

УДК 532.546

© 1998 г. И.И. БОГДАНОВ, О.В. ГАЛАМАЙ, В.М. ЕНТОВ

О ПРОНИКНОВЕНИИ ЖИДКИХ ЗАГРЯЗНИТЕЛЕЙ В ВОДОНОСНЫЕ ПЛАСТЫ

Рассматриваются гидродинамические аспекты распространения жидкого неводного загрязнителя в водоносных грунтах и образования зоны первичного загрязнения. Особое внимание уделено взаимодействию фронта загрязнителя с границами раздела пропластков различной проницаемости, поскольку на таких границах происходит существенное расширение струи проникающей жидкости.

Жидкие неводные загрязнители, в основном углеводородные жидкости и их производные, составляют специфический класс загрязнителей грунтовых вод. Будучи жидкими, они способны к самостоятельному перемещению в почве (главным образом под влиянием силы тяжести), а не только к пассивному переносу потоками грунтовых вод как большинство химических и радиоактивных примесей. Это делает описание их поведения особенно трудным. Математическое моделирование и прогноз распространения жидких загрязнителей находятся в стадии становления и их результаты должны восприниматься с осторожностью.

Кардинально различно поведение легких и тяжелых жидкостей: первые легче грунтовых вод, вторые тяжелее. Проникая в почву под действием силы тяжести, легкий загрязнитель опускается до уровня грунтовых вод, а затем начинает растекаться по их поверхности, образуя "линзы" или "языки". Тяжелые жидкости проникают внутрь насыщенной зоны, в которой поровое пространство грунта полностью заполнено водой, и опускаются до непроницаемой нижней границы водоносного пласта – "водоупора". Дальнейшая "судьба" загрязнителя поэтому сильно зависит от деталей топографии водоупора.

Обычно вся проникшая в почву загрязняющая жидкость распадается на отдельные капли или группы связанных между собой капель (ганглии) неподвижной остаточной несмачивающей фазы и становится длительно действующим источником загрязнения грунтовых вод. Для прогноза загрязнения и анализа возможных путей очистки водоносного грунта важно знать характер распределения остаточной фазы. Это распределение определяется предьсторией движения загрязнителя на стадии его первичного проникновения. Речь идет о движении двух (в водонасыщенной зоне) и трех (в ненасыщенной зоне или зоне аэрации) несмешивающихся фаз преимущественно под влиянием силы тяжести.

Имеется много общего между рассматриваемыми явлениями и процессами в нефтяных и газовых месторождениях. Есть, однако, и ряд важных отличий, порождаемых прежде всего существенно различными масштабами явлений. Значительное нефтяное месторождение содержит миллионы (чаще – десятки миллионов) тонн нефти; значительное загрязнение содержит десятки, сотни, редко – тысячи тонн жидкости. В силу различия в масштабах на явления распространения сравнительно большое влияние оказывают капиллярные силы и неоднородность грунта.

Гидродинамический анализ специфических сценариев формирования зоны загрязнения только начинается. Данная работа посвящена исследованию одного из аспектов,

а именно взаимодействию фронта проникающего загрязнителя с границей раздела слоев различной проницаемости. Как будет видно из дальнейшего, именно на таких границах происходит существенное расширение сечения проникающего в почву потока, что в конечном счете определяет размеры и форму зоны остаточного загрязнения.

1. Формулировка задачи. Простейшие одномерные движения. Рассматривается проникание загрязняющей жидкости в грунт с поверхности под действием силы тяжести, так что насыщенность ею грунта s отлична от нуля в некоторой области $D(t)$. В этой области движение двухфазное, т.е. имеются две подвижные фазы: жидкий загрязнитель и вода под уровнем грунтовых вод и загрязнитель и воздух в присутствии неподвижной остаточной воды над этим уровнем, в зоне аэрации. Имея в виду достаточно крупномасштабные явления, откажемся от рассмотрения существенно трехфазного течения в "капиллярной кайме" – узкой зоне между двумя упомянутыми областями. Это означает, что масштаб представляющих интерес явлений существенно больше толщины капиллярной каймы ($\sim 0,1$ м в случае крупнозернистых песков). В том же приближении можно пренебречь капиллярной разностью давлений в фазах. Тогда движение в двухфазной зоне описывается системой уравнений двухфазной фильтрации несмешивающихся жидкостей при наличии силы тяжести [1, 2]

$$\frac{\partial m s_i}{\partial t} + \nabla \mathbf{u}_i = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (1.1)$$

$$\mathbf{u}_i = -\frac{k}{\mu_i} k_{ri} \nabla (p + \rho_i g z) \quad (i = 1, 2) \quad (1.2)$$

Здесь (1.1) – уравнения неразрывности фаз, а (1.2) – обобщенный закон Дарси для двухфазного течения. В этих уравнениях \mathbf{u}_i – скорости фильтрации фаз, m и k – пористость и проницаемость грунта, ρ_i и μ_i – плотность и вязкость, s_i – насыщенность i -й фазы, k_{ri} – относительные фазовые проницаемости, g – ускорение силы тяжести, индекс 1 относится к жидкому загрязнителю и его насыщенность далее обозначается через s .

Рассмотрим несколько простых одномерных движений, отвечающих распространению загрязнения с поверхности в глубь горизонтального слоя грунта толщиной H вдоль вертикального направления (ось z).

Далее различаются два основных случая одномерного движения. Первый из них отвечает одновременно и равномерному поступлению загрязнителя из поверхностного источника, распределенного по большой площади в плане (в пределе по всей плоскости $z = 0$). Моделью его служит течение, не зависящее от горизонтальных координат, в котором распространение в поперечном направлении невозможно. Этот случай далее называется стесненным осаждением.

Второй случай отвечает тонкой (по сравнению с ее вертикальным размером) струей загрязнителя, поступающего из локализованного источника на поверхности. В этом случае боковое растекание возможно, но его не будет, если отсутствует горизонтальный градиент давления (случай свободной струи). Оба случая описываются одинаковыми уравнениями, но при разных дополнительных условиях (см. ниже).

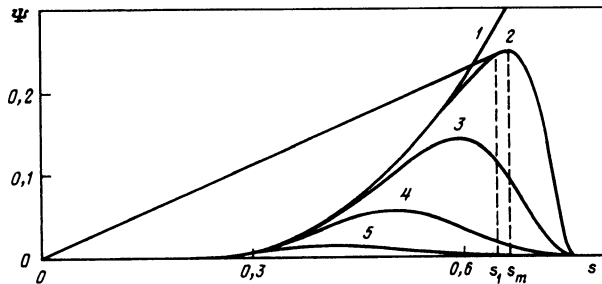
В одномерном случае уравнения движения принимают вид

$$m \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial z} = 0; \quad m \frac{\partial (1-s)}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial z} = 0 \quad (1.3)$$

$$u_1 = -\frac{kk_1(s)}{\mu_1} \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho_1 g \right); \quad u_2 = -\frac{kk_2(s)}{\mu_2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho_2 g \right) \quad (1.4)$$

Складывая уравнения (1.3), имеем $u_1 + u_2 = U_0(t)$.

Рассмотрим случай стесненного осаждения и предположим, что слой грунта тол-



Фиг. 1. Функции подвижности $\Psi(s)$ для фазовых проницаемостей $k_1(s) = (s - s_*)^2 / (1 - s_*)^2$; $k_2(s) = (s^2 - s_*)^2 / s_*^2$; $s_* = 0,75$; $s_* = 0,25$ при $\mu_2/\mu_1 = 0; 0,01; 0,1; 1; 10$ (линии 1-5)

щиной H снизу ограничен непроницаемой границей (водоупором). Тогда $u_1 = u_2 = 0$ при $z = -H$, так что $U_0(t) = 0$ и $u_1 = -u_2 = -U(z, t)$. Используя (1.4), находим

$$U = \frac{k(\rho_1 - \rho_2)g}{\mu_1 / k_1(s) + \mu_2 / k_2(s)} \equiv U_g \Psi(s); \quad \Psi(s) = \frac{k_1(s)k_2(s)}{k_2(s) + (\mu_2 / \mu_1)k_1(s)} \quad (1.5)$$

$$U_g = \frac{k(\rho_1 - \rho_2)g}{\mu_1} \equiv C \frac{(\rho_1 - \rho_2)\mu_2}{\rho_2\mu_1}, \quad C = \frac{k\rho_2g}{\mu_2} \quad (1.6)$$

Здесь U_g – характерная скорость оседания, $\Psi(s)$ – функция подвижности, имеющая характерный вид кривой с максимумом. На фиг. 1 представлены функции подвижности $\Psi(s)$ для модельных фазовых проницаемостей

$$k_1(s) = \frac{(s - s_*)^2}{(1 - s_*)^2}; \quad k_2(s) = \frac{(s^* - s)^2}{s_*^2}, \quad s_* = 0,75; \quad s_* = 0,25$$

Подстановка (1.5) в уравнение неразрывности для одной из фаз приводит к дифференциальному уравнению для насыщенности

$$m \frac{\partial s}{\partial t} - U_g \frac{\partial \Psi(s)}{\partial z} = 0 \quad (1.7)$$

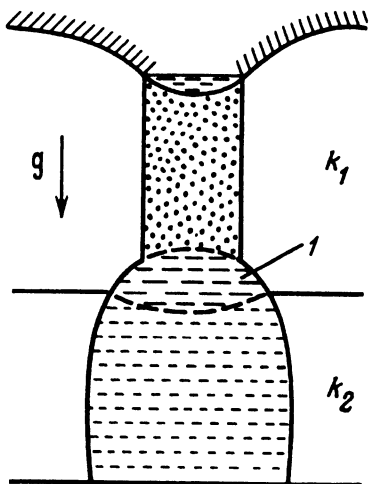
Это уравнение гравитационной сегрегации играет важную роль в теории разработки нефтяных месторождений и детально изучено в ней; однако при этом, как правило, рассматриваются несколько иные задачи, чем те, которые интересны для теории движения жидких загрязнителей в грунтах. Если рассматривается распространение загрязнителя в грунте, проницаемость которого зависит от вертикальной координаты $k = k(z)$, то вместо (1.7) для распределения насыщенности имеем

$$m \frac{\partial s}{\partial t} - \frac{\partial U_g(z)\Psi(s)}{\partial z} = 0 \quad (1.8)$$

где зависимость $U_g(z)$ определяется по $k(z)$ в соответствии с соотношением (1.6). Поскольку производная $\Psi(s)$ меняет знак при $s = s_m$, большие значения насыщенности $s > s_m$ переносятся вверх, а малые $s < s_m$ – вниз. Если положить $\mu_2 = 0$, то $\Psi(s) = k_1(s)$, максимум у $\Psi(s) = k_1(s)$ исчезает и уравнение (1.8) принимает вид

$$m \frac{\partial s}{\partial t} - \frac{\partial U_g(z)k_1(s)}{\partial z} = 0 \quad (1.9)$$

Уравнение (1.9) можно получить, предположив, что всюду $p = p_0 - \rho_2gz$, т.е. распределение давления все время совпадает с гидростатическим давлением в невозмущен-



Фиг. 2. Расширение струи загрязнителя на границе слоев при $k_2 \ll k_1$; 1 – линза полного насыщения

$$U = U_g(z)\Psi(s(z)) = \text{const}$$

Поскольку функция $\Psi(s)$ ограничена, $\Psi(s) \leq \Psi_m \leq 1$, существует предельное (максимально допустимое) значение стационарного потока U_m и оно определяется свойствами наименее проницаемого слоя толщи грунта: $U_m = \min_z [U_g(z)]\Psi_m$. Для любого допредельного значения ($U < U_m$) при $\mu_2 \neq 0$ существуют два решения, отвечающие большому и малому значениям насыщенности. Для того чтобы выбрать "правильное" (физически значимое) решение, заметим, что рассматриваемые течения физически соответствуют течению, вызванному притоком от поверхности грунта, "управляются с поверхности", так что в стационарном решении характеристики уравнения (1.9) должны быть направлены вниз (по потоку). Поэтому реализуется решение с меньшим значением насыщенности, причем это значение монотонно возрастает с увеличением потока до предельного значения U_m . Из (1.10) следует, что при этом насыщенность загрязнителя s различна в слоях различной проницаемости, причем она тем меньше, чем больше проницаемость слоя.

В случае стесненного оседания наличие предельного потока означает несуществование стационарного режима гравитационного оседания, если поступающий с поверхности поток превышает предельный. В этом случае над слабопроницаемыми слоями грунта или на его поверхности должны возникнуть напорные области, в которых грунт предельно насыщен загрязняющей жидкостью, давление превышает невозмущенное давление, а вода и(или) воздух присутствуют лишь в виде остаточной фазы.

При струйном режиме распространения загрязнителя всюду в области двухфазного течения его скорость направлена вертикально вниз, а полный расход равен произведению скорости оседания на площадь поперечного сечения струи. Поэтому если проницаемость (а с ней и характерная скорость оседания U_g) резко уменьшается при переходе сверху в нижележащий слой, то можно ожидать существенного расширения сечения струи (фиг. 2). Тогда в окрестности границы между слоями различной проницаемости должно нарушиться условие медленного изменения сечения струи с высотой и существенным становится растекание (расширение) струи. Растекание предполагает наличие горизонтальной компоненты градиента напора. Поэтому в пренебрежении вязкостью насыщающей грунт жидкости (скажем, в зоне аэрации) растекание возможно только при образовании в окрестности границы раздела слоев области, предельно насыщенной проникающей жидкостью ("линза полного насыщения").

ном пласте. Это означает, что индуцированное движение не вызывает возмущений давления в насыщающей жидкости.

Так обстоит дело при $\mu_2 = 0$, т.е. если первоначально заполнявшая грунт жидкость значительно менее вязкая, чем внедряющаяся, например, в зоне аэрации над уровнем грунтовых вод, где насыщающая жидкость – воздух и давление все время равно атмосферному.

Однако то же предположение о равенстве давления невозмущенному гидростатическому применимо и тогда, когда загрязнитель распространяется в виде тонкой "струи", вытянутой вниз от локализованного поверхностного источника. Используя обычные оценки теории тонких тел, легко убедиться, что уравнение (1.9) применимо всюду вне областей резкого изменения площади сечения струи.

Уравнение (1.9) допускает семейство стационарных решений, отвечающих постоянному потоку оседающей тяжелой жидкости

$$(1.10)$$

Рассмотрим теперь нестационарную задачу, соответствующую проникновению конечной "порции" загрязняющей жидкости, поступающей с поверхности в течение времени T .

Она описывается уравнением (1.8) для $-\infty < z < 0$, $t > 0$ при условиях

$$s(z, 0) = s_0(z) = 0, \quad s(0, t) = s^0(t)$$

$$s^0(t) = s^*, \quad 0 \leq t \leq T, \quad s^0(t) = s_*, \quad t > T \quad (1.11)$$

Здесь s_* и s^* – предельные значения насыщенности, при которых относительные фазовые проницаемости одной из фаз обращаются в нуль. Решение задачи (1.8), (1.11) строится методом характеристик.

При $t \leq cT$ решение имеет вид

$$\zeta = -z = \frac{U_g}{m} \Psi'(s)t, \quad s_1 \leq s \leq s_m \quad (1.12)$$

$$s = 0, \quad \zeta > V_1 = (U_g/m)\Psi'(s_1) \equiv (U_g/m)\Psi(s_1)/s_1$$

Оно представляет собой скачок амплитуды s_1 , распространяющийся со скоростью V_1 , и следующую за ним центрированную простую волну, в которой насыщенность возрастает от s_1 до s_m при движении от фронта волны (скачка) к поверхности грунта. Здесь значение s_1 определяется последним уравнением (1.12) и соответствует точке касания графика $\Psi(s)$ прямой, проведенной из начала координат (фиг. 1). Значения, превышающие s_m , в грунт не проникают, и при $z = 0$ остается "приклеенный" скачок от s_m до s^* . Изменение граничного условия при $t = T$, отвечающее прекращению поступления загрязнителя, порождает вторую центрированную волну; области влияния двух волн разделены вторым скачком, движущимся с переменной скоростью V . Значения насыщенностей s^\pm перед и за ним и его скорость и координата $Z_2(t)$ до момента, когда второй скачок догонит первый, могут быть найдены из системы соотношений

$$-\frac{dZ_2}{dt} = V_2 = \frac{U_g}{m} \frac{\Psi(s^+) - \Psi(s^-)}{s^+ - s^-} \quad (1.13)$$

$$-Z_2 = -\frac{U_g}{m} \Psi'(s^-)(t - T) = -\frac{U_g}{m} \Psi'(s^+)t$$

В случае, когда вязкость второй фазы пренебрежимо мала

$$\mu_2 = 0, \quad \Psi(s) \equiv k_1(s), \quad 0 \leq s \leq s^*, \quad s_m = s^*$$

первичная центрированная волна за первым скачком вырождается в область постоянного состояния с $s = s_m \equiv s^*$, а вместо соотношений (1.13) имеем

$$-\frac{dZ_2}{dt} = V_2 = \frac{U_g}{m} \frac{k_1(s^*) - k_1(s^-)}{s^* - s^-}; \quad -Z_2 = \frac{U_g}{m} k_1'(s^-)(t - T) \quad (1.14)$$

Подставляя второе уравнение (1.14) в первое, получаем уравнение для s^- , которое интегрируется в квадратурах. В частности, при обычной степенной аппроксимации относительной проницаемости имеем

$$k_1(s) = 0, \quad 0 \leq s \leq s_*, \quad k_1(s) = \sigma(s - s_*)^\alpha, \quad s_* \leq s \leq s^*, \quad \sigma = \text{const}$$

$$s = 0, \quad \zeta = -z \geq V_1 t = \frac{U_g t k_1(s^*)}{m s_*} \quad (1.15)$$

$$s = s^*; \quad \frac{U_g}{m} k_1'(s^*) t = \alpha \sigma (s^* - s_*)^{\alpha-1} \frac{U_g}{m} t \leq \zeta \leq V_1 t$$

$$0 \leq \zeta = \frac{U_g}{m} k_1'(s)(t - T) \leq \zeta_2(t), \quad 0 \leq s \leq s^*$$

Решение (1.15) справедливо до момента встречи первого и второго скачков. При принятой аппроксимации для этого момента ($t = T_1$) имеем

$$T_1 = T \left(1 - \frac{s^* - s_*}{\alpha s^*} \right)^{-1}$$

При обычных значениях $s^* = 0,75$; $s_* = 0,25$, $\alpha = 2$, $T_1 = 3T/2$. При $t \geq T_1$ распределение s в зоне загрязнения дается решением во второй центрированной волне (последнее выражение (1.15)), заканчивающейся головным скачком, положение которого z_1 определяется интегрированием уравнения

$$\frac{d\zeta_1}{dt} = \frac{U_g}{m} \frac{\Psi(s^H)}{s^H}; \quad \zeta_1 = \frac{U_g}{m} \Psi'(s^H)(t - T); \quad t \geq T_1$$

при начальном условии $\zeta_1(T_1) = V_1 T_1$. Таким образом, существует достаточно длительный период ($\sim T$), в течение которого в грунте распространяется вниз ступенчатая волна насыщенности.

Рассмотрим теперь в одномерной постановке взаимодействие такой ступенчатой волны с границей раздела свойств. Поместив временно начало координат на эту границу, имеем уравнение (1.8) с $U_g = U_g^\pm$ для $z > 0$ и $z < 0$ соответственно и условиями

$$s = 0, \quad z < 0, \quad s = s^+, \quad z > 0, \quad t = 0; \quad \frac{U_g^+}{U_g^-} \Psi(s^+) = \Psi(s^-), \quad z = 0 \quad (1.16)$$

Последнее условие выражает равенство потоков при $z = 0$, $s^- = s(-0)$. При заданном s^+ оно определяет два значения: $s^- = s_{1,2}^-$, $s_1^- < s_2^-$, если левая часть меньше $\Psi(s_m)$. Тогда решение тривиально – вниз от границы распространяется "ступенька" насыщенности высотой s_1^- ; над границей сохраняется постоянное значение $s = s^+$. Если же последнее условие (1.15) не выполняется (так всегда будет при $U_g^- \ll U_g^+$), то вблизи границы должна возникнуть зона предельного насыщения $-h^-(t) \leq z \leq h^+(t)$, в которой движение является напорным. В силу очевидной автомодельности задачи ее границы будут двигаться с постоянными скоростями $h^\pm(t) = V^\pm t$.

Внутри зоны предельного насыщения уравнение (1.8) не выполняется. Если распределение давления вне зоны предельного насыщения можно по-прежнему считать гидростатическим, то для скорости фильтрации внутри нее имеем

$$u = \frac{(\rho_1 - \rho_2)g(h^+ + h^-)k_1(s^*)}{\mu_1(h^+/k^+ + h^-/k^-)} \quad (1.17)$$

При этом для V^+ и V^- имеем из условий баланса

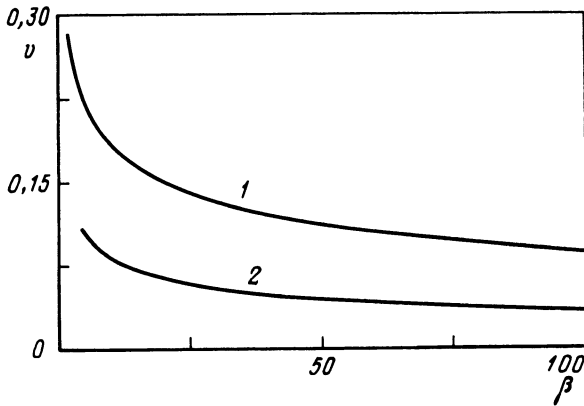
$$V^- = \frac{u}{ms^*}; \quad V^+ = \frac{U_g^+ k_1(s^+) - u}{m(s^* - s^+)} \quad (1.18)$$

Из (1.17) после преобразований получим уравнение

$$\frac{k_1^*}{v} = \frac{k_1^+ / v - 1 + \beta \zeta}{k_1^+ / v - 1 + \zeta} \quad (1.19)$$

$$k_1^+ = k_1(s^+); \quad k_1^* = k_1(s^*); \quad \zeta = (s^* - s^+) / s^*; \quad v = u / U_g^+; \quad \beta = k^+ / k^-$$

Уравнение (1.19) имеет два корня, нужное решение дается положительным корнем



Фиг. 3. Зависимость $\nu(\beta)$ для $s_* = 0,25$; $s^* = 0,75$; $\sigma = (1 - s_*)^{-\alpha}$; $\alpha = 2$; $s^+ = 0,65; 0,5$ (линии 1, 2)

уравнения

$$\nu = 2k_1^+ / x, \quad x = \lambda + 1 - \zeta + \sqrt{(\lambda - 1 + \zeta)^2 + 4\lambda(\beta - 1)\zeta}; \quad \lambda = k_1^+ / k_1^* \quad (1.20)$$

На фиг. 3 показана зависимость $\nu(\beta)$. Для каждой кривой $\nu(\beta)$ область определения ограничена минимальной величиной $\beta_0(s^+)$, задаваемой условием (1.16).

Анализ распространения волны загрязнения до встречи с малопроницаемым слоем применим в равной степени к случаям стесненного оседания и струйного распространения. Одномерная модель взаимодействия с границей, очевидно, неприменима к струйному режиму, так как в этом случае существенным окажется боковое растекание струи.

2. Растекание жидкого загрязнителя вдоль границы сред с различными проницаемостями. Для того чтобы оценить возможные режимы распространения потока загрязнителя вдоль границы раздела двух слоев различной проницаемости, рассмотрим упрощенную модель, пренебрегая влиянием перетока через границу на распределение давления по вертикали и считая это распределение гидростатическим вдоль любой вертикали в зоне полного насыщения. Кроме того, будем считать скорость перетока через границу U^- заданной постоянной.

Тогда в пренебрежении капиллярными эффектами имеем для возвышения линзы загрязнителя над уровнем границы обычное уравнение гидравлического приближения [1, 2]

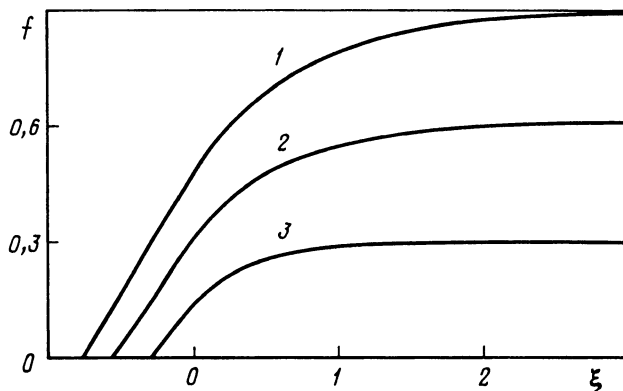
$$\frac{\partial mh\varepsilon}{\partial t} + CJ \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{C}{2} \frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} + U^+ - U^- \quad (2.1)$$

$$U^- = U_0^-, \quad h > 0; \quad U^- = 0, \quad h = 0 \quad (2.2)$$

Здесь J – наклон границы раздела сред к горизонту, $\varepsilon = s^* - s^+$ – доля объема, занимаемая накапливающейся фазой, U^+ – заданная плотность инфильтрации, U^- – плотность оттока. В принятой упрощенной постановке предполагается, что U^+ – заданная функция координаты и времени; U^- – постоянная величина всюду, где $h > 0$; $\varepsilon \equiv 1$. Коэффициент фильтрации C в (2.1) определяется по фазе l .

Рассмотрим решение, отвечающее развитию слоя загрязнителя при постоянном его поступлении сверху вдоль полуоси $x > 0$ так, что

$$U^+ = U_0^+, \quad t > 0, \quad x > 0, \quad U^+ = 0, \quad t > 0, \quad x < 0; \quad h(x, 0) = 0 \quad (2.3)$$



Фиг. 4. Автомоделные профили линзы полного насыщения при $J = 0$; $q^- = 0,3$; $q^+ = 0,6; 0,9; 1,2$ (линии 3, 2, 1)

Возникающая задача допускает автомоделное решение

$$h(x, t) = \frac{C}{2m} tf(\xi); \quad \xi = \frac{2mx}{Ct} \quad (2.4)$$

причем функция $f(\xi)$ является решением краевой задачи

$$(f^2)'' + (\xi - 2J)f' - f = q^- - q^+; \quad q^\pm = 2U^\pm / C \quad (2.5)$$

$$f(\xi_0) = 0; \quad f(\infty) = q^+ - q^-$$

Дополнительное краевое условие, необходимое для определения ξ_0 (автомоделной координаты границы линзы полного насыщения), находится из условия конечности производной $f'(\xi)$ при $\xi = \xi_0 + 0$.

Полагая $f(\xi) \sim A(\xi - \xi_0)^\alpha$, $(\xi - \xi_0) \rightarrow +0$, из сравнения порядка членов в уравнении (2.5) находим $\alpha = 1$. Фактически при $\xi_0 \leq \xi \leq 0$ искомая функция вообще линейна

$$f(\xi) = A(\xi - \xi_0) \quad \xi_0 \leq \xi \leq 0 \quad (2.6)$$

Это легко проверить, подставляя (2.6) в (2.5), причем

$$\xi_0 = q^- / A + 2(J - A) \quad (2.7)$$

Это непосредственное обобщение известного результата [4] (см. также [1]) о существовании простейшего линейного решения задачи о безнапорной фильтрации в сухой грунт при линейном по времени изменении уровня жидкости на границе.

Согласно (2.6) и (2.7), имеем

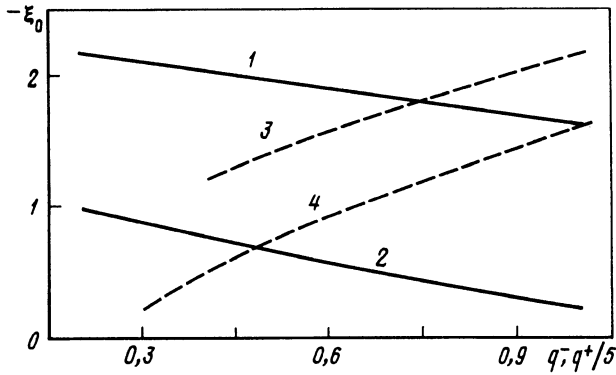
$$f(0) = -A\xi_0 = -q^- + 2(A^2 - JA); \quad f'(0) = A \quad (2.8)$$

Эти соотношения позволяют свести решение задачи к отысканию параметра A , такого, что решение уравнения (2.5) для $0 \leq \xi < \infty$ с начальными условиями (2.8) стремится к $q^+ - q^-$ при $\xi \rightarrow \infty$. Это решение строится, например, методом пристрелки.

Автомоделные профили линзы полного насыщения представлены на фиг. 4. На фиг. 5 показаны зависимости автомоделной координаты $\xi_0(q^-)$ и $\xi_0(q^+)$.

Полученное автомоделное решение для полубесконечного участка поступления загрязнителя дает верхнюю оценку размера области растекания. Это позволяет использовать его для практических оценок.

3. Численное моделирование. Возможные сценарии распространения загрязнителя и формирования зоны остаточного загрязнения весьма разнообразны, и естественным



Фиг. 5. Зависимости автомодельной координаты $\xi_0(q^-)$ (сплошные линии 1, 2 — $q^+ = 0,2$; 1 соответственно) и $\xi_0(q^+)$ (штриховые линии 3, 4 — $q^- = 1,5$; 5)

методом их анализа является численный эксперимент. В рамках плоской задачи исследовалось распространение в вертикальной плоскости (x, z) "струи" жидкого загрязнителя от постоянно действующего поверхностного источника.

Рассмотрим движение двухфазной несжимаемой жидкости в поле силы тяжести в прямоугольной области

$$R = \{(x, z): -L \leq x \leq L; -H \leq z \leq H\}$$

Будем считать движение крупномасштабным, отвлекаясь от действия капиллярных сил. Движение описывается уравнениями (1.1)–(1.2), причем абсолютная проницаемость зависит от координаты z : $k = k^-, -H \leq z < 0$; $k = k^+, 0 \leq z \leq H$.

Для того чтобы определить поле скорости движения жидкости, необходимо знать распределения насыщенности одной из фаз и давления $p(x, z)$. Уравнение для давления это уравнение несжимаемости двухфазной жидкости, формально получаемое при сложении (1.1) при $i = 1$ и 2

$$\nabla(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = 0 \quad (3.1)$$

На границе Γ области R задаются условия непротекания для обеих фаз всюду, кроме отрезка поверхности γ

$$u_{nj} = 0, (x, z) \in \Gamma, \quad j = 1, 2; \quad \gamma = \{(x, z): 0 \leq x \leq L; z = H\} \quad (3.2)$$

В начальный момент в окрестность γ начинается поступление жидкого загрязнителя. Под действием силы тяжести он проникает в грунт, полностью насыщенный воздухом, формируя вертикальную начальную "струю" с насыщенностью s^+ таким образом, что при $t = 0$

$$\begin{aligned} s &= s^+, (x, z) \in D_0 = D(0) = \{(x, z): 0 \leq x \leq L; 0 \leq z \leq H\} \\ s &= 0, (x, z) \notin D_0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Задача (1.1), (1.2), (3.1)–(3.3) решалась методом конечных разностей. Область R разбивалась на $M \times N$ численных ячеек, в каждой из которых задавались значения пористости, абсолютной проницаемости и начальные значения насыщенности s_{ij} , $1 \leq i \leq M$, $1 \leq j \leq N$. Использовался так называемый неявный по давлению и явный по насыщенности метод аппроксимации уравнений многофазной фильтрации (см. [5]). В данном случае уравнение для давления является эллиптическим и решается итерационным методом, являющимся разновидностью известного метода установления с переменным итерационным параметром (например, [6]).

Ниже анализируются некоторые результаты расчетов динамики распространения струи загрязнителя для следующих исходных данных и параметров модели:

$$m = 0,2; \mu_1 = 1 \text{ мПа с}; \mu_2 = 0,02 \text{ мПа с}; \rho_1 = 1000 \text{ кг/м}^3; \rho_2 = 1,3 \text{ кг/м}^3, s^* = 0,6$$

$$H = L = 50 \text{ м}, M = N = 40; k^+ = 1 \text{ Д}, k^- = 0,1 \text{ Д} \text{ (1 Дарси} \approx 10^{-12} \text{ м}^2)$$

Согласно анализу разд. 1,2, эволюция зоны загрязнения определяется прежде всего распределением проницаемости среды и насыщенностью на фронте распространения загрязнителя. В частности, соотношение (1.16) определяет условие возникновения горизонтального растекания и линзы полного насыщения при переходе фронта загрязнителя в низкопроницаемый слой. Иными словами, для каждого s^* условие (1.16) задает некоторое максимальное $\beta = \beta_0(s^*)$, до которого "струя" жидкого загрязнителя не расширяется, попадая на границу раздела. При $\beta > \beta_0$ положение верхней и нижней невозмущенных границ линзы полного насыщения дается соотношениями (1.18), а решение задачи (2.5)–(2.6) описывает профиль линзы в окрестности боковой границы "струи" жидкого загрязнителя при $z > 0$ и постоянной по времени величине s^* .

Итак, эволюция вертикальной "струи" жидкого загрязнителя, попадающей на границу раздела, происходит путем образования линзы полного насыщения и ее постепенного распространения как вдоль этой границы (в горизонтальном направлении), так и в вертикальном направлении. Понятно, что в рассматриваемой задаче горизонтальное растекание жидкого загрязнителя может происходить в режиме, близком к автомодельному, лишь при не очень больших временах. Действительно, поскольку суммарный отток в низкопроницаемую область постоянно растет за счет увеличения сечения "струи", в какой-то момент времени приток и отток на границе раздела сравниваются и растекание прекратится. Однако на начальной стадии движение должно быть близко к автомодельному. Поэтому по аналогии с (2.4) введем в рассмотрение новые переменные

$$\xi = \frac{2mx}{C^+t}, \quad \varphi = \frac{2mz}{C^+t}, \quad C^+ = \frac{k^+\rho_1g}{\mu_1}$$

Тогда соотношения (1.18) для верхней и нижней невозмущенных границ линзы можно переписать в виде

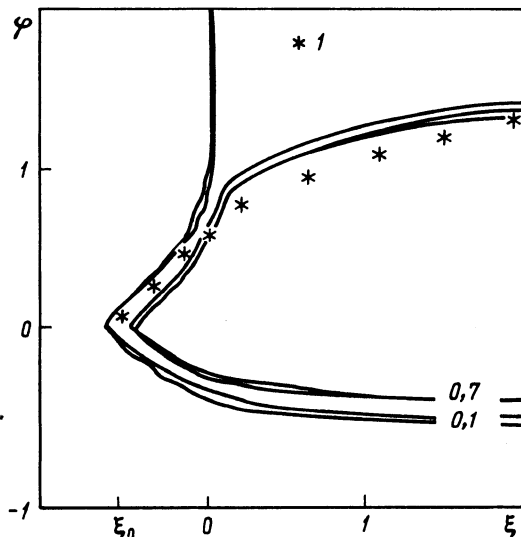
$$\varphi^+ = \frac{2m}{C^+} V^+ = \frac{q^+ - q^-}{\Delta s}; \quad \varphi^- = \frac{2m}{C^+} V^- = \frac{q^-}{s^*} \quad (3.4)$$

$$q^+ = 2\nu k_1^+, \quad q^- = 2\nu v, \quad \nu = U_g^+ / C^+, \quad \Delta s = s^* - s^+, \quad U_g^+ = k^+(\rho_1 - \rho_2)g / \mu_1$$

Относительным фазовым проницаемостям $k_{r1,2}(s)$, которые использовались в расчетах, соответствуют следующие характерные параметры процесса (см. (1.18), (1.20)): $s^* = 0,8$; $k_1^+ = 0,337$; $k_1^* = 0,6$; $\nu \approx 0,189$. При этом из (3.4) получаем $\varphi^+ \approx 1,5$; $\varphi^- \approx 0,47$; $V^+/V^- \approx 3,13$.

На фиг. 6 распределения насыщенности s представлены в координатах (ξ, φ) рассчитанные для $\tau = C^+t/2mL = 0,24$; $0,36$; $0,48$. За эффективную границу линзы полного насыщения принята изолиния $s = 0,7$. Таким образом, численный расчет подтверждает, что эволюция профиля линзы при постоянной граничной насыщенности близка к автомодельной. Расположение верхней и нижней границ линзы хорошо согласуется с величинами параметров φ^\pm .

Решение (2.5), (2.6) при $q^+ = 0,674$; $q^- = 0,398$; $J = 0$; $C = C^* = C^+k_1^*$; $\varepsilon = s^* = 0,8$, $\xi < 0$; $\varepsilon = s^* - s^+ = 0,2$, $\xi > 0$ показано на фиг. 6 точками 1 (здесь параметры ε и C^* учитывают долю порового объема, занимаемого жидким загрязнителем, который накапливается в линзе при насыщенности s^* , и эффективную проницаемость для загрязнителя в линзе). Детальный анализ показывает, что автомодельное решение проходит между изолиниями 0,1 и 0,7 при $\xi < 0$ и совпадает с изолинией 0,78 при $0 < \xi < 1,5$. Сравнительно большая подвижность газовой фазы приводит к тому, что



Фиг. 6. Изолинии насыщенности $s = 0,1; 0,7$ в координатах (ξ, ϕ) для $\tau = C^+/(2mL) = 0,24; 0,36; 0,48; 1$ – автомодельное решение

эффект горизонтального перетока возникает при значениях s , очень близких к s^* . Таким образом, уже при небольшом изменении насыщенности вследствие численной вязкости горизонтальный переток из "струи" загрязнителя становится малым. В результате расчет несколько завышает положение верхней границы линзы и занижает координату ξ_0 .

Таким образом, результаты численного моделирования в целом подтверждают корректность подходов, использованных в данной работе.

Заключение. Приведенные результаты показывают возможности гидродинамического анализа процессов формирования зоны первичного загрязнения в водоносных пластах. Они демонстрируют роль низкопроницаемых границ в расширении области загрязнения. Общий подход и результаты могут быть использованы при оценке последствий локализованного загрязнения грунтовых вод органическими жидкостями.

Авторы признательны Д. Елсворту (Ун-т штата Пенсильвания, США), Дж. Беру, К. Брастеру и В. Рыжку (Технион, Израиль), оказавшим существенное влияние на формирование изложенных здесь взглядов.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках проекта 96-01-0748.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 208 с.
2. Bear J. Dynamics of fluids in porous media. N.Y.: Elsevier, 1972. 764 p.
3. Bear J., Verruijt A. Modeling groundwater flow and pollution. Dordrecht: Reidel, 1987. 414 p.
4. Баренблатт Г.И. О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде // ПММ. 1952. Т. 16. Вып. 1. С. 67–78.
5. Кричлоу Г.Б. Современная разработка нефтяных месторождений – проблемы моделирования. М.: Недра, 1979. 303 с.
6. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. М.: МФТИ, 1994. 526 с.

Москва

Поступила в редакцию
26.II.1997