

УДК 532.54

© 1998 г. А.Д. ЧЕРНЫШОВ

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ТРУБЕ ТРЕУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

Методом суперпозиций одномерных решений получено точное решение нестационарной двумерной задачи о движении несжимаемой вязкой жидкости в жесткой трубе, сечение которой – правильный треугольник. Жидкость движется под действием зависящего от времени перепада давления. Частицы жидкости могли иметь неравномерное начальное распределение скорости по сечению трубы. Получены решения в виде рядов для случаев, когда жидкость разгоняется из состояния покоя переменным перепадом давления, а также в установившемся колебательном режиме под действием периодически пульсирующего перепада давления.

Работ по данному направлению, в которых приводятся аналитические решения, немного. На основе аналогии между стационарными задачами о кручении упругого стержня [1] и течением вязкой жидкости в цилиндрической трубе в [2, 3] приведено стационарное решение задачи о движении вязкой жидкости по трубе треугольного сечения. Из динамических задач следует отметить частные решения для круглой трубы Гельмгольца [4] и Слезкина [5].

1. Постановка и решение нестационарной задачи. Рассмотрим нестационарное течение вязкой несжимаемой жидкости в трубе, поперечное сечение которой – правильный треугольник высотой h , под действием перепада давления $p(t)$. Будем предполагать, что скорости частиц жидкости направлены вдоль образующей трубы и их распределение в каждом сечении трубы одинаковое, т.е. $u_z = u(t, x, y)$, $u_x = u_y = 0$.

Для определения u имеем задачу [2]

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + p(t) \quad (1.1)$$

$$v(0, x, y) = f(x, y), \quad v|_{\Gamma} = 0, \quad (x, y) \in \Omega \quad (1.2)$$

где Ω – область правильного треугольника, Γ – его граница.

Введем вспомогательные переменные ξ_i , задающие расстояния от сторон треугольника до точки из Ω

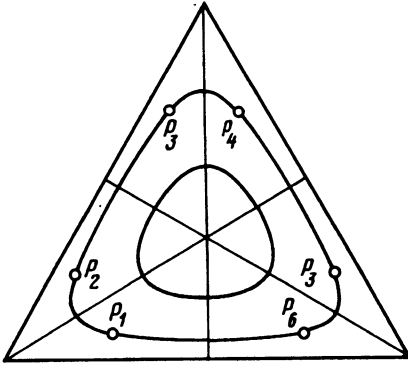
$$\xi_i = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \mathbf{n}_i, \quad i = 1, 2, 3$$

Здесь \mathbf{r} – радиус-вектор произвольной точки с координатами (x, y) из Ω , \mathbf{r}_i – радиус-вектор вершин треугольника Ω , \mathbf{n}_i – единичные нормали к сторонам треугольника, направленные внутрь Ω . Нормали \mathbf{n}_i и переменные ξ_i обладают свойствами

$$\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2 = \mathbf{n}_1 \mathbf{n}_3 = \mathbf{n}_2 \mathbf{n}_3 = -\frac{1}{2}$$

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = h, \quad 0 \leq \xi_i \leq h$$

Уравнения сторон треугольника имеют вид $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$. Чтобы найти решение



Сечение трубы, P_i – симметричные относительно высот треугольника точки. Линии $v = \text{const}$ – треугольные овалы

обладающей свойством тройной симметрии, если $\psi(P_1) = \psi(P_2) = \dots = \psi(P_6)$.

Если предположить, что в (1.2) начальное условие $f(x, y)$ имеет тройную симметрию относительно точек области Ω , то решение задачи (1.3), (1.2) также будет обладать тройной симметрией. Наиболее простую такую зависимость можно представить алгоритмом

$$W = F(t, \xi_1) + F(t, \xi_2) + F(t, \xi_3) - F(t, \xi_1 + \xi_2) - F(t, \xi_1 + \xi_3) - F(t, \xi_2 + \xi_3) \quad (1.4)$$

Подставив решение (1.4) в граничное условие из (1.2), получим

$$W|_{\Gamma} = F(t, 0) - F(t, h) = 0 \quad (1.5)$$

Из (1.5) следует, что если функция $F(t, \xi_i)$ периодическая с периодом, кратным h , то W удовлетворяет граничному условию из (1.2). Кроме того, имеет место следующее равенство: $\Delta F(t, \xi_i) = \partial^2 F(t, \xi_i) / \partial \xi_i^2$. Таким образом, если функция $F(t, \xi_i)$ – решение задачи

$$\frac{\partial F}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_i^2}, \quad F(t, 0) = F(t, h) \quad (1.6)$$

то функция W из (1.4) – решение задачи (1.3), (1.2). Решения задачи (1.6) имеют вид [6]

$$F(t, \xi_i) = \sum_{m=1}^{\infty} A_{m/2} \sin \frac{m\pi \xi_i}{h} \exp - \left(\frac{am\pi}{h} \right)^2 t \quad (1.7)$$

После подстановки (1.7) в (1.4) получим

$$W = \sum_{m=1}^{\infty} A_{m/2} \Phi_{m/2} \exp - \left(\frac{am\pi}{h} \right)^2 t \quad (1.8)$$

$$2\Phi_{m/2} = \sin \frac{m\pi \xi_1}{h} + \sin \frac{m\pi \xi_2}{h} + \sin \frac{m\pi \xi_3}{h} - \sin \frac{m\pi(\xi_1 + \xi_2)}{h} - \sin \frac{m\pi(\xi_1 + \xi_3)}{h} - \sin \frac{m\pi(\xi_2 + \xi_3)}{h} \quad (1.9)$$

Если в (1.9) $m = 2n + 1$, то с помощью (1.4) будем иметь $\Phi_{n+1/2} = 0$, а если $m = 2n$,

задачи (1.1), (1.2), предварительно рассмотрим вспомогательное уравнение

$$\frac{\partial W}{\partial t} = a^2 \Delta W, \quad a^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad (1.3)$$

с начальным и граничным условиями (1.2).

В дальнейшем понадобится понятие тройной симметрии. Для его определения проведем три высоты треугольника Ω . Тогда Ω будет состоять из шести равных между собой прямоугольных треугольников Ω_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) (см. фигуру). Каждой точке P_1 в области Ω_1 соответствуют точки P_2, \dots, P_6 в областях $\Omega_2, \dots, \Omega_6$, полученные симметричным отображением точек через смежные стороны соседних треугольников. Будем называть функцию $\psi(x, y)$

то

$$\varphi_n = \sin \frac{2n\pi\xi_1}{h} + \sin \frac{2n\pi\xi_2}{h} + \sin \frac{2n\pi\xi_3}{h} \quad (1.10)$$

Теперь решение W из (1.8) примет вид

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \varphi_n \exp\left(-\left(\frac{2an\pi}{h}\right)^2 t\right) \quad (1.11)$$

Множество функций $\{\varphi_n(\xi_1, \xi_2)\}$ (1.10) образует ортогональный базис в области Ω [7]

$$\iint_{\Omega} \varphi_i \varphi_j dS = 0, \quad i \neq j, \quad \iint_{\Omega} \varphi_n^2 dS = \frac{\sqrt{3}}{2} h^2$$

Для вычисления двойных интегралов по области Ω сделаем преобразование $(x, y) \rightarrow (\xi_1, \xi_2)$, которое переводит Ω в прямоугольный треугольник со сторонами $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$, $\xi_1 + \xi_2 = h$. Якобиан данного преобразования $J_0 = 2/\sqrt{3}$, поэтому

$$\iint_{\Omega} f dS = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^h d\xi_1 \int_0^{h-\xi_1} f d\xi_2 \quad (1.12)$$

Выражение (1.12) понадобится для нахождения коэффициентов в решении (1.11) при выполнении начальных условий.

Система (1.10) функций $\{\varphi_n\}$ хотя и ортогональна, но не полная для области Ω так же, как не является полной система функций $\{\sin 2n\pi x/h\}$ на отрезке $0 \leq x \leq h$. Поэтому решение (1.11) может удовлетворять только частным видам начальных условий. Для этих случаев представим A_n как обобщенные коэффициенты Фурье функции $f(x, y)$

$$A_n = \frac{2}{\sqrt{3}h^2} \iint_{\Omega} f(x, y) \varphi_n(\xi_1, \xi_2) dS$$

Для начального условия $f(x, y) = 1$ решение (1.11) примет вид

$$W = U = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \varphi_n \exp\left(-\left(\frac{2an\pi}{h}\right)^2 t\right) \quad (1.13)$$

Для доказательства выполнения начального условия $U(t=0) = 1$ воспользуемся рядом Фурье

$$\frac{1}{2} - x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{n\pi}, \quad 0 < x < 1 \quad (1.14)$$

Из (1.13) при $t=0$ с помощью (1.14) будем иметь

$$U|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left(\sin \frac{2n\pi\xi_1}{h} + \sin \frac{2n\pi\xi_2}{h} + \sin \frac{2n\pi\xi_3}{h} \right) = \frac{h-2\xi_1}{h} + \frac{h-2\xi_2}{h} + \frac{h-2\xi_3}{h} = 1$$

что и требовалось доказать.

Если применить принцип Дюгамеля [6] к функции $(1-U)$, где U взято из (1.13), то после простых преобразований получим искомое решение уравнения (1.1) с начальным и граничным условиями (1.2)

$$v = W(t, \xi_1, \xi_2) + \frac{1}{\rho_0} \int_0^t U(t-\tau, \xi_1, \xi_2) p(\tau) d\tau \quad (1.15)$$

2. Частные решения. Для случаев, когда жидкость разгоняется из состояния покоя перепадом давления $p(t)$, в решении (1.15) следует взять $w = 0$

$$v = \frac{1}{\rho_0} \int_0^t U(t - \tau, \xi_1, \xi_2) p(\tau) d\tau \quad (2.1)$$

Если жидкость приводится в движение пульсирующим перепадом давления $p(t) = q_0 + q_1 \cos \omega t$, то из (1.15) получим

$$v = W + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \left\{ \frac{q_0 h^2}{2\mu\pi^3 n^3} [1 - \exp(-\alpha_n t)] + \frac{2q_1}{n\pi\rho} \frac{\omega \sin \omega t + \alpha_n \cos \omega t - \alpha_n \exp(-\alpha_n t)}{\omega^2 + \alpha_n^2} \right\} \quad (2.2)$$

$$\alpha_n = 4\mu\pi^2 n^2 / \rho h^2$$

Упростим формулу (2.2), воспользовавшись рядом Фурье

$$\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{2\pi^3 n^3}, \quad x \in [0, 1] \quad (2.3)$$

Заменяя в (2.3) x на ξ_i/h , из (2.2) после упрощений получим

$$v = W + \frac{q_0}{\mu h} \xi_1 \xi_2 \xi_3 - \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \exp(-\alpha_n t) \left[\frac{q_0 h^2}{2\mu\pi^3 n^3} + \frac{8q_1 \mu \pi n}{\rho^2 h^2 (\omega^2 + \alpha_n^2)} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \frac{2q_1}{n\pi\rho} \frac{\omega \sin \omega t + \alpha_n \cos \omega t}{\omega^2 + \alpha_n^2} \quad (2.4)$$

В установившемся режиме колебательного движения при $t \rightarrow \infty$ из (2.4) имеем

$$v = \frac{q_0}{\mu h} \xi_1 \xi_2 \xi_3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2q_1 \varphi_n}{n\pi\rho} \frac{\omega \sin \omega t + \alpha_n \cos \omega t}{\omega^2 + \alpha_n^2} \quad (2.5)$$

Предельное решение (2.5) удовлетворяет уравнению (1.1) и граничным условиям из (1.2). Как частный случай при $q_1 = 0$ отсюда получим решение задачи Пуазейля об установившемся движении несжимаемой вязкой жидкости в трубе треугольного сечения под действием постоянного перепада давления q_0 : $v = (q_0/\mu h) \xi_1 \xi_2 \xi_3$. Линии уровней $v = \text{const}$ представляют собой выпуклые треугольные овалы (фигура). Максимальное значение скорости v достигает в центре сечения трубы

$$v_{\max} = q_0 h^2 / 27\mu, \quad \xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = h/3$$

Для объемного расхода жидкости Q через сечение трубы и средней скорости v_m получим

$$Q = \frac{\sqrt{3} q_0 h^4}{180\mu}, \quad v_m = \frac{Q}{S} = \frac{q_0 h^2}{60\mu} \quad (2.6)$$

Если в трубе эллиптического сечения [2] отношение средней скорости к максимальной равно 0,5, то в случае трубы треугольного сечения это отношение равно 0,45, т.е. изменение формы поперечного сечения трубы слабо влияет на отношение v_m/v_{\max} . При помощи выражения для расхода Q из (2.6) можно получить следующий результат.

Пусть труба, первоначально имеющая форму круглого цилиндра, деформирована при условии постоянства периметра и приняла форму правильного треугольника. Тогда

введем коэффициент расхода жидкости K как отношение расхода через круглую трубу к расходу через деформированную трубу. Для рассматриваемого случая получим

$$K = \frac{Q_0}{Q_\Delta} = \frac{405}{2\sqrt{3}\pi^3} = 3,77, \quad Q_0 = \frac{\pi q_0 a^4}{8\mu}, \quad Q_\Delta = \frac{\sqrt{3}q_0 h^4}{180\mu}$$

Заключение. Полученные в работе решения имеют достаточно простой вид и могут быть реализованы в инженерных целях на простейших ЭВМ. При пульсирующем перепаде давления распределение скорости по сечению треугольной трубы состоит из трех частей. Первая часть учитывает влияние характера начального распределения скорости, вторая пропорциональна постоянной составляющей пульсирующего давления и по экспоненте релаксирует за время $\rho h^2/4\mu\pi^2$ к стационарному значению. Третья часть – колебательная, амплитуда которой пропорциональна амплитуде колебаний пульсирующего перепада давления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сен-Венан Б. Мемуар о кручении призм. Мемуар об изгибе призм. М.: Физматгиз, 1961. 518 с.
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973. 847 с.
3. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
4. Helmholtz H. Studien Ueber electriche. Grenzschichten // Ann. Phys. und Chem. В. 7. S. 337–382.
5. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гостехиздат, 1955. 520 с.
6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.
7. Ильин В.А. Спектральная теория дифференциальных операторов. М.: Наука, 1991. 367 с.

Воронеж

Поступила в редакцию
4.II.1997