

УДК 532.528

© 1998 г. Л.М. ЗИГАНГАРЕЕВА, О.М. КИСЕЛЕВ

ДОЗВУКОВОЕ КАВИТАЦИОННОЕ ОБТЕКАНИЕ ПЛАСТИНЫ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ КАВИТАЦИИ

Приводится решение задачи о симметричном кавитационном обтекании пластины дозвуковым потоком невязкой сжимаемой жидкости при малых числах кавитации.

При исследовании движения тел в жидкости с большими скоростями необходимо учитывать сжимаемость среды. Осесимметричные кавитационные течения сжимаемой жидкости исследовались ранее в линейной постановке с использованием методов газодинамики тонкого тела в ряде работ, ссылки на которые можно найти в [1, 2]. Плоские кавитационные течения сжимаемой жидкости исследовались в приближении Прандтля и с помощью приближенного метода Чаплыгина [3–6].

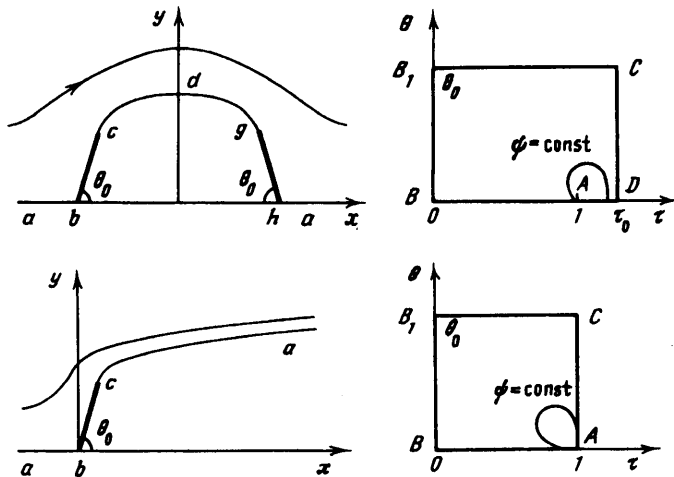
Эффективный численно-аналитический метод решения в точной нелинейной постановке задач о плоских и осесимметричных струйных течениях сжимаемой жидкости, основанный на использовании переменных годографа скорости, был предложен в [7]. В [2] дано развитие указанного метода применительно к задаче об обтекании конуса дозвуковым потоком сжимаемой жидкости по схеме Рябушинского и приведено численное решение задачи о дозвуковом кавитационном обтекании водой диска и кавитатора с конической выемкой при числах кавитации $Q \in [0,15; 1]$. Ниже дается развитие метода [7] применительно к дозвуковому обтеканию клина по схемам Рябушинского и Кирхгофа. Приводятся численные результаты решения задачи о симметричном кавитационном обтекании пластины водой при числах кавитации $Q \in [0; 0,1]$ и числах Маха на границе каверны $M_c = M_{\max} \in [0; 1]$.

1. В плоскости $z = x + iy$ будем рассматривать стационарное, симметричное относительно оси x обтекание клина с углом полураствора θ_0 дозвуковым безвихревым адиабатическим потоком идеальной сжимаемой жидкости по схемам Рябушинского и Кирхгофа. На фиг. 1 слева показаны отвечающие названным схемам области течения, расположенные над осью x (bc и gh – стенки обтекаемого и фиктивного клиньев, cdg и ca – свободные поверхности, a – бесконечно удаленная точка, точка d свободной поверхности лежит на оси y , являющейся дополнительной осью симметрии для течения по схеме Рябушинского).

Пусть λ – приведенная скорость, M – число Маха, θ – угол наклона скорости к оси x , $\lambda_a = \lambda_\infty$ и $\lambda_c = \lambda_{\max}$ – значения λ в бесконечно удаленной точке и на свободной поверхности соответственно ($\lambda_a \leq \lambda_c \leq 1$), $M_a = M_\infty$ и $M_c = M_{\max}$ – значения M при $\lambda = \lambda_a$ и $\lambda = \lambda_c$, $\tau = \lambda/\lambda_a$, $\tau_0 = \lambda_c/\lambda_a$. На фиг. 1 справа показаны области $\Sigma = \{(\tau, \theta) \mid 0 < \tau < \tau_0, 0 < \theta < \theta_0\}$ в плоскости (τ, θ) , соответствующие левой верхней четверти области течения по схеме Рябушинского и верхней половине области течения по схеме Кирхгофа (отрезок BB_1 соответствует точке разветвления потока b , точки A , C и D – точкам a , c и d).

Введем функцию тока ψ

$$\tau v \cos \theta = \psi_y, \quad \tau v \sin \theta = -\psi_x, \quad v = \rho / \rho_0$$



Фиг. 1. Схемы рассматриваемых течений и области их голографов скорости

где ρ – плотность жидкости, ρ_0 – значение ρ в заторможенном потоке, нижними индексами отмечены частные производные. При сделанных предположениях функция тока ψ в области Σ удовлетворяет уравнению Чаплыгина

$$L\psi = (1 - M^2)\psi_{\theta\theta} + \tau^2\psi_{\tau\tau} + \tau(1 + M^2)\psi_{\tau} = 0 \quad (1.1)$$

Для течения по схеме Рябушинского $\psi = 0$ на ABB_1CD , $\psi_{\theta} = 0$ на AD . Для течения по схеме Кирхгофа $\psi = 0$ на ABB_1CA .

Зависимости $v(\tau)$ и $M(\tau)$, определяемые свойствами жидкости, будем считать известными дифференцируемыми функциями, аналитическими в окрестности точки $\tau = 1$ ($\lambda = \lambda_a$). При этом коэффициенты уравнения (1.1) разложимы в степенные ряды по $\zeta = \tau - 1$

$$\tau^2 = 1 + 2\zeta + \zeta^2, \quad 1 - M^2 = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \zeta^k, \quad \tau(1 + M^2) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k \zeta^k \quad (1.2)$$

$$p_0 = 1 - M_a^2, \quad p_k = -\frac{1}{k!} \left. \frac{d^k M^2}{d\tau^k} \right|_{\tau=1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$q_0 = 2 - p_0, \quad q_1 = q_0 - p_1, \quad q_k = -p_{k-1} - p_k, \quad k = 2, 3, \dots$$

Функцию тока представим в виде $\psi = \psi^0 + \chi$, где ψ^0 – функция, описывающая поведение ψ в окрестности особой точки A . Способ нахождения ψ^0 продемонстрируем на задаче о течении по схеме Кирхгофа. При этом придется различать случаи $\lambda_a < 1$ и $\lambda_a = 1$.

Пусть $\lambda_a < 1$. Введем переменные σ и ω

$$\sigma = (\theta^2 + \alpha^2 \zeta^2)^{1/2}, \quad \omega = \arctg \left(\frac{\theta}{\alpha \zeta} \right), \quad \zeta = \tau - 1, \quad \alpha = \sqrt{1 - M_a^2} \quad (1.3)$$

(для схемы Кирхгофа $\omega \in [\pi/2, \pi]$). Согласно (1.3)

$$\zeta = \alpha^{-1} \sigma \cos \omega, \quad \sigma_{\theta} = \sin \omega, \quad \sigma_{\tau} = \alpha \cos \omega \quad (1.4)$$

$$\omega_{\theta} = \sigma^{-1} \cos \omega, \quad \omega_{\tau} = -\alpha \sigma^{-1} \sin \omega$$

Функцию ψ^0 будем искать в виде асимптотического разложения по малому параметру σ , полагая

$$\psi^0 = \psi_1 + \psi_2 + \dots, \quad \psi_k = h_k(\sigma) f_k(\omega) \quad (1.5)$$

$$h_{k+1}(\sigma) / h_k(\sigma) \rightarrow 0, \quad \sigma \rightarrow 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\psi_k = 0, \quad (\theta, \tau) \in AB \cup AC, \quad k = 1, 2, \dots; \quad \psi_1 > 0, \quad (\tau, \theta) \in \Sigma \quad (1.6)$$

Главный член разложения (1.5) представим в виде $\psi_1 = \sigma^{-n} f_1(\omega)$ ($n = \text{const}, n > 0$). Полагая в (1.2) $\zeta = \alpha^{-1} \sigma \cos \omega$ и используя (1.4), можно показать, что при $\psi_1 = \sigma^{-n} f_1(\omega)$

$$L\psi_1 = L_1 + \Delta L_1, \quad L_1 = \alpha^2 \sigma^{-n-2} (n^2 f_1 + f_1''), \quad \Delta L_1 = O(\sigma^{-n-1})$$

Приравнявая нулю L_1 – главный член в разложении $L\psi_1$ по степеням σ , при учете (1.6) получим краевую задачу

$$n^2 f_1 + f_1'' = 0, \quad f_1(\pi/2) = f_1(\pi) = 0; \quad f_1(\omega) > 0, \quad \pi/2 < \omega < \pi; \quad n > 0 \quad (1.7)$$

Существует единственное с точностью до постоянного положительного множителя при f_1 решение задачи (1.7)

$$n = 2, \quad f_1(\omega) = -D \sin 2\omega, \quad \psi_1 = -D \sigma^{-2} \sin 2\omega \quad (D = \text{const}, D > 0)$$

При подстановке $\psi = \psi_1$ в (1.1) возникающие в результате дифференцирования ψ_1 члены порядка σ^{-4} взаимно уничтожаются и остается невязка порядка σ^{-3} . Следующий за ψ_1 член разложения (1.5) будем искать в виде $\psi_2 = \sigma^{-1} f_2(\omega)$, требуя, чтобы выполнялись условия (1.6) и чтобы в результате подстановки $\psi = \psi_1 + \psi_2$ в (1.1) члены порядка σ^{-3} уничтожились и осталась невязка порядка σ^{-2} . При этом для $f_2(\omega)$ получается краевая задача

$$f_2 + f_2'' = F_2, \quad f_2(\pi/2) = f_2(\pi) = 0 \quad (1.8)$$

$$F_2 = -D[6(\alpha^{-3} p_1 - 2\alpha^{-1}) \cos \omega \sin 4\omega - 2\alpha^{-1} q_0 \sin 3\omega]$$

В результате решения задачи (1.8) находим

$$\psi_2 = D \sigma^{-1} [(2\alpha^{-3} p_1 - 4\alpha^{-1}) \sin \omega \cos^4 \omega + \alpha^{-1} q_0 \sin \omega \cos^2 \omega]$$

Продолжая процесс последовательного понижения порядка выражения $L\psi^0$ при учете условий (1.6), можно найти члены $\psi_3 = f_3(\omega)$ и $\psi_4 = \sigma f_4(\omega)$ разложения (1.5). При этом для определения $f_k(\omega)$ каждый раз получается краевая задача вида

$$(k-3)^2 f_k + f_k'' = F_k, \quad f_k(\pi/2) = f_k(\pi) = 0, \quad k \geq 2$$

где F_k – известная функция ω . При отыскании слагаемого $\psi_5 = \sigma^2 f_5(\omega)$ возникает неопределенность, связанная с наличием такого решения однородного уравнения $4f_5 + f_5'' = 0$, которое удовлетворяет условиям $f_5(\pi/2) = f_5(\pi) = 0$. Это свидетельствует о том, что дальнейшее уточнение поведения функции тока ψ в окрестности особой точки A возможно только при учете полных граничных условий для функции $\psi = \psi^0 + \chi$.

При $\lambda_a = M_a = 1$ тип особенности меняется в связи с тем, что при этом коэффициент p_0 в разложении (1.2) обращается в нуль. В этом случае для описания особенности в точке A используем переменные κ и β

$$\kappa = [(\mu\theta)^2 + |\zeta|^3]^{1/2}, \quad \beta = \arctg \left(\frac{\mu\theta}{|\zeta|^{3/2}} \right), \quad \mu = 3/2 |p_1|^{-1/2} \quad (1.9)$$

$$\zeta = -\kappa^{2/3}(\cos\beta)^{2/3}, \quad \kappa_\theta = \mu \sin\beta, \quad \kappa_\tau = -\frac{3}{2}\kappa^{1/3}(\cos\beta)^{4/3} \quad (1.10)$$

$$\beta_\theta = \mu\kappa^{-1} \cos\beta, \quad \beta_\tau = \frac{3}{2}\kappa^{-2/3} \sin\beta(\cos\beta)^{1/3}, \quad 0 \leq \beta \leq \pi/2$$

Функцию ψ^0 будем искать в виде асимптотического разложения по малому параметру κ , полагая

$$\psi^0 = \psi_1 + \psi_2 + \dots, \quad \psi_k = d_k(\kappa)g_k(\beta) \quad (1.11)$$

$$d_{k+1}(\kappa)/d_k(\kappa) \rightarrow 0, \quad \kappa \rightarrow 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

и требуя выполнения условий (1.6).

Главный член разложения (1.11) представим в виде $\psi_1 = \kappa^{-n}g_1(\beta)$ ($n = \text{const}$, $n > 0$).

Полагая в (1.2) $\zeta = -\kappa^{2/3}(\cos\beta)^{2/3}$ и используя (1.10), можно показать, что при $\psi_1 = \kappa^{-n}g_1(\beta)$

$$L\psi_1 = L_1 + \Delta L_1, \quad \Delta L_1 = O(\kappa^{-n-2/3})$$

$$L_1 = \frac{9}{4}\kappa^{-n-4/3}(\cos\beta)^{2/3}[(n^2 - \frac{1}{3}n)g_1 - \frac{1}{3}\text{tg}\beta g_1' + g_1'']$$

Приравнивая нулю L_1 – главный член в разложении $L\psi_1$ по степеням κ , при учете (1.6) получим краевую задачу

$$(n^2 - \frac{1}{3}n)g_1 - \frac{1}{3}\text{tg}\beta g_1' + g_1'' = 0, \quad g_1(0) = g_1(\pi/2) = 0 \quad (1.12)$$

$$g_1(\beta) > 0, \quad 0 < \beta < \pi/2; \quad n > 0$$

Существует единственное с точностью до постоянного положительного множителя при g_1 решение задачи (1.12)

$$n = 2, \quad g_1(\beta) = D \sin\beta(\cos\beta)^{2/3} \quad (D = \text{const}, \quad D > 0)$$

При подстановке $\psi = \psi_1 = D\kappa^{-2} \sin\beta(\cos\beta)^{2/3}$ в (1.1) возникающие при этом члены порядка $\kappa^{-10/3}$ взаимно уничтожаются и остается невязка порядка $\kappa^{-8/3}$. Следующий за ψ_1 член в разложении (1.12) будем искать в виде $\psi_2 = \kappa^{-4/3}g_2(\beta)$, требуя, чтобы выполнялись условия (1.6) и чтобы в результате подстановки $\psi = \psi_1 + \psi_2$ в (1.1) члены порядка $\kappa^{-8/3}$ уничтожились и осталась невязка порядка κ^{-2} . При этом для $g_2(\beta)$ получается краевая задача

$$\frac{4}{3}g_2 - \frac{1}{3}\text{tg}\beta g_2' + g_2'' = G_2, \quad g_2(0) = g_2(\pi/2) = 0$$

$$G_2 = \sin\beta[\gamma_1(\cos\beta)^{-2/3} + \gamma_2(\cos\beta)^{4/3} + \gamma_3(\cos\beta)^{10/3}] \quad (1.13)$$

$$\gamma_1 = \frac{4}{9}q_0D, \quad \gamma_2 = \frac{22}{9}\left(4\frac{p_2}{p_1} - 8 - q_0\right)D, \quad \gamma_3 = \frac{187}{9}\left(2 - \frac{p_2}{p_1}\right)D$$

Нетрудно проверить, что функции

$$y_1 = \sin\beta, \quad y_2 = -(\cos\beta)^{2/3} + \frac{1}{3}\sin\beta \int_{\pi/2}^{\beta} (\cos\beta)^{-1/3} d\beta$$

служат решениями однородного уравнения, соответствующего (1.13). Применяя метод вариации постоянных, можно получить решение краевой задачи (1.13)

$$g_2 = C_1y_1 + C_2y_2, \quad C_1 = C_{11} + C_{12} + C_{13}, \quad C_2 = C_{21} + C_{22} + C_{23}$$

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= \gamma_1 \left(-\frac{3}{5} t^{4/3} + \frac{1}{5} s t^{2/3} J - \frac{1}{10} J^2 \right) \\
 C_{12} &= \gamma_2 \left[-\frac{3}{11} t^{10/3} - \frac{9}{220} t^{4/3} + s \left(\frac{1}{11} t^{8/3} - \frac{3}{55} t^{2/3} \right) J - \frac{1}{55} J^2 \right] \\
 C_{13} &= \gamma_3 \left[-\frac{3}{17} t^{16/3} - \frac{9}{1870} t^{10/3} - \frac{18}{935} t^{4/3} + s \left(\frac{1}{17} t^{14/3} - \frac{3}{187} t^{8/3} - \frac{24}{935} t^{2/3} \right) J - \frac{8}{935} J^2 \right] \quad (1.14)
 \end{aligned}$$

$$C_{21} = \gamma_1 (I_1 - I_2), \quad C_{22} = \gamma_2 (I_2 - I_3), \quad C_{23} = \gamma_3 (I_3 - I_4)$$

$$y_1 = s, \quad y_2 = -t^{2/3} + \frac{1}{3} s J, \quad s = \sin \beta, \quad t = \cos \beta$$

$$J = \int_{\pi/2}^{\beta} (\cos \beta)^{-1/3} d\beta, \quad I_k = \int_0^{\beta} (\cos \beta)^{2k-7/3} d\beta, \quad k = 1, 2, 3, 4$$

Процесс отыскания функций ψ_k вида $\psi_k = \alpha^{-8/3+2k/3} g_k(\beta)$ на основе последовательного понижения порядка выражения $L(\psi_1 + \psi_2 + \dots)$ при выполнении условий (1.6) может быть продолжен. При этом для определения $g_k(\beta)$ каждый раз получается краевая задача вида

$$\frac{1}{9}(56 - 30k + 4k^2)g_k - \frac{1}{3} \operatorname{tg} \beta g_k' + g_k'' = G_k, \quad g_k(0) = g_k(\pi/2) = 0$$

где G_k — известная функция β .

При отыскании функции ψ^0 для течения по схеме Рябушинского используем переменные σ, ω (1.3) ($0 \leq \omega \leq \pi$), представление (1.5) и условия

$$\psi^0 = 0, \quad \omega = \pi; \quad \psi_0^0 = 0, \quad \omega = 0, \quad \psi^0 > 0; \quad 0 < \omega < \pi, \quad \sigma \rightarrow 0 \quad (1.15)$$

Полагая $\psi_1 = \sigma^{-n} f_1(\omega)$ ($n = \text{const}, n > 0$) и приравнявая нулю главный член в разложении $L\psi_1$ по степеням σ , при учете (1.15) получим краевую задачу

$$n^2 f_1 + f_1'' = 0, \quad f_1(\pi) = f_1'(0) = 0; \quad f_1(\omega) > 0, \quad 0 < \omega < \pi; \quad n > 0$$

решение которой имеет вид $n = 1/2, f_1 = D \cos(\omega/2)$. Таким образом, $\psi_1 = D \sigma^{-1/2} \cos(\omega/2)$.

При отыскании функции ψ_2 возникает неопределенность, подобная описанной выше неопределенности в определении функции ψ_5 в задаче о течении по схеме Кирхгофа. Поэтому в расчетах, о которых пойдет речь ниже, полагалось $\psi^0 = \psi_1 = \sigma^{-1/2} \cos(\omega/2)$.

2. Зная функцию ψ^0 , можно перейти к решению краевой задачи для функции ψ с помощью метода конечных разностей. При этом возможны два подхода. Первый подход основан на нахождении функции $\chi = \psi - \psi^0$ из решения соответствующей краевой задачи для уравнения $L\chi = -L\psi^0$ (используются найденные аналитически значения $L\psi^0$ в узлах сетки). В основе второго подхода лежит соображение о том, что в окрестности точки A функция ψ близка к ψ^0 . При этом подходе значения ψ^0 на некоторой прямоугольной ломаной, отделяющей окрестность точки A от остальной части области Σ , используются в качестве граничных значений функции ψ при решении соответствующей краевой задачи для уравнения $L\psi = 0$.

Практика вычислений показала, что второй подход не только более прост в реализации, но и позволяет получать надежные результаты в более широком диапазоне определяющих параметров.

При малых (но отличных от нуля) числах кавитации Q точки A и D близки друг к другу, поэтому велики градиенты ψ на отрезке AD и примыкающей к нему части области Σ . Это приводит к необходимости преобразования независимых перемен-

ных при численном решении задачи. Удобны, в частности, следующие преобразования [8, § 5.6], переводящие Σ в $\Sigma_1 = \{(\xi, \eta) \mid 0 < \xi < 1, 0 < \eta < 1\}$:

$$\xi = F(1 + \beta_1, \tau / \tau_0), \quad \eta = 1 - F(1 + \beta_2, 1 - \theta / \theta_0)$$

$$F(x, y) = \ln[(x + y) / (x - y)] \{ \ln[(x + 1) / (x - 1)] \}^{-1}$$

где параметры β_1 и β_2 – малые положительные числа.

При исследовании течения по схеме Кирхгофа выгодно сгустить узловые точки в окрестности отрезков B_1C , CA и BA с помощью преобразований

$$\xi = F\left(1 + \beta_1, \frac{\tau}{\tau_0}\right), \quad \eta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} F\left(1 + \beta_2, \frac{2\theta}{\theta_0} - 1\right), \quad \beta_1, \beta_2 \in [0, 0005; 0, 005]$$

Уравнение $L\psi = 0$ записывается в форме $\Gamma\psi = 0$

$$\Gamma(\psi) = A\psi_{\eta\eta} + B\psi_{\xi\xi} + C\psi_{\xi} + D\psi_{\eta}, \quad A = (1 - M^2)\eta_0^2$$

$$B = \tau^2\xi_\tau^2, \quad C = \tau^2\xi_{\tau\tau} + (1 + M^2)\tau\xi_\tau, \quad D = (1 - M^2)\eta_{\theta\theta}$$

Применена конечно-разностная схема с пятиточечной аппроксимацией на равномерной прямоугольной сетке. Для ее реализации использован метод последовательной верхней релаксации.

После определения функции $\psi(\tau, \theta)$ переход в физическую плоскость производится с использованием формул

$$v\tau^2 z_\tau = [(M^2 - 1)\psi_\theta + i\tau\psi_\tau]e^{i\theta}, \quad v\tau z_\theta = (\tau\psi_\tau + i\psi_\theta)e^{i\theta} \quad (2.1)$$

($z = x + iy$). Производные ψ_τ , ψ_θ находятся с помощью сплайн-аппроксимации сеточных значений ψ .

Если функция ψ является решением уравнения (1.1), то значения x и y , определяемые по формулам (2.1), не должны зависеть от пути интегрирования. Это соображение можно использовать для контроля точности получаемого решения.

3. Для многих жидкостей связь между давлением p и плотностью ρ в изэнтропическом процессе выражается формулой [9]

$$(p + B) / (p_s + B) = (\rho / \rho_s)^\gamma \quad (3.1)$$

где p_s , ρ_s , B , γ – некоторые постоянные, причем для воды $\gamma = 7,15$. Из уравнения Бернулли и равенства (3.1) при принятых допущениях получаются соотношения

$$M^2 = \frac{2}{\gamma + 1} \lambda^2 (1 - m\lambda^2)^{-1}, \quad v = \frac{\rho}{\rho_0} = (1 - m\lambda^2)^{1/(\gamma - 1)} \quad (3.2)$$

$$p = p_0 + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \rho_0 a_*^2 [(1 - m\lambda^2)^{\gamma/(\gamma - 1)} - 1], \quad m = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}$$

Здесь a_* – критическая скорость, p_0 – давление в заторможенном потоке. Постоянная γ в (3.1) имеет иной физический смысл, чем показатель адиабаты совершенного газа, но играет ту же роль в выражениях, связывающих M , v и λ .

Пусть p_a , ρ_a , V_a – давление, плотность и скорость набегающего потока, p_c – давление в каверне, X – сопротивление клина, l – проекция клина на ось y . Для числа кавитации $Q = 2(p_a - p_c) / (\rho_a V_a^2)$ и коэффициента сопротивления $C_x = 2X / (\rho_a V_a^2 l)$ с помощью (3.2) получим выражения

$$Q = \frac{\gamma + 1}{\gamma \lambda_a^2} (1 - m\lambda_a^2)^{1/(1 - \gamma)} [(1 - m\lambda_a^2)^{\gamma/(\gamma - 1)} - (1 - m\lambda_c^2)^{\gamma/(\gamma - 1)}] =$$

$$= \frac{2}{\gamma M_a^2} \left[1 - \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_a^2 \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_c^2 \right)^{-\gamma/(\gamma-1)} \right]$$

$$C_x = \frac{2(1-m\lambda_a^2)^{1/(1-\gamma)}}{y(\tau_0, \theta_0)} \int_0^{\tau_0} y(\tau, \theta_0) (1-m\lambda_a^2 \tau^2)^{1/(\gamma-1)} \tau \, d\tau$$

Пусть L и H – длина и ширина каверны при симметричном обтекании пластины ширины l по схеме Рябушинского ($\theta_0 = \pi/2$), $L_l = L/l$, $L_H = L/H$, $H_l = H/l$. Обозначим через C_x° , L_l° , L_H° , H_l° значения C_x , L_l , L_H , H_l для несжимаемой жидкости ($M_a = M_c = 0$). Зависимости величин C_x° , L_l° , H_l° от числа кавитации Q определяются известными [10, § 22] выражениями, содержащими полные эллиптические интегралы первого и второго рода $K = K(k)$, $E = E(k)$ и алгебраические функции от их модуля k . Используя разложения K и E по степеням k^2 , а также соотношение Лежандра и равенство [11]

$$\lim_{k \rightarrow 1} [K - \frac{1}{2} \ln(16/q^2)] = 0 \quad (q^2 = 1 - k^2)$$

из точных формул можно получить следующие приближенные выражения, имеющие асимптотический характер при $Q \rightarrow 0$:

$$C_x^\circ = \frac{2\pi}{\pi+4} (1+Q) \left[1 + \frac{1}{2(\pi+4)} q^2 \right], \quad q = \frac{Q}{2+Q}$$

$$H_l^\circ = 1 + \frac{8}{\pi+4} \frac{1}{Q} \left[1 - \frac{\pi}{8(\pi+4)} q^2 \right] \tag{3.3}$$

$$L_l^\circ = \frac{4}{\pi+4} \left[\frac{1}{q^2} - \ln 2 - \frac{1}{4} - \frac{\pi}{8(\pi+4)} + \frac{1}{4} \ln q^2 \right]$$

Формулы (3.3) весьма точны. При $Q \in [0; 0,1]$ они позволяют вычислять L_l° , C_x° и H_l° с погрешностью, не превышающей $6 \cdot 10^{-5}$, $1 \cdot 10^{-5}$ и $8 \cdot 10^{-6}$ % соответственно. Даже при $Q = 0,5$ погрешность в определении L_l° , C_x° и H_l° по формулам (3.3) составляет лишь 0,01; 0,004 и 0,002%, а при $Q = 2$ – соответственно 0,3; 0,2 и 0,05%.

4. Вычисления проводились на сетке, получаемой делением каждой из сторон квадрата Σ_1 на 100 равных частей, для значений $\theta_0 = \pi/2$ (пластина), $\gamma = 7,15$ (вода), $Q = 0; 0,005; 0,01; 0,02; 0,04; 0,06; 0,08; 0,1$ при различных значениях M_c из интервала $[0; 1]$. Значения ψ^0 в семи внутренних узлах сетки, лежащих на прямоугольной ломаной в окрестности точки A , использовались в качестве дополнительных граничных значений ψ .

Значения C_x° , L_l° , L_H° , H_l° , полученные с помощью описанного метода на сетке 100×100 при $Q \in [0,005; 0,1]$, отличаются от вычисленных по формулам (3.3) не более чем на 0,05%, причем переход от сетки 50×50 к сетке 100×100 приводит к уменьшению погрешностей в несколько раз. Использование функции $\psi^0 = \psi_1 + \psi_2$ вместо $\psi^0 = \psi_1$ в схеме Кирхгофа практически не сказывается на результатах вычислений.

Задачу об обтекании пластины идеальным совершенным газом по схеме Кирхгофа исследовал впервые С.А. Чаплыгин [12]. Он нашел выражение для коэффициента сопротивления пластины C_x , содержащее ряд по гипергеометрическим функциям, и получил из него для случая $\gamma = 1,4$ (γ – показатель адиабаты) простую приближенную формулу, которая оказалась весьма точной. Вычисление C_x с высокой точностью посредством суммирования упомянутого ряда при $\gamma = 1,4$ выполнено в [13]. Авторами проведены контрольные расчеты обтекания пластины по схеме Кирхгофа при $\gamma = 1,4$. Сравнение полученных результатов с [13] показало, что с ростом $M_a = M_\infty$ от 0 до 1

k	a_{1k}	a_{2k}	a_{3k}	b_{1k}	b_{2k}	$b_{3k} \cdot 10^2$	c_{1k}	c_{2k}	c_{3k}
1	0,3162	-0,1755	0,0304	-1,1329	0,1758	1,0715	1,0371	2,4537	0,1852
2	-0,4597	-0,1236	0,0128	1,2627	-0,3436	-0,9485	-0,3235	-1,7988	-0,1451
3	0,3693	0,5974	0,2653	0,1044	-0,0406	-0,0585	-0,0463	-0,2517	-0,0248

погрешность в определении C_x увеличивается от 0,02 до 0,3%. Полученные данные позволяют заключить, что применяемый метод достаточно надежен вплоть до $M_{\max} = 1$, хотя наилучшие результаты дает при малых числах Маха.

На основе полученных результатов с применением метода наименьших квадратов построены аппроксимационные формулы для параметров C_x, L_H, H_I вида

$$C_x = aC_x^o, \quad H_I = bH_I^o, \quad L_H = cL_H^o \quad (4.1)$$

$$a = 1 + a_1 M_c^2 + a_2 M_c^3 + a_3 M_c^4$$

$$a_n = a_{n1} + a_{n2}Q + a_{n3}Q^2$$

$$b = 1 + b_1 M_c^2 + b_2 M_c^4 + b_3 M_c^2(1,02 - M_c^2)^{-1}$$

$$b_n = b_{n1} + b_{n2}Q^{-1/8} + b_{n3}Q^{-1/8} \ln Q$$

$$c = 1 + c_1 M_c^2 + c_2 M_c^4 \ln(1,02 - M_c^{1,6}) + c_3 M_c^4(1,02 - M_c^{1,4})^{-1}$$

$$c_n = c_{n1} + c_{n2}Q^{-1/3} + c_{n3}Q^{-1/3} \ln Q, \quad (n = 1, 2, 3)$$

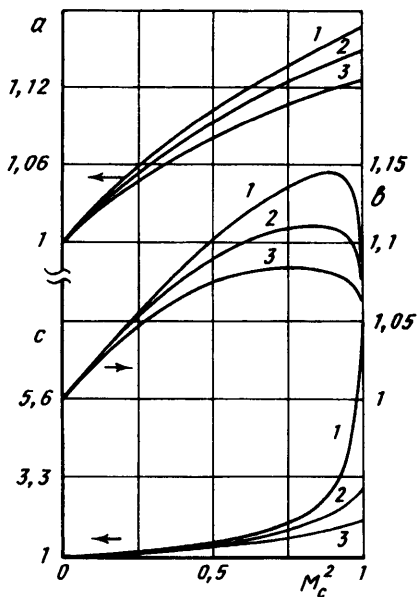
Здесь C_x^o, L_H^o, H_I^o – функции Q , определенные формулами (3.3) ($L_H^o = L_I^o / H_I^o$), значения коэффициентов a_{nk}, b_{nk}, c_{nk} приведены в таблице.

Формулы (4.1) аппроксимируют расчетные значения C_x в области $Q \in [0; 0,1]$, $M_c \in [0; 1]$ с погрешностью, не превосходящей 0,03%, а расчетные значения H_I и L_H в области $Q \in [0,005; 0,1]$, $M_c \in [0; 1]$ – с погрешностью, не превосходящей 0,3 и 1,4% соответственно.

На фиг. 2 показаны зависимости параметров a, b, c от M_c^2 при $Q = 0,005; 0,04$ и $0,1$ (кривые 1–3 соответственно). Учет сжимаемости приводит к увеличению значений C_x, H_I, L_H , причем влияние сжимаемости проявляется тем сильнее, чем меньше Q . Так, при $Q = 0,005$ C_x возрастает почти на 17%, а L_H увеличивается почти в 8 раз при увеличении M_c от 0 до 1. Зависимость H_I от M_c при $Q = \text{const}$ немонотонна: на интервале $M_c \in [0; 1]$ имеется один максимум, который смещается в сторону точки $M_c = 1$ при уменьшении Q . При $Q = 0,005$ максимальное увеличение H_I за счет сжимаемости достигает почти 15%.

На фиг. 3 показана форма свободной поверхности при обтекании пластины по схеме Кирхгофа ($Q = 0$) для $M_\infty = 0; 0,5; 1$ (кривые 1–3 соответственно). При изменении M_∞ от 0 до 1 каверна Кирхгофа монотонно сужается на всем ее протяжении.

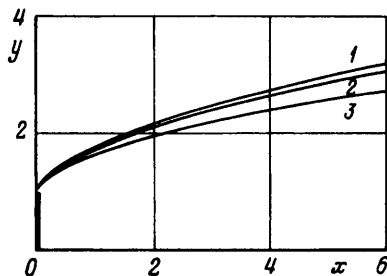
Представляет интерес исследование асимптотики свободной границы для течения по схеме Кирхгофа. Автор [14] исследовал обтекание симметричных полутел с уравнением контура $y = \pm Px^n$ ($P, n = \text{const}$) на основе линейной теории возмущенного звукового течения совершенного газа и показал, что при $n = 2/5$ скорость на поверхности тела всюду, кроме носика, равна звуковой. Отсюда можно заключить, что при симметричном обтекании препятствия совершенным газом по схеме Кирхгофа при $M_\infty = 1$ уравнение контура свободной поверхности должно удовлетворять асимптотическому соотношению $y \sim \pm Px^{2/5}$ ($x \rightarrow \infty$). Автор [15] рассмотрел задачу о сим-



Фиг. 2

Фиг. 2. Зависимость параметров a , b , c в формулах (4.1) от $M_c^2 = M_{\max}^2$: $Q = 0,005; 0,04; 0,1$ (кривые 1-3)

Фиг. 3. Форма свободной поверхности при обтекании пластины по схеме Кирхгофа ($Q = 0$): $M_\infty = 0; 0,5; 1$ (кривые 1-3)



Фиг. 3

метричном обтекании газом клина в точной постановке; для совершенного газа и малых углов раствора клина он получил асимптотические выражения

$$y \sim \pm Px^{1/2}, \quad M_\infty < 1, \quad y \sim \pm Sx^{2/5}, \quad M_\infty = 1 \quad (P, S = \text{const})$$

характеризующие форму свободной поверхности при $x \rightarrow \infty$.

Проведем анализ формы свободной поверхности при симметричном обтекании препятствия по схеме Кирхгофа с помощью найденных членов разложения функции ψ^0 . Предварительно заметим, что при построении ψ^0 используются условия только на оси симметрии и на свободной поверхности и, следовательно, функция ψ^0 не зависит от формы обтекаемого контура.

Пусть $\psi^0 = \psi_1 + \psi_2 + \dots$ — функция, найденная способом, описанным в разд. 1. Очевидно, функция тока ψ имеет в окрестности особой точки асимптотическое разложение, члены которого совпадают с ψ_1, ψ_2, \dots до тех пор, пока функции ψ_k определяются однозначно (с точностью до общего постоянного положительного множителя D).

Для симметричного течения по схеме Кирхгофа при $M_a = M_\infty < 1$ функции ψ_1, ψ_2, ψ_3 определяются однозначно, причем в соответствии с результатами разд. 1

$$\psi_{1\tau}|_{AC} = -2D\alpha\theta^{-3}, \quad \psi_{2\tau}|_{AC} = 0, \quad \psi_{3\tau}|_{AC} = O(\theta^{-1}) \quad (\theta \rightarrow 0)$$

Поскольку все $\psi_{k\theta}|_{AC} = 0$, из (2.1) следует, что на AC

$$x_\theta = v_a^{-1} \cos\theta \psi_\tau|_{AC}, \quad y_\theta = v_a^{-1} \sin\theta \psi_\tau|_{AC} \quad (v_a = \rho_a / \rho_0) \quad (4.2)$$

Отсюда для свободной поверхности ca при $\theta \rightarrow 0$ будем иметь

$$\begin{aligned} x_\theta &= -2D_1\theta^{-3} + O(\theta^{-1}), & y_\theta &= -2D_1\theta^{-2} + O(1) \\ x &= D_1\theta^{-2} + O(\ln\theta), & y &= 2D_1\theta^{-1} + D_2 + O(\theta) \end{aligned} \quad (4.3)$$

где $D_1 = \alpha v_a^{-1} D$, D_2 – постоянная интегрирования. Согласно (4.3), на ca

$$\theta^{-1} = D_1^{-1/2} x^{1/2} + O(x^{-1/2} \ln x), \quad y = Px^{1/2} + O(1), \quad (x \rightarrow \infty, M_\infty < 1) \quad (4.4)$$

где P не зависит от x ($P = 2D_1^{1/2}$).

Для симметричного течения по схеме Кирхгофа при $M_\infty = 1$ функции ψ_1, ψ_2, ψ_3 определяются однозначно. Используя результаты разд. 1, можно показать, что

$$\psi_{1\tau}|_{AC} = -D\mu^{-8/3}\theta^{-8/3}, \quad \psi_{2\tau}|_{AC} = 0, \quad \psi_{3\tau}|_{AC} = O(\theta^{-4/3}) \quad (4.5)$$

Первое и третье соотношения (4.5) получаются без труда, второе получается из (1.14) с учетом (1.13), (1.10) и равенств

$$I_2^\circ = \frac{2}{5} I_1^\circ, \quad I_3^\circ = \frac{16}{55} I_1^\circ, \quad I_4^\circ = \frac{224}{935} I_1^\circ, \quad I_k^\circ = \int_0^{\pi/2} (\cos \beta)^{2k-7/3} d\beta$$

Из (4.2), (4.5) для свободной поверхности ca при $\theta \rightarrow 0$ получим

$$\begin{aligned} x_\theta &= -E_1 \theta^{-8/3} + O(\theta^{-4/3}), & y_\theta &= -E_1 \theta^{-3/3} + O(\theta^{-1/3}) \\ x &= \frac{3}{5} E_1 \theta^{-5/3} + O(\theta^{-1/3}), & y &= \frac{3}{2} E_1 \theta^{-2/3} + E_2 + O(\theta^{2/3}) \end{aligned} \quad (4.6)$$

где $E_1 = v_a^{-1} \mu^{-8/3} D$, E_2 – постоянная интегрирования. Согласно (4.6), на ca

$$\theta^{-2/3} = (\frac{3}{5} E_1)^{-2/5} x^{2/5} + O(x^{-2/5}), \quad y = Sx^{2/5} + O(1), \quad (x \rightarrow \infty, M_\infty = 1) \quad (4.7)$$

где S не зависит от x .

Соотношения (4.4), (4.7), справедливые для симметричного обтекания произвольного контура идеальным газом с произвольной связью между давлением и плотностью, уточняют и обобщают соответствующие результаты [14, 15].

Заключение. Развиваемый авторами численно-аналитический метод применен к решению задач о симметричном обтекании пластины по схемам Рябушинского и Кирхгофа плоским дозвуковым потоком сжимаемой жидкости, моделирующей воду. В результате аппроксимации расчетных данных получены формулы, выражающие зависимость коэффициента сопротивления пластины C_x , а также длины и ширины каверны от числа кавитации Q при $Q \in [0,005; 0,1]$ (для $C_x Q \in [0; 1]$) и числа Маха на границе каверны M_c при $M_c \in [0; 1]$. Получены асимптотические соотношения, характеризующие форму свободной поверхности на большом удалении от произвольного симметричного контура, обтекаемого по схеме Кирхгофа плоским симметричным дозвуковым потоком сжимаемой жидкости.

Авторы благодарны Г.Ю. Степанову за внимание к работе и полезные замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-00111).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Серебряков В.В.* Асимптотические решения осесимметричных задач до- и сверхзвуковых отрывных течений воды при нулевых числах кавитации // Докл. АН Украины. Мат., естествозн., техн. науки. 1992. № 9. С. 66–71.
2. *Зигангареева Л.М., Киселев О.М.* О расчете кавитационного обтекания кругового конуса дозвуковым потоком сжимаемой жидкости // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 4. С. 93–107.
3. *Ивченко В.М., Чунаха Д.Д.* Краевые задачи для СК – тонких тел в пузырьковом газожидкостном потоке // Асимптотические методы в теории систем. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1977. С. 114–125.

4. Нишияма Т. Линеаризованная теория суперкавитирующих гидропрофилей в дозвуковом потоке жидкости // Теорет. основы инж. расчетов. 1977. № 2. С. 135–143.
5. Терентьев А.Г. Учет сжимаемости при кавитационном обтекании препятствий // Тр. ЦИАМ. 1984. Вып. 1093. С. 141–147.
6. Филиппов В.И. Влияние сжимаемости жидкости на геометрические размеры каверны // Взаимодействие тел в жидкости со свободными границами. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 1987. С. 115–121.
7. Киселев О.М. О расчете струйных течений газа с использованием переменных годографа скорости // Тез. докл. 4-й Всесоюз. науч. школы "Гидродинамика больших скоростей". Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 1989. С. 34.
8. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. Т. 1. М.: Мир, 1990. 384 с.
9. Кнэпп Р., Дейли Дж., Хэммит Ф. Кавитация. М.: Мир, 1974. 687 с.
10. Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Физматгиз, 1961. 496 с.
11. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979. 830 с.
12. Чаплыгин С.А. О газовых струях. М.: Тип. ун-та, 1902. 121 с. (Избранные труды по механике и математике. М.: Гостехиздат, 1954. С. 9–89.)
13. Сунгурцев Ю.В. Плоские струйные течения газа. М.: Изд-во МГУ, 1989. 256 с.
14. Nonweiler T.R.F. The sonic flow about some symmetric half-bodies // J. Fluid Mech. 1958. V. 4. Pt 2. P. 140–148.
15. Mackie A.G. Applications of the theory of the general hodograph equation. Pt 1. Kirchhoff – Helmholtz flow past a wedge // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1962. V. 58. Pt 4. P. 631–637.

Казань

Поступила в редакцию
19.VI.1996