

УДК 532.51.013.4:538.222

© 1998 г. В.М. КОРОВИН, А.А. КУБАСОВ

РЭЛЕЙ-ТЕЙЛОРОВСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ТОНКОГО СЛОЯ ВЯЗКОЙ МАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ В ТАНГЕНЦИАЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Рассматривается находящийся в однородном горизонтальном магнитном поле слой вязкой магнитной жидкости, верхней границей которого служит горизонтальная твердая стенка, а нижняя граница является свободной поверхностью. Предполагается, что в начальный момент времени свободная поверхность представляет случайным образом слабо деформированную горизонтальную плоскость. В рамках линеаризованной системы уравнений феррогидродинамики, описывающих эволюцию пространственных возмущений, получено дисперсионное соотношение для волн в слое произвольной толщины. Теоретически и экспериментально исследовано влияние тангенциального магнитного поля на распад тонкого слоя.

Из теории и эксперимента известно [1–4], что достаточно сильное однородное магнитное поле, ортогональное плоской поверхности покоящейся магнитной жидкости, порождает неустойчивость гидростатического состояния жидкости с плоской свободной поверхностью и вызывает появление поверхностной структуры, состоящей из гексагональных ячеек. Тангенциальное поле вызывает анизотропию волнового движения: скорость прогрессивных волн, распространяющихся параллельно (или антипараллельно) направлению поля увеличивается, в то время как скорость волн, распространяющихся поперек магнитных силовых линий, никак не изменяется [2]. В случае же наклонного поля, нормальная компонента которого имеет величину, достаточную для возникновения неустойчивости, тангенциальная компонента оказывает стабилизирующее влияние на периодические по каждой из горизонтальных координат возмущения первоначально свободной поверхности, волновые числа которых заключены в некотором диапазоне [3].

Аналогичным образом проявляется воздействие тангенциального поля на развитие рэлей-тейлоровской неустойчивости в системе из двух слоев однородных несмешивающихся магнитных жидкостей, имеющих различные плотности и магнитные проницаемости. В работах [2, 4] теоретический анализ рэлей-тейлоровской неустойчивости проведен в рамках линейной теории. При учете же нелинейных эффектов [5, 6] тангенциальное поле в зависимости от определяющих параметров задачи может оказывать как стабилизирующее, так и дестабилизирующее воздействие. В [4, 5] рассматривается случай, когда толщины жидких слоев много больше длины волны возмущений. В [6, 7] изучен предельный случай, когда соприкасающиеся между собой несмешивающиеся магнитные жидкости занимают полностью верхнее и нижнее полупространства. В [4–6] в рамках плоской задачи исследована рэлей-тейлоровская неустойчивость невязких магнитных жидкостей. Попытка нахождения вклада ньютоновской вязкости в критерий стабилизации при развитии рэлей-тейлоровской неустойчивости магнитных жидкостей [7], предпринятая в предположении о потенциальности движения, несостоятельна и приводит к отмеченному в [7] противоречию при предельном переходе к случаю невязкой жидкости.

Применительно к рэлей-тейлоровской неустойчивости ньютоновских немагнитных жидкостей предположение о потенциальности течения вполне допустимо для толстых слоев [8]. Физически оно означает, что характерное время развития неустойчивости много меньше характерного времени диффузии завихренности поперек слоев, ввиду чего эффекты вязкости проявляются [9] лишь в тонких, примыкающих к поверхности раздела областях, наличием которых при постановке задачи в рамках идеальной жидкости пренебрегается.

Если же рассматриваемая система состоит из тонкого слоя жидкости на горизонтальной плоской стенке, поверх которого расположен толстый слой жидкости большей плотности [8, 10, 11], то наряду с силой тяжести и капиллярными силами вязкие напряжения играют определяющую роль в процессе развития рэлей-тейлоровской неустойчивости. Аналогичная ситуация имеет место и в случае тонкого слоя жидкости, верхней границей которого служит горизонтальная стенка, а нижней – свободная поверхность [12].

В отличие от имеющихся работ в данной работе исследовано влияние однородного тангенциального магнитного поля на длинноволновые возмущения со всеми возможными направлениями волнового вектора при развитии рэлей-тейлоровской неустойчивости тонкого слоя вязкой магнитной жидкости, нижняя граница которого является свободной поверхностью, а его верхней границей служит горизонтальная немагнитная стенка. Изучен случай, когда длина волны и обусловленная вязкостью жидкости диффузионная длина имеют одинаковый порядок, а толщина слоя много меньше этих масштабов. Приведены результаты экспериментального исследования влияния тангенциального поля на распад слоя под действием силы тяжести.

1. Постановка задачи. Рассматривается находящийся в однородном тангенциальном магнитном поле \mathbf{H}_0 слой толщины d покоящейся магнитной жидкости с горизонтальными границами (фиг. 1). Нижняя граница является свободной поверхностью, а верхняя представляет собой твердую стенку из немагнитного материала.

При рассматриваемой геометрии индукция внутри слоя $\mathbf{V}_0 = \mu\mathbf{H}_0$ и намагниченность жидкости $\mathbf{M}_0 = \mathbf{V}_0/\mu_0 - \mathbf{H}_0$ однородны. Предполагается, что жидкость однородна по составу и что ее магнитная проницаемость μ зависит лишь от модуля поля, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная.

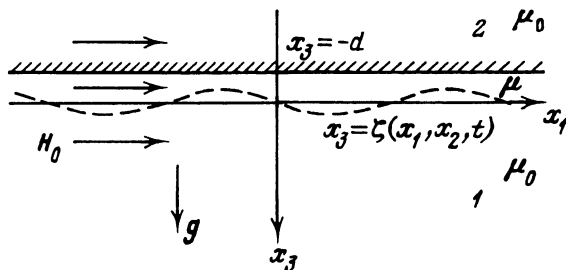
Введем декартову систему координат x_1, x_2, x_3 , ось x_1 которой направлена вдоль \mathbf{H}_0 , ось x_3 – вертикально вниз, а плоскость $x_3 = 0$ совпадает со свободной поверхностью жидкости. Поскольку $\nabla\mathbf{H}_0 = 0$, а магнитные силовые линии не пересекают свободную поверхность, то поле не оказывает силового воздействия на магнитную жидкость. Ввиду этого давление P_0 в плоском горизонтальном слое линейно падает с удалением от свободной поверхности жидкости: $P_0 = p_a + \rho g x_3$; здесь p_a – давление воздуха вблизи свободной поверхности, ρ – плотность жидкости, g – ускорение силы тяжести.

Сформулируем в линейной постановке задачу о развитии возмущений, приводящем в итоге к разрушению гидростатического состояния жидкости P_0, \mathbf{M}_0 с плоской свободной поверхностью.

Пусть $x_3 = \zeta(x_1, x_2, t)$ представляет уравнение свободной поверхности жидкости при наличии волн малой амплитуды. Вводя потенциал малого возмущения магнитного поля в жидкости $\mathbf{h} = \nabla f(x_1, x_2, x_3, t)$, магнитные поля, индукцию, а также намагниченность жидкости, возмущенные за счет вызываемой волнами деформации свободной поверхности, запишем в виде

$$\mathbf{H} = \nabla(H_0 x_1 + f), \mathbf{H}_j = \nabla(H_0 x_1 + f_j), j = 1, 2, \mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{b}, \mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \mathbf{m}_l$$

где \mathbf{H} – поле в жидкости, индекс 1 относится к полю в области $x_3 > \zeta$, а индекс 2 – к полю в области $x_3 < -d$. Аналогичным образом представим распределение давления P в жидкости при наличии волн: $P = P_0 + p(x_1, x_2, x_3, t)$.



Фиг. 1. Обозначения в задаче о неустойчивости слоя жидкости

С точностью до малых первого порядка имеем

$$H - H_0 = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad M - M_0 = \chi_t^\circ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \chi_t^\circ = \left. \frac{dM}{dH} \right|_{H=H_0} \quad (1.1)$$

$$\mathbf{m}_t = \chi_t^\circ \frac{\partial f}{\partial x_1} \mathbf{a}_1 + \chi_0 \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \mathbf{a}_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} \mathbf{a}_3 \right), \quad \chi_0 = \frac{M_0}{H_0}, \quad \mu_r^\circ = 1 + \chi_0$$

$$\mathbf{b} = \mu_t^\circ \frac{\partial f}{\partial x_1} \mathbf{a}_1 + \mu^\circ \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \mathbf{a}_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} \mathbf{a}_3 \right), \quad \mu_t^\circ = \mu_0(1 + \chi_t^\circ), \quad \mu^\circ = \mu_0 \mu_r^\circ$$

где $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ – единичные векторы вдоль соответствующих осей координат. Принимая во внимание выражение (1.1) для \mathbf{b} , из уравнений магнитостатики имеем

$$\xi^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = 0, \quad \xi = \sqrt{\frac{\mu_t^\circ}{\mu^\circ}} \ll 1 \quad (1.2)$$

$$\Delta f_j = 0, \quad j = 1, 2, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

С учетом первых двух выражений (1.1) движение магнитной жидкости в линейном приближении описывается уравнениями

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + \mu_0 M_0 \nabla \frac{\partial f}{\partial x_1} \quad (1.3)$$

где $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ – скорость, а η – коэффициент динамической вязкости жидкости.

Линеаризованные кинематическое и динамические условия на свободной поверхности жидкости и краевые условия для скорости на стенке записываются в виде

$$x_3 = 0: \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = v_3, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} = 0 \quad (1.4)$$

$$p = -\rho g \zeta + 2\eta \frac{\partial v_3}{\partial x_3} - \alpha \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_2^2} \right) \quad (1.5)$$

$$x_3 = -d: \quad v_1 = 0, \quad v_2 = 0, \quad v_3 = 0$$

где α – коэффициент поверхностного натяжения.

В рассматриваемом приближении условия непрерывности потенциала магнитного поля и нормальной составляющей индукции на поверхностях раздела магнитной и не-

магнитных сред имеют вид

$$x_3 = 0: f = f_1, \mu_r \frac{\partial f}{\partial x_3} - \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = M_0 \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} \quad (1.6)$$

$$x_3 = -d: f = f_2, \mu_r \frac{\partial f}{\partial x_3} = \frac{\partial f_2}{\partial x_3}$$

Возмущения магнитных полей в областях 1, 2 при удалении точки наблюдения от свободной поверхности жидкости, естественно, затухают

$$\nabla f_1 \rightarrow 0 \quad (x_3 \rightarrow \infty), \quad \nabla f_2 \rightarrow 0 \quad (x_3 \rightarrow -\infty) \quad (1.7)$$

Постановка задачи о рэлей-тейлоровской неустойчивости включает также задание в начальный момент времени возмущения исходной плоской свободной поверхности жидкости и поля скоростей.

Для упрощения анализа эволюции пространственных возмущений преобразуем уравнения гидродинамики и относящиеся к ним краевые условия. С этой целью представим поле скоростей с помощью скалярного $\phi(x_1, x_2, x_3, t)$ и векторного $\mathbf{S}(x_1, x_2, x_3, t) = (\sigma, \psi, \sigma)$ потенциалов

$$\mathbf{v} = \nabla \phi + \text{rot} \mathbf{S} \quad (1.8)$$

При подстановке выражения (1.8) в уравнение неразрывности (1.3) получаем

$$\Delta \phi = 0 \quad (1.9)$$

С учетом (1.8), (1.9) уравнение движения (1.3) принимает вид

$$\nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} - \frac{\mu_0}{\rho} \frac{\partial f}{\partial x_1} M_0 \right) + \text{rot} \left(\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{S} \right) = 0, \quad \mathbf{v} = \frac{\boldsymbol{\eta}}{\rho} \quad (1.10)$$

Таким образом, если ϕ – гармоническая функция, то в частном случае, когда

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + p - \mu_0 M_0 \frac{\partial f}{\partial x_1} = w_1(t), \quad \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{S} = \nabla w_2(x_1, x_2, x_3, t) \quad (1.11)$$

уравнение (1.10) удовлетворяется. При этом взаимная связь функций ϕ , σ , ψ осуществляется за счет краевых условий. Включив в скалярный потенциал первообразную функции $w_1(t)$ со знаком минус и положив $w_2 = w_2(t)$, из (1.11) имеем

$$p = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mu_0 M_0 \frac{\partial f}{\partial x_1} \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \nu \Delta \sigma, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \nu \Delta \psi \quad (1.13)$$

При $M_0 = 0$ система уравнений (1.9), (1.12), (1.13) широко используется в пространственных задачах теории колебаний вязкой жидкости [13]. По сравнению с исходными уравнениями (1.3) эта система описывает, естественно, более узкий класс движений. Применительно к плоской задаче (случай $\partial/\partial x_2 = 0$, $\sigma = 0$) о рэлей-тейлоровской неустойчивости вязких немагнитных жидкостей, заполняющих верхнее и нижнее полупространства, уравнения для p и ψ , а также калибровочное преобразование и различные условия калибровки скалярного и векторного потенциалов обсуждаются в [14].

Краевые условия на поверхности жидкости (1.4) и на твердой стенке (1.5) при учете

представлений (1.8), (1.12) принимают вид

$$x_3 = 0: \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} - \frac{\partial \sigma}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \quad (1.14)$$

$$2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x_3} - \frac{\partial \sigma}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2} = 0$$

$$2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_3^2} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x_3} - \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right) = 0$$

$$\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \mu_0 M_0 \frac{\partial f}{\partial x_1} - \rho g \zeta + 2\eta \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} - \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right) \right] - \alpha \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_2^2} \right) = 0$$

$$x_3 = -d: \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi}{\partial x_3} = 0 \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \frac{\partial \sigma}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} - \frac{\partial \sigma}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = 0$$

Исследование развития возмущений проводится далее на базе уравнений Лапласа (1.2), (1.9) и уравнений теплопроводности (1.13), решения которых должны удовлетворять краевым условиям (1.6), (1.7), (1.14), (1.15).

2. Дисперсионное соотношение. Возникшее в начальный момент времени возмущение $\zeta(x_1, x_2, 0) = z(x_1, x_2)$ плоской поверхности жидкости, достаточно быстро убывающее при $x_1, x_2 \rightarrow \pm\infty$, можно представить в виде интеграла Фурье. В рассматриваемом приближении дальнейшая временная эволюция каждой фурье-компоненты в процессе развития рэлей-тейлоровской неустойчивости происходит независимо от других фурье-компонент, что позволяет построить решение задачи в виде суперпозиции частных решений вида

$$(\zeta, \varphi, \sigma, \psi, f, f_j) = e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2 - \omega t)} [a, \Phi(x_3), \Sigma(x_3), \Psi(x_3), F(x_3), F_j(x_3)], \quad (2.1)$$

$$i = \sqrt{-1}, \quad j = 1, 2$$

Комплексные амплитудные функции (перечисленные в квадратных скобках) зависят также от действительных параметров k_1, k_2 – компонент волнового вектора $\mathbf{k} = (k_1, k_2, 0)$.

После подстановки выражений (2.1) в уравнения (1.2), (1.9), (1.13) и в краевые условия (1.6), (1.14), (1.15) получаем

$$F'' - \chi^2 F = 0, \quad F_j'' - k^2 F_j = 0, \quad \chi = \sqrt{\xi^2 k_1^2 + k_2^2}, \quad k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}, \quad j = 1, 2 \quad (2.2)$$

$$\Phi'' - k^2 \Phi = 0, \quad \Sigma'' - m^2 \Sigma = 0, \quad \Psi'' - m^2 \Psi = 0, \quad m = \sqrt{k^2 - i \frac{\omega}{\nu}} \quad (2.3)$$

$$x_3 = 0: \quad F = F_1, \quad \mu_r F' - F_1' = iaM_0 k_1 \quad (2.4)$$

$$\omega a - i\Phi' - k_2 \Sigma + k_1 \Psi = 0$$

$$2ik_1 \Phi' + k_1 k_2 \Sigma + ik_2 \Sigma' - k_1^2 \Psi - \Psi'' = 0$$

$$2ik_2 \Phi' + k_2^2 \Sigma + \Sigma'' - ik_1 \Sigma' - k_1 k_2 \Psi = 0$$

$$i\rho\omega\Phi + i\mu_0 FM_0 k_1 + a(\rho g - \alpha k^2) - 2\eta(\Phi'' - ik_2 \Sigma' + ik_1 \Psi') = 0$$

$$x_3 = -d: F = F_2, \mu_r \overset{\circ}{F}' = F_2' \quad (2.5)$$

$$ik_1 \Phi + ik_2 \Sigma - \Psi' = 0, ik_2 \Phi - ik_1 \Sigma + \Sigma' = 0, \Phi' - ik_2 \Sigma + ik_1 \Psi = 0$$

Решения уравнений (2.2), (2.3) имеют вид

$$F = A_1 e^{xx_3} + A_2 e^{-xx_3}, F_1 = B_1 e^{-kx_3}, F_2 = B_2 e^{kx_3} \quad (2.6)$$

$$\Phi = C_1 \operatorname{ch} kx_3 + C_2 \operatorname{sh} kx_3, \Sigma = D_1 \operatorname{ch} mx_3 + D_2 \operatorname{sh} mx_3, \Psi = E_1 \operatorname{ch} mx_3 + E_2 \operatorname{sh} mx_3$$

При записи $F_1(x_3), F_2(x_3)$ учтены лишь исчезающие при $x_3 \rightarrow \pm\infty$ возмущения поля. Фигурирующие в (2.6) константы определяются из системы уравнений, получающейся при подстановке решений (2.6) в краевые условия (2.4)–(2.5)

$$A_1 + A_2 - B_1 = 0$$

$$iaM_0 k_1 - \mu_r \kappa A_1 + \mu_r \kappa A_2 - kB_1 = 0$$

$$e^{-\kappa d} A_1 + e^{\kappa d} A_2 - e^{-kd} B_2 = 0$$

$$\mu_r \kappa e^{-\kappa d} A_1 - \mu_r \kappa e^{\kappa d} A_2 - ke^{-kd} B_2 = 0$$

$$\omega a - ikC_2 - k_2 D_1 + k_1 E_1 = 0$$

$$2ik_1 k C_2 + k_1 k_2 D_1 + ik_2 m D_2 - (k_1^2 + m^2) E_1 = 0$$

$$2ik_2 k C_2 + (k_2^2 + m^2) D_1 - ik_1 m D_2 - k_1 k_2 E_1 = 0$$

$$(\rho g - \alpha k^2) a + i\mu_0 M_0 k_1 A_1 + i\mu_0 M_0 k_1 A_2 + (i\rho\omega - 2\eta k^2) C_1 + 2i\eta k_2 m D_2 - 2i\eta k_1 m E_2 = 0$$

$$k_1 \operatorname{ch} kd C_1 - k_1 \operatorname{sh} kd C_2 + k_2 \operatorname{ch} md D_1 - k_2 \operatorname{sh} md D_2 - im \operatorname{sh} md E_1 + im \operatorname{ch} md E_2 = 0$$

$$k_2 \operatorname{ch} kd C_1 - k_2 \operatorname{sh} kd C_2 + (im \operatorname{sh} md - k_1 \operatorname{ch} md) D_1 + (k_1 \operatorname{sh} md - im \operatorname{ch} md) D_2 = 0$$

$$ik \operatorname{sh} kd C_1 - ik \operatorname{ch} kd C_2 - k_2 \operatorname{ch} md D_1 + k_2 \operatorname{sh} md D_2 + k_1 \operatorname{ch} md E_1 - k_1 \operatorname{sh} md E_2 = 0$$

Условие существования нетривиального решения этой однородной системы уравнений относительно $a, A_j, B_j, C_j, D_j, E_j, j = 1, 2$, – равенство нулю ее определителя – приводит к дисперсионному соотношению для волн на обращенной вниз свободной поверхности слоя вязкой магнитной жидкости, "подвешенного" к твердой горизонтальной стенке

$$\begin{aligned} & \nu^2 \frac{(q+r) \operatorname{ch}[d(k-m)] - (q-r) \operatorname{ch}[d(k+m)] - 8k^2 m(k^2 + m^2)}{(k+m) \operatorname{sh}[d(k-m)] - (k-m) \operatorname{sh}[d(k+m)]} + \\ & + \frac{\mu_0 k}{\rho} \frac{k \operatorname{th} \kappa d + \mu_r \kappa}{\operatorname{th} \kappa d [(\mu_r \kappa)^2 + k^2] + 2\mu_r \kappa k} (M_0 k_1)^2 - gk + \frac{\alpha}{\rho} k^3 = 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$q = k^5 + 6k^3 m^2 + km^4, \quad r = 5k^4 m + 2k^2 m^3 + m^5$$

$$m = \sqrt{k^2 + i \frac{\omega}{\nu}}, \quad k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}, \quad \kappa = \sqrt{\frac{k_1^2}{\mu(H_0)} \frac{dB}{dH} \Big|_{H=H_0} + k_2^2}$$

В случае $M_0 k_1 = 0$ выражение (2.7) с точностью до обозначений отличается лишь знаком слагаемого, содержащего ускорение силы тяжести, от дисперсионного соотношения для поверхностных волн в слое вязкой жидкости конечной глубины [15]. Указанное различие обусловлено тем, что рэлей-тейлоровская неустойчивость возникает в случае, когда массовая сила направлена от тяжелой к более легкой (в рассматриваемом случае это воздух) жидкости.

3. Неустойчивость тонкого слоя. Рассмотрим случай, когда длина волны и диффузионная длина $\delta = \sqrt{\nu|\omega|^{-1}}$ имеют одинаковый порядок, а толщина слоя жидкости много меньше этих масштабов: $kd = \varepsilon \ll 1$, $d/\delta = O(\varepsilon)$, так что $lmd = O(\varepsilon)$. Разлагая входящие в (2.7) гиперболические функции в степенные ряды, находим главный член разложения по ε дисперсионного соотношения (2.7)

$$\omega = is, \quad s = \frac{d^3}{3\eta} \left[\rho g k^2 - \frac{\mu_0}{2} k (M_0 k_1)^2 - \alpha k^4 \right] \quad (3.1)$$

При учете (3.1) из записи искомых функций (2.1) видно, что при $s > 0$ гармоники начальных возмущений с течением времени нарастают, а при $s < 0$ – затухают. В отличие от поверхностного натяжения, которое независимо от направления \mathbf{k} всегда стабилизирует коротковолновые гармоники, стабилизация тангенциальным магнитным полем коротковолновой части спектра возмущений происходит, как видно из (3.1), лишь при $k_1 \neq 0$. В случае $\mathbf{k} = k\mathbf{a}_2$ выражение (3.1) совпадает с дисперсионным соотношением [11, 12], к которому приводит линейный анализ рэлей-тейлоровской неустойчивости на базе уравнений гидродинамики, упрощенных в рамках предположений, использующихся в теории смазки.

С учетом существенно упрощенного дисперсионного соотношения (3.1) форма свободной поверхности жидкости при $t > 0$, удовлетворяющая начальному условию $\zeta(x_1, x_2, 0) = z(x_1, x_2)$, записывается в виде

$$\zeta(x_1, x_2, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a(k_1, k_2) e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2) + s(k_1, k_2)t} dk_1 dk_2 \quad (3.2)$$

$$a(k_1, k_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} z(x_1, x_2) e^{-i(k_1 x_1 + k_2 x_2)} dx_1 dx_2$$

Начальные условия для поля скоростей в используемом приближении не рассматриваются.

Обращаясь к дисперсионному соотношению (3.1), нетрудно показать, что при $M_0 \neq 0$ наиболее быстро с течением времени растут гармоники с волновыми векторами, перпендикулярными полю

$$\mathbf{k} = \pm k_{m2} \mathbf{a}_2, \quad k_{m2} = k_c / \sqrt{2}, \quad k_c = \sqrt{\rho g / \alpha}, \quad s_{m2} = \rho g^2 d^3 / (12\alpha\nu)$$

Здесь k_c – капиллярное волновое число [12], $s_{m2} = \text{Im } \omega(0, \pm k_{m2})$.

Среди гармоник с волновыми векторами, параллельными (или антипараллельными) \mathbf{H}_0 , наиболее быстрый рост испытывают те, для которых

$$\mathbf{k} = \pm k_{m1} \mathbf{a}_1, \quad \text{Im } \omega(\pm k_{m1}, 0) = s_{m1}$$

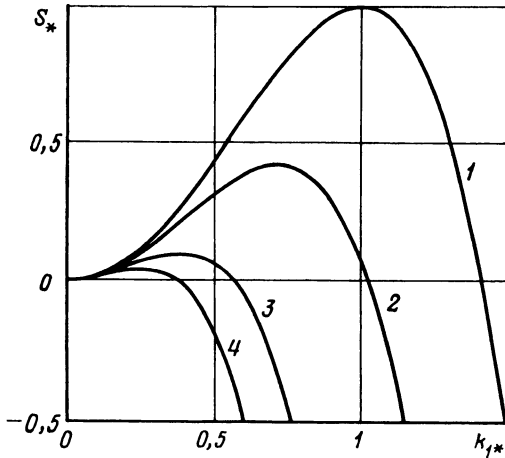
$$k_{m1} = \frac{1}{8} k_{m2} [-3Q + (9Q^2 + 64)^{1/2}], \quad Q = \frac{\mu_0}{\sqrt{2\alpha\rho g}} M_0^2 \quad (3.3)$$

$$s_{m1} = s_{m2} \left[1 - Q \left(1 + \frac{9}{64} Q^2 \right)^{3/2} + \frac{9}{16} Q^2 \left(1 + \frac{3}{32} Q^2 \right) \right]$$

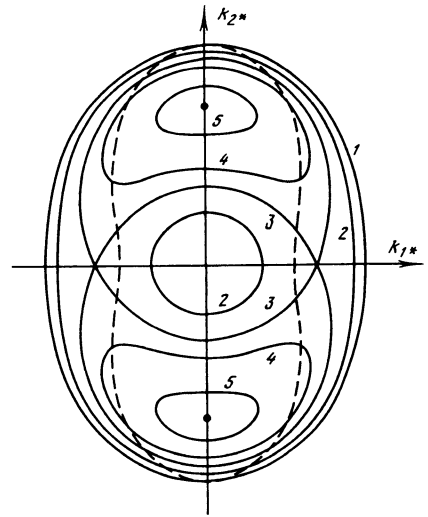
При переходе в (3.1) к безразмерным переменным $\mathbf{k}_* = \mathbf{k}/k_{m2}$, $s_* = s/s_{m2}$ получаем

$$s_* = 2(k_{1*}^2 + k_{2*}^2) - Q k_{1*}^2 (k_{1*}^2 + k_{2*}^2)^{1/2} - (k_{1*}^2 + k_{2*}^2)^2 \quad (3.4)$$

Приведенные на фиг. 2 кривые, графически изображающие выражение (3.4) в частном случае при $\mathbf{k}_* = k_{1*} \mathbf{a}_1$, $k_{1*} \geq 0$, дают возможность проследить влияние параметра Q – квадрата специальным образом обезразмеренной намагниченности жидкости – на



Фиг. 2



Фиг. 3

Фиг. 2. Влияние безразмерной намагниченности жидкости на безразмерную величину $\text{Im} \omega$ при $\mathbf{k} \parallel \mathbf{H}_0$; 1-4 соответствует $Q = 0; 0,92; 3; 5$

Фиг. 3. Линии уровня функции, определяемой выражением (3.4). Сплошные линии 1-5 соответствуют $Q = 0,92, s_* = 0; 0,2; 0,42483; 0,6; 0,9$. Штриховая линия соответствует $Q = 3, s_* = 0$

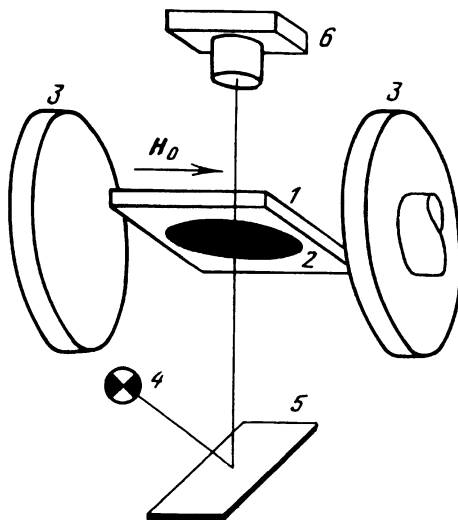
безразмерную величину $\text{Im} \omega(k_1, 0)$. Для $k_{1*} < 0$ эти графики продолжают в левую полуплоскость симметрично относительно вертикальной оси.

При $Q = 0$, т.е. в отсутствие поля, выражение (3.4) принимает вид $s_* = \Omega \left(\sqrt{k_{1*}^2 + k_{2*}^2} \right)$ и геометрически представляется поверхностью, образуемой при вращении верхней кривой на фиг. 2 вокруг вертикальной оси. Линии уровня этой поверхности являются в плоскости переменных k_{1*}, k_{2*} , естественно, семейством концентрических окружностей с центром в начале координат. В этом случае временная эволюция гармоник определяется лишь $|\mathbf{k}|$, т.е. не зависит от направления \mathbf{k} .

На фиг. 3 в случае $Q \neq 0$ изображена система линий уровня функции $s_*(k_{1*}, k_{2*})$, определяемой выражением (3.4), соответствующих нейтральным ($s_* = 0$) и неустойчивым ($s_* > 0$) гармоникам. В соответствии с фиг. 2 началу координат на фиг. 3 при всех Q отвечает $s_* = 0$, а точкам $A_1 = (0, 1)$, $A_2 = (0, -1)$ при всех Q соответствует $s_* = 1$, так что в случае $Q \neq 0$ рельеф функции (3.4) имеет два пика, симметричных относительно плоскости $k_{2*} = 0$. При $Q \neq 0$, как видно из фиг. 3, на оси абсцисс имеются две симметричные относительно начала координат седловые точки $k_{1*} = \pm k_{m1}$, соответствующие максимумам кривых на фиг. 2 при $Q \neq 0$.

Из формулы (3.3) для s_{m1} следует, что при $Q \neq 0$ характерное время $\tau_1 = s_{m1}^{-1}$ развития гармоник с $\mathbf{k} \parallel \mathbf{H}_0$ больше характерного времени $\tau_2 = s_{m2}^{-1}$ развития гармоник с $\mathbf{k} \perp \mathbf{H}_0$, причем с ростом Q отношение τ_1/τ_2 увеличивается. На фиг. 3 сравнение взаимного расположения линии уровня $s_* = 0$ при $Q = 0,92$ (точки этой кривой наиболее удалены от начала координат) и штриховой линии уровня $s_* = 0$ при $Q = 3$ показывает, что с увеличением Q область неустойчивости сжимается вдоль оси k_{1*} . В соответствии с фиг. 2 с ростом Q уменьшается уровень s_{m1} , на котором в пространстве переменных

Фиг. 4. Схема установки: 1 – стеклянная пластинка, 2 – слой магнитной жидкости, 3 – полюсные наконечники электромагнита, 4 – источник света, 5 – непрозрачный экран, 6 – фотоаппарат



(k_{1*} , k_{2*} , s_*) лежат седловые точки, и уменьшается также площадь любого проведенного на высоте $s_* > s_{m1}$ горизонтального сечения каждого из двух пиков рельефа функции (3.4). В результате при достаточно больших Q доминирующий вклад в интегральном представлении свободной поверхности (3.2) создают гармоники с волновыми векторами, направления которых составляют с вектором магнитного поля углы, близкие к $\pi/2$ и $3\pi/2$. В итоге почти постоянная в начальный момент времени толщина слоя магнитной жидкости с течением времени на линейной стадии развития рэлей-тейлоровской неустойчивости изменяется в поперечном к полю направлении значительно быстрее, чем вдоль поля.

Таким образом, при распаде тонкого слоя магнитной жидкости, находящегося в сильном тангенциальном магнитном поле, линейная теория предсказывает формирование системы валов, вытянутых вдоль магнитных силовых линий. В изотропном случае (при $H_0 = 0$) валы являются одной из альтернативных поверхностных структур, численно полученных в рамках нелинейной теории рэлей-тейлоровской неустойчивости тонкого слоя вязкой жидкости [12].

4. Эксперимент. С целью сопоставления на качественном уровне сделанного выше вывода с физически наблюдаемой финальной картиной распада слоя жидкости на нелинейной стадии развития рэлей-тейлоровской неустойчивости был проведен эксперимент.

Использовавшаяся установка схематически изображена на фиг. 4. Подготовка к эксперименту начиналась с нанесения капель магнитной жидкости в центр верхней поверхности лежащей горизонтально прямоугольной стеклянной пластинки 1, первоначально находящейся вне установки. При растекании капель по пластинке ее верхняя поверхность оказывалась покрытой тонким слоем магнитной жидкости 2, имеющим в плане примерно форму круга.

После приготовления жидкого слоя пластинка плавно переворачивалась и устанавливалась горизонтально, слоем вниз, в центральной (по высоте) части зазора между полюсными наконечниками 3 заранее включенного электромагнита ФЛ-1, создающего горизонтальное магнитное поле. Угол наклона пластинки к горизонтали контролировался оптическим квадрантом и не превышал $30''$.

Во время эксперимента жидкий слой, распадающийся под действием силы тяжести на отдельные фрагменты, и находящаяся над ним пластинка просвечивались снизу пучком тех лучей источника света 4, которые отражались специальным непрозрачным экраном 5 и освещенными поверхностями различных частей электромагнита. Экран перекрывал весь зазор между полюсными наконечниками. При съемке фотоаппаратом 6 как сплошного

жидкого слоя, так и фрагментов его распада области локальных скоплений магнитной жидкости, имеющие бóльшую толщину, на фотографиях оказываются более темными.

Эксперименты проводились с магнитной жидкостью на основе керосина, у которой $\rho = 9,92 \cdot 10^2 \text{ кг/м}^3$, $\alpha = 2,7 \cdot 10^{-2} \text{ Н/м}$, $\nu = 3,9 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$. Стеклоянная пластинка имела размеры $175 \times 102 \times 1 \text{ мм}$ и занимала почти всю ширину зазора (105 мм) между полюсными наконечниками. Время растекания капель по пластинке около 30 мин. Дальнейшее увеличение времени выдержки пластинки после нанесения на нее капель не приводило к заметному изменению площади образующегося слоя магнитной жидкости. Оценочная толщина слоя $d = 0,1 \text{ мм}$.

На своего рода "калибровочной" фотографии, сделанной при $H_0 = 0$ с временем экспозиции 2 с сразу же после перевертывания пластинки и установки ее (на что уходило 3–4 с) между полюсными наконечниками, занятая магнитной жидкостью область всюду, за исключением весьма узкой приграничной полоски, имеет одинаковой густоты темную окраску, что свидетельствует об отсутствии в момент съемки заметных локальных неоднородностей толщины перевернутого жидкого слоя.

Полюсные наконечники имели диаметр 10 см. Эксперимент проводился в магнитном поле $H_0 = 7,8 \text{ кА/м}$. В отсутствие магнитной жидкости степень неоднородности поля в той области, куда при фотографировании помещался жидкий слой, не превышала 20%. Напряженность магнитного поля измерялась датчиком Холла. Невозмущенная намагниченность жидкости $M_0 = 4,1 \text{ кА/м}$ измерялась баллистическим методом.

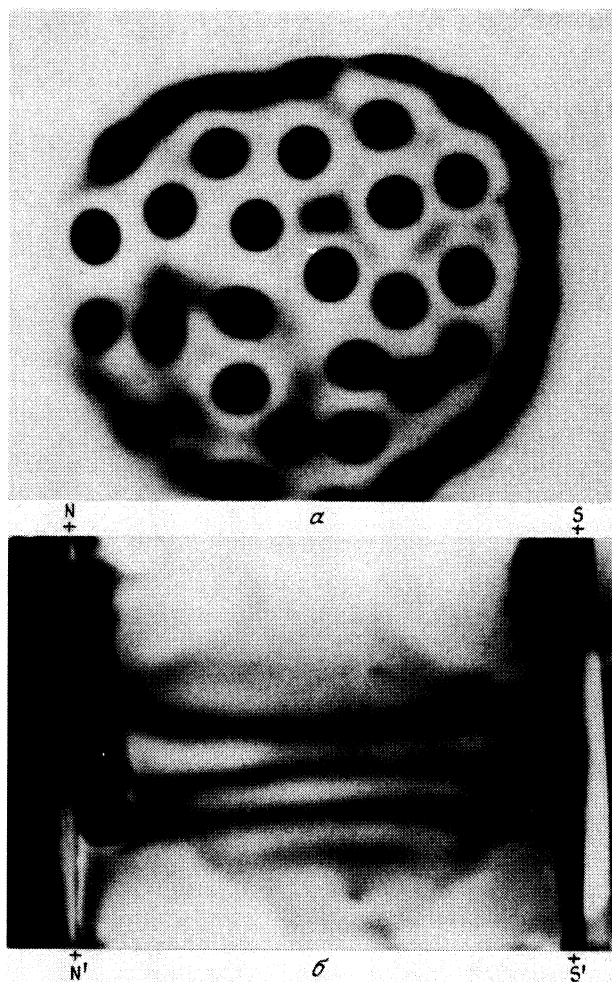
При указанных значениях определяющих параметров имеем: $Q = 0,92$, характерное время развития неустойчивости $\tau_2 = 13 \text{ с}$, волновое число наиболее быстро растущих гармоник $k_{m2} = 424 \text{ м}^{-1}$, диффузионная длина $\delta = 0,7 \text{ см}$.

На фиг. 5, а представлена фотография, сделанная в отсутствие магнитного поля через 5 мин после перевертывания и установки пластинки. Отдельные темные круглые пятна на этой фотографии являются изображениями капель, образовавшихся в результате распада сплошного слоя, а темная полоса сверху и справа по периметру снимка – остаток слоя, еще продолжающего распадаться на капли. У нижнего края снимка часть этого остатка при фотографировании не попала в кадр. На правой части фотографии прослеживается характерная для процесса распада [12] тонкого слоя вязкой жидкости, граничащей с нижней поверхностью горизонтальной пластинки, тенденция к образованию гексагональных ячеек, состоящих из центральной капли и шести окружающих ее подобных капель. В эксперименте диаметр отдельно сформировавшихся капель составляет около 1 см.

На фиг. 5, б представлена фотография картины распада слоя в магнитном поле, сделанная, как и предыдущий снимок, через 5 мин после установки пластинки между полюсными наконечниками. По техническим причинам фотоаппарат был установлен на бóльшем, чем прежде, расстоянии от пластинки, ввиду чего в поле зрения попали не только края пластинки – линии NN' и SS' , но и находящиеся левее и правее них полюсные наконечники, оставшиеся, как и края пластинки, вне кадра на фиг. 5, а.

Темные области справа от края NN' и слева от SS' свидетельствуют о натекании висящей на пластинке магнитной жидкости на лицевые поверхности полюсных наконечников. Такое поведение жидкости объясняется действием на нее магнитных сил, вызванных локальными градиентами магнитного поля. Длинная светлая полоса вблизи края пластинки SS' и более короткая вблизи точки N' представляют блики, образовавшиеся на боковых поверхностях полюсных наконечников в результате паразитной засветки лучами света, идущими сверху над стеклянной пластинкой. Темный выступ слева от края SS' вблизи точки S – это слой магнитной жидкости, образовавшийся на непрозрачном экране в результате падения на него капель, первоначально сформировавшихся и висевших на пластинке.

Темным горизонтальным полосам на фиг. 5, б, идущим от одного полюсного наконечника к другому, соответствуют валы магнитной жидкости, образовавшиеся в результате распада сплошного жидкого слоя. Ширина валов в центральной части межполюсного зазора составляет 3–5 мм.



Фиг 5. Фотографии картин распада слоя магнитной жидкости:
 $a - H_0 = 0$, $b - H_0 = 7,8 \text{ кА/м}$

Таким образом, эксперимент подтверждает вывод линейной теории.

Заключение. Теоретически показано и экспериментально подтверждено, что при развитии рэлей-тейлоровской неустойчивости находящегося в тангенциальном магнитном поле тонкого слоя вязкой магнитной жидкости, верхней границей которого служит горизонтальная немагнитная стенка, образуется система валов, вытянутых вдоль магнитных силовых линий.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01747).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cowley M.D., Rosensweig R.E. The interfacial stability of a ferromagnetic fluid // J. Fluid Mech. 1967. V. 30. Pt 4. P. 671–688.
2. Zelazo R.E., Melcher J.R. Dynamics and stability of ferrofluids: surface interactions // J. Fluid Mech. 1969. V. 39. Pt 1. P. 1–24.
3. Берковский Б.М., Медведев В.Ф., Краков М.С. Магнитные жидкости. М.: Химия, 1989. 238 с.

4. *Rosensweig R.E.* Ferrohydrodynamics. Cambridge: Univ. Press, 1985. 344 p. (Рус. перев.: *Розенцвейг Р.* Феррогидродинамика. М.: Мир, 1989. 357 с.)
5. *Elhefnawy A.R.F.* Nonlinear Rayleigh-Taylor instability in magnetic fluids between two parallel plates // Intern. J. Theor. Phys. 1992. V. 31. № 8. P. 1505–1520.
6. *Kant R., Malik S.K.* Nonlinear waves in superposed magnetic fluids // Phys. Fluids. 1985. V. 28. № 12. P. 3534–3537.
7. *El-Dib Y.O.* Nonlinear hydrodynamic Rayleigh-Taylor instability of viscous magnetic fluids: effect of a tangential magnetic field // J. Plasma Phys. 1994. V. 51. Pt 1. P. 1–11.
8. *Newhouse L.A., Pozrikidis C.* The Rayleigh-Taylor instability of a viscous liquid layer resting on a plane wall // J. Fluid Mech. 1990. V. 217. P. 615–638.
9. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
10. *Yiantsios S.G., Higgins B.G.* Rayleigh-Taylor instability in thin viscous films // Phys. Fluids. A. 1989. V. 1. № 9. P. 1484–1501.
11. *Babchin A.J., Frenkel A.L., Levich B.G., Sivashinsky G.I.* Nonlinear saturation of Rayleigh-Taylor instability in thin films // Phys. Fluids. 1983. V. 26. № 11. P. 3159–3161.
12. *Fermigier M., Limat L., Wesfreid J.E. et al.* Two-dimensional patterns in Rayleigh-Taylor instability of a thin layer // J. Fluid Mech. 1992. V. 236. P. 349–383.
13. *Мусеев Н.Н., Румянцев В.В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 439 с.
14. *Menikoff R., Mjolsness R.C., Sharp D.H. et al.* Initial value problem for Rayleigh-Taylor instability of viscous fluids // Phys. Fluids. 1978. V. 21. № 10. P. 1674–1687.
15. *LeBlond P.H., Mainardi F.* The viscous damping of capillary-gravity waves // Acta Mech. 1987. V. 68. № 3–4. P. 203–222.

Москва

Поступила в редакцию
31.I.1997