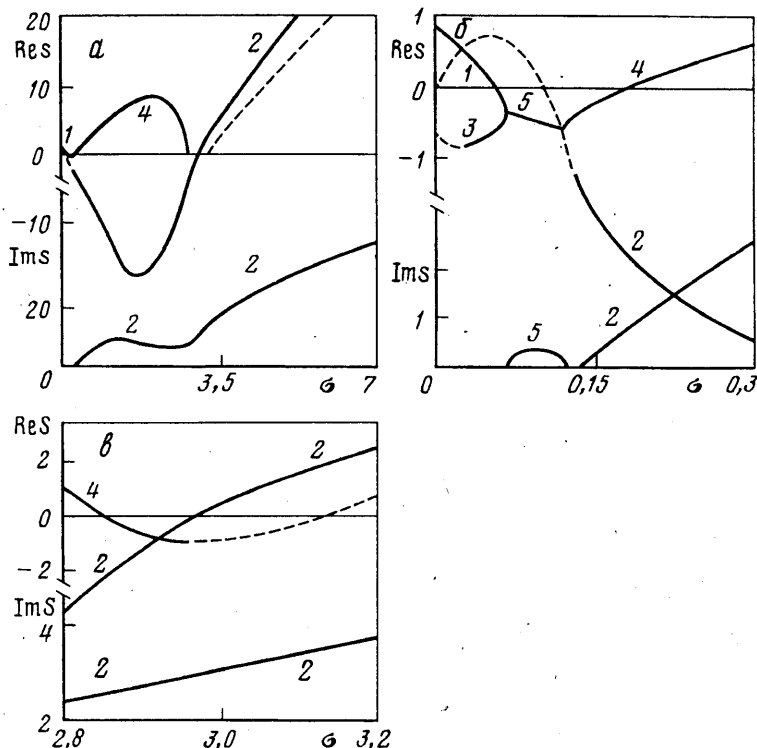
$$W_* = k + \frac{1}{k} = \left( \frac{k^2 \gamma}{\rho_2 g} + 1 \right) \sqrt{\frac{\rho_2 g}{\gamma}} \frac{1}{k}$$

Численные расчеты по дисперсному уравнению (2.1) для ситуации, когда плотность верхней жидкости – конечная величина, гораздо меньшая, плотности нижней ( $\rho = 0,01$ ), при  $k = 3$  приведены на фиг. 1, а–в в виде зависимостей  $\text{Re } s = f(\sigma)$  и  $\text{Im } s = \varphi(\sigma)$ . На фиг. 1, а представлен общий вид полученных зависимостей, на котором в использованном масштабе не видны некоторые существенные для понимания физической сути детали. Части кривых в увеличенном масштабе представлены на фиг. 1, б. На приведенных рисунках ветвь 1 соответствует аperiodической неустойчивости типа неустойчивости Тонкса – Френкеля, реализующейся для малых значений отношения электропроводностей  $\sigma$ , например для границы диэлектрика или плохого проводника с хорошо проводящей средой.

Ветвь 2, появляющаяся ниже точки ветвления решений 3, 4, 5, в области  $\text{Re } s < 0$  описывает волны капиллярно-релаксационного типа, причем с весьма большими значениями частот. По мере увеличения отношения  $\sigma$  вещественная часть ветви 2 становится положительной, что означает начало экспоненциального роста амплитуд волн. Частоты неустойчивых волн и их инкременты растут с увеличением  $\sigma$ .

Ветвь 3, рождающаяся в точке ветвления 1, 3, 5, соответствует аperiodически затухающим решениям. Левее точки ветвления при уменьшении отношения  $\sigma$  ветвь 3 переходит на нижний лист римановой поверхности (фиг. 1, б), на которой определено дисперсионное соотношение (2.1). Соответствующее продолжение этой ветви на нижнем листе римановой поверхности приведено штриховой линией. Совершив на нижнем листе петлю возле начала координат ( $\text{Re } s, \sigma$ ) и обогнув сверху точку ветвления 1, 3, 5, пройдя сквозь точку ветвления 3, 4, 5, ветвь 3 снова выходит на верхний лист римановой поверхности, рождая ветвь 2.

Ветвь 4 описывает при  $\text{Re } s < 0$  затухающие аperiodические движения в окрестности точки зарождения (точки ветвления 3, 4, 5) и в окрестности своего правого края, где она снова уходит на нижний лист римановой поверхности (фиг. 1, а, в). В



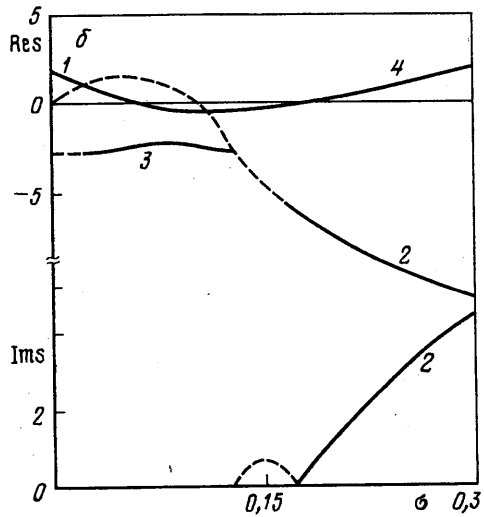
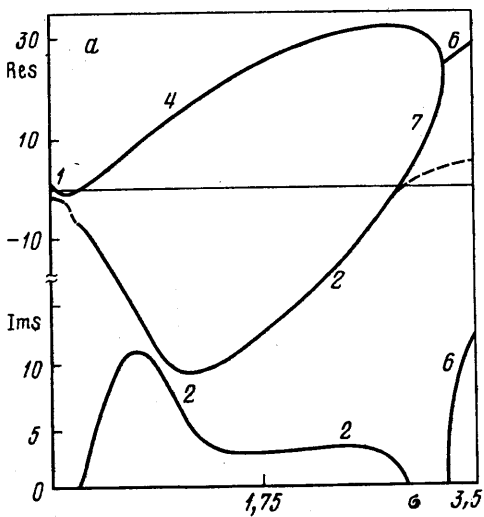
Фиг. 1. Зависимости вещественной  $ReS$  и мнимой  $ImS$  компонент частоты от отношения удельных проводимостей верхней  $\sigma_1$  и нижней  $\sigma_2$  жидкостей ( $\sigma \equiv \sigma_1/\sigma_2$ ) при  $k = 3$ ;  $\nu_1 = \nu_2 = 0,1$ ;  $\epsilon = 0,1$ ;  $\rho = 0,01$ ;  $\beta = 0,01$ ;  $W = 3,6$

большей же своей части (в большем диапазоне значений отношения  $\sigma$ ) ветвь 4 описывает аperiodическую неустойчивость типа Тонкса – Френкеля, реализующуюся для сред со сравнимыми проводимостями (для хорошо проводящих жидкостей). Причем в левой и правой своих частях (по отношению к точке максимума) зависимости инкремента неустойчивости от  $\sigma$ , описываемые кривой 4, различны.

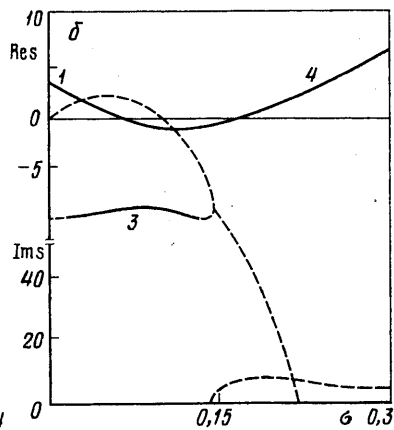
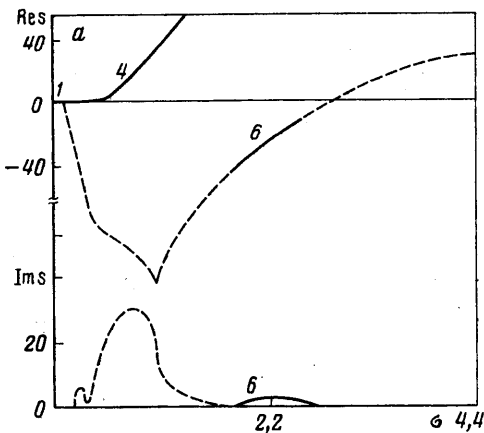
Ветвь 5 – ветвь затухающих волновых движений – связана с релаксацией заряда при малых  $\sigma$ , рождается в точке ветвления 1, 3, 5 и исчезает в точке ветвления 3, 4, 5.

Физический смысл появления колебательной неустойчивости в нормальном к границе раздела электростатическом поле связан с раскачкой тепловых капиллярных волн волнами перераспределяющегося вдоль границы раздела электрического заряда (сопровождающимися волнами давления электрического поля). Когда удельная электропроводность верхней среды много больше электропроводности нижней среды, волна перераспределяющегося в верхней среде заряда опережает таковую для нижней среды и передает ей дополнительную энергию. Если же еще и плотность верхней среды много меньше плотности нижней жидкости (как это и имеет место в анализируемом случае), тогда и реализуется колебательная неустойчивость границы раздела. По всей видимости, именно такая неустойчивость имела место в экспериментах [8, 9]. Ясно, что колебательная неустойчивость капиллярных волн на границе раздела вязких жидкостей должна существенно зависеть от вязкостей обеих жидкостей. В частности, это означает, что она может исчезнуть для более высоких значений волновых чисел.

На фиг. 2 приведены аналогичные зависимости для  $k = 5$ . Несложно видеть, что увеличение  $k$  приводит к существенной деформации спектра реализующихся движе-



Фиг. 2. То же, что на фиг. 1, для  $k = 5$ ;  $W = 5,5$



Фиг. 3. То же, что на фиг. 1, для  $k = 10$ ;  $W = 11$

ний жидкости. Так, в результате исчезновения ветви 5 происходит объединение ветвей 1 и 4 (хотя прежняя нумерация ветвей сохранится и левый край объединенной кривой, левее точки минимума, по-прежнему обозначен 1). Неустойчивая часть ветви 2 выделяется в самостоятельное волновое движение, по-прежнему неустойчивое, и обозначается 6. Затухающее волновое движение, соответствующее левой части ветви 2 на фиг. 1, также выделяется в самостоятельную ветвь, по-прежнему обозначено 2. Эти два волновых движения разделяются ветвью аperiodических движений 7, связывающей две новые точки ветвления.

При  $k = 9$  ветвь 6 неустойчивых волн становится ветвью затухающих волновых движений. Ветвь волновых движений 2 сохраняется, но декремент затухания увеличивается примерно в 2 раза, а частота сохраняется.

При  $k = 10$ , как видно из фиг. 3, исчезает и ветвь волновых движений 2. Ветвь 6 сохраняется, но декремент затухания по абсолютной величине превышает частоту примерно на порядок, что позволяет считать это движение аperiodическим. Ветви аperiodических движений 1 и 4 сохраняют свой вид.

Отметим размерные значения физических величин штрихом сверху. Предложенные зависимости качественно соответствуют, например, ситуации (приводимый пример имеет оценочный характер и не единствен, поскольку результаты получены в безразмерной форме; кроме того, фиксированные значения  $\beta$ ,  $\epsilon$  и  $\sigma$  допускают некоторую свободу в определении  $\epsilon_j$ ,  $\sigma_j$ ), когда верхняя среда – газ ( $\rho'_1 \approx 0,01$  г/см<sup>3</sup>;  $\nu'_1 \approx 0,05$  Ст;  $\epsilon'_1 \approx 2-4$ ;  $\gamma' \approx 50$ ), ионизированный до состояния, характеризуемого проводимостью сравнимой с проводимостью нижней среды – жидкости (с характеристиками  $\rho'_2 \approx 1$  г/см<sup>3</sup>;  $\nu'_2 \approx 0,05$  Ст;  $\epsilon'_2 \approx 20-40$ ;  $\sigma'_2 \approx 10^4$  с). В зависимости от значения отношения проводимостей будет наблюдаться тот или иной вид неустойчивости. Это будет справедливо, только если в процессе эксперимента  $\epsilon_2$  будет оставаться порядка нескольких единиц, что делает вопрос подбора верхней среды трудным в связи с отсутствием систематических данных о значении диэлектрической проницаемости при ионизации газа до необходимого состояния. Проведенные рассуждения безусловно справедливы только в приближении несжимаемости газа.

Аналогичные приведенным расчеты проводились для каждого из использованных значений  $k$  при  $0 \leq W \leq 1,1W_*$ , однако колебательная неустойчивость наблюдалась лишь при закритических значениях  $W > W_*$ .

**Закключение.** На плоской границе раздела двух вязких несжимаемых несмешивающихся электропроводных жидкостей (когда плотность верхней много меньше плотности нижней жидкости), находящихся в перпендикулярном границе раздела электростатическом поле, могут реализоваться неустойчивости разных типов: несколько (в зависимости от величины безразмерного волнового числа  $k$ ) неустойчивостей аperiодического типа (типа Тонкса – Френкеля), по-разному зависящие от  $\sigma$  – отношения удельных электропроводностей верхней и нижней жидкости в различных диапазонах значений  $\sigma$ , и колебательная неустойчивость с периодически нарастающей амплитудой. Колебательная неустойчивость имеет место при величине внешнего электростатического поля, превышающей критическое для проявления аperiодической неустойчивости типа Тонкса – Френкеля. Характер неустойчивости существенно зависит лишь от величины отношения электропроводностей верхней и нижней жидкостей.

Анализ дисперсионного уравнения проводился в диапазоне физических параметров, когда параметр Тонкса – Френкеля, характеризующий отношение электрических сил, действующих на поверхность, и сил тяжести изменялся в пределах  $0 \leq W \leq 1,1(k+1/k)$ , а множество значений ( $k$ ,  $\sigma$ ) описывалось неравенствами  $1 < k < 10$  и  $0 \leq \sigma \leq 7$ . При любой комбинации ( $W$ ,  $k$ ,  $\sigma$ ) из указанного диапазона и отношениях диэлектрических проницаемостей верхней и нижней сред  $\epsilon = 0,1$ , плотностей верхней и нижней сред  $\rho = 0,01$ , при безразмерных значениях приведенного времени релаксации заряда  $\beta = 0,01$ , кинематических вязкостей сред  $\nu_1 = \nu_2 = 0,1$  существует лишь одна из упомянутых выше неустойчивостей.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григорьев А.И., Ширяева С.О. Капиллярные неустойчивости заряженной поверхности капель и электродиспергирование жидкостей // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
2. Брискман В.А., Шайдуров В.А. Механизмы неустойчивости поверхности жидкости в постоянном и переменном электрическом поле // Учен. зап. Перм. ун-та: Гидродинамика. Вып. 2. 1970. № 216. С. 229–240.
3. Taylor G.I., McEwan A.D. The stability of a horizontal fluid interface in a vertical electric field // J. Fluid Mech. 1965. V. 22. Pt 1. P. 1–15.
4. Иевлев И.И., Исєрс А.Б. Равновесие и устойчивость поверхности раздела жидких диэлектриков в электрическом и гравитационном полях // Магнит. гидродинамика. 1976. № 4. С. 89–95.
5. Ермаков В.И. Об устойчивости границы раздела двух диэлектрических жидкостей в электрическом поле // Магнит. гидродинамика. 1976. № 4. С. 85–88.

6. Зайцев М.В., Шлиомис М.И. Характер неустойчивости поверхности раздела двух жидкостей в постоянном поле // Докл. АН СССР. 1969. Т. 188. № 6. С. 1261–1262.
7. Melcher J.R., Smith C.V. Electrohydrodynamic charge relaxation and interfacial perpendicular-field instability // Phys. Fluids. 1969. V. 12. № 4. P. 778–790.
8. Габович М.Д., Порицкий В.Я. Исследование нелинейных волн на поверхности жидкого металла, находящегося в электрическом поле // Письма в ЖЭТФ. 1981. Т. 33. Вып. 6. С. 320–324.
9. Габович М.Д., Порицкий В.Я. О механизме возбуждения нелинейных капиллярных волн на поверхности жидкого металла, находящегося в контакте с плотной плазмой // ЖЭТФ. 1983. Т. 85. № 1. С. 146–154.
10. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.

Ярославль

Поступила в редакцию  
3.IV.1997