

УДК 532.527.2.013.4:517.91

© 1998 г. В.В. КОЛЕСОВ, В.И. ЮДОВИЧ

РАСЧЕТ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ РЕЖИМОВ В ТЕЧЕНИИ КУЭТТА ВБЛИЗИ ТОЧКИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ БИФУРКАЦИЙ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ВИХРЕЙ ТЕЙЛОРА И АЗИМУТАЛЬНЫХ ВОЛН

Исследованы автоколебательные режимы движения жидкости вблизи течения Куэтта между твердыми разновращающимися цилиндрами в малой окрестности точки пересечения нейтральных кривых монотонной и колебательной неустойчивости. Методы теории бифуркаций вместе с вычислениями на компьютере позволили обнаружить переходы, связанные с рождением квазипериодических колебаний, а также хаотических аттракторов.

Течение Куэтта между твердыми, соосными, противоположно вращающимися цилиндрами при различных отношениях их угловых скоростей с ростом числа Рейнольдса теряет устойчивость по-разному. Наряду с возникновением вращательно-симметричных вихрей Тейлора оказывается также возможным рождение вторичных автоколебательных режимов, связанных с азимутальными волнами. Нейтральные кривые, отвечающие двум типам потери устойчивости, пересекаются [1, 2]. Когда значения параметров близки к тем, которые соответствуют точке пересечения, тейлоровские и азимутальные моды сильно взаимодействуют, что может приводить к возникновению разнообразных, в том числе хаотических, режимов движения.

В описанной ситуации система Навье – Стокса вместе с краевыми условиями инвариантна относительно вращений около общей оси цилиндров, а также относительно сдвигов вдоль этой оси. Кроме того, имеется зеркальная симметрия относительно отражений в плоскости поперечного сечения цилиндров. Благодаря указанным свойствам симметрии вращательно-симметричной неустойчивости соответствует пара вещественных мод (или одна комплексная), а азимутальной неустойчивости – четыре вещественные моды (две комплексные). В итоге критическое число Рейнольдса, соответствующее пересечению нейтральных кривых, оказывается шестикратно выродившимся.

Для описания нелинейного взаимодействия этих шести мод применяется техника теории бифуркаций, связанная с использованием теоремы о нейтральном многообразии. В результате приходим к амплитудной системе шести обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с кубическими ведущими нелинейными членами [3–6], которая является обобщением известного амплитудного уравнения Ландау [6]. Аналогичная амплитудная система, соответствующая пересечению бифуркаций возникновения азимутальных волн с различными азимутальными волновыми числами, рассматривалась в [7, 8].

Амплитудная система наследует симметрию исходной полной системы Навье–Стокса, что позволяет, переходя к инвариантам, понизить ее порядок с шести до четырех. Возникающая таким путем система называется моторной, или фактор-системой. Ее неизвестные – три амплитуды трех комплексных мод, а также некоторая резонансная линейная комбинация их фаз. Уравнения для остальных двух фаз отделяются и могут быть просто проинтегрированы, когда решение моторной подсистемы уже известно.

Данная статья посвящена расчету предельных циклов моторной подсистемы

исследованию их устойчивости и бифуркаций. Подчеркнем, что периодическому режиму моторной подсистемы соответствует квазипериодический (двух- или трехчастотный) режим полной амплитудной системы и системы Навье–Стокса. Одна или две дополнительные частоты определяются двумя уравнениями для фаз, не входящими в моторную подсистему.

1. Постановка задачи. Пусть вязкая несжимаемая однородная жидкость заполняет полость между двумя твердыми бесконечными концентрическими цилиндрами с радиусами R_1, R_2 ($R_1 < R_2$), вращающимися с угловыми скоростями Ω_1, Ω_2 .

В цилиндрических координатах r, φ, z безразмерные уравнения Навье–Стокса имеют вид [6]

$$\begin{aligned} \frac{\partial v'_r}{\partial \tau} + (\mathbf{V}', \nabla) v'_r - \frac{v'_\varphi{}^2}{r} + \frac{\partial \Pi'}{\partial r} &= \frac{1}{\lambda} \left(\Delta v'_r - \frac{v'_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v'_\varphi}{\partial \varphi} \right) \\ \frac{\partial v'_\varphi}{\partial \tau} + (\mathbf{V}', \nabla) v'_\varphi + \frac{v'_r v'_\varphi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi'}{\partial \varphi} &= \frac{1}{\lambda} \left(\Delta v'_\varphi - \frac{v'_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v'_r}{\partial \varphi} \right) \\ \frac{\partial v'_z}{\partial \tau} + (\mathbf{V}', \nabla) v'_z + \frac{\partial \Pi'}{\partial z} &= \frac{1}{\lambda} \Delta v'_z, \quad \operatorname{div} \mathbf{V}' = 0 \\ \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial z} \right\} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $\mathbf{V}' = \{v'_r, v'_\varphi, v'_z\}$ – вектор скорости, Π' – давление, τ – время, $\lambda = \Omega_1 R_1^2 / \nu$ – число Рейнольдса, ν – коэффициент кинематической вязкости жидкости. За масштабы длины, скорости и времени приняты соответственно $R_1, \Omega_1 R_1$ и $1/\Omega_1$.

Уравнения (1.1) рассматриваются при краевых условиях

$$v'_r = v'_z = 0, \quad v'_\varphi = 1 \quad (r=1); \quad v'_r = v'_z = 0, \quad v'_\varphi = \frac{\Omega_2 R_2}{\Omega_1 R_1} \left(r = \frac{R_2}{R_1} \right) \quad (1.2)$$

Будем предполагать, что компоненты скорости и давление периодичны по z с известным периодом $2\pi/\alpha$, α – аксиальное волновое число.

Задача (1.1)–(1.2) содержит четыре существенных параметра: кроме числа Рейнольдса λ и волнового числа α это отношения радиусов цилиндров $R = R_2/R_1$ и угловых скоростей $\Omega = \Omega_2/\Omega_1$.

Рассматриваемая система обладает группой симметрии $G = SO(2) \times O(2)$ – она инвариантна относительно вращений L_φ^δ , трансляций L_z^h и инверсии J , действующих на поле скоростей по правилам

$$\begin{aligned} (L_\varphi^\delta \mathbf{V}')(\tau, r, \varphi, z) &= \mathbf{V}'(\tau, r, \varphi + \delta, z) \\ (L_z^h \mathbf{V}')(\tau, r, \varphi, z) &= \mathbf{V}'(\tau, r, \varphi, z + h) \\ (J \mathbf{V}')(\tau, r, \varphi, z) &= \{v'_r(\tau, r, \varphi, -z), v'_\varphi(\tau, r, \varphi, -z), -v'_z(\tau, r, \varphi, -z)\} \end{aligned} \quad (1.3)$$

для любых вещественных δ и h .

Соленоидальное поле \mathbf{V} , касательное к границе полости и обладающее полной G -симметрией, имеет вид $\mathbf{V} = \{0, v_\varphi(r), 0\}$. Подпространство таких полей инвариантно для системы Навье–Стокса, которая на нем превращается в линейную. Благодаря этому легко устанавливается, что, стартуя с произвольного G -инвариантного начального поля скорости, течение при $\tau \rightarrow +\infty$ стремится к единственному G -инвариантному

стационарному течению указанного вида – течению Куэтта с полем скорости V_0 и давлением Π_0

$$V_0 = \{0, v_{0\varphi}(r), 0\}, \quad \Pi_0 = \int_1^r \frac{v_{0\varphi}^2(s)}{s} ds + \text{const} \quad (1.4)$$

$$v_{0\varphi} = ar + \frac{b}{r}, \quad a = \frac{\Omega R^2 - 1}{R^2 - 1}, \quad b = 1 - a$$

Полагая $V' = V_0 + V$, $\Pi' = \Pi_0 + \Pi/\lambda$, приходим к следующей задаче для возмущений

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial \tau} + \omega \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + (V, \nabla)v_r - \frac{v_\varphi^2}{r} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \Pi}{\partial r} &= \frac{1}{\lambda} \left(\Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) + 2\omega v_\varphi \\ \frac{\partial v_\varphi}{\partial \tau} + \omega \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + (V, \nabla)v_\varphi + \frac{v_r v_\varphi}{r} + \frac{1}{\lambda r} \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} &= \frac{1}{\lambda} \left(\Delta v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right) + g v_r \\ \frac{\partial v_z}{\partial \tau} + \omega \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + (V, \nabla)v_z + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \Pi}{\partial z} &= \frac{1}{\lambda} \Delta v_z, \quad \text{div } V = 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\omega = \frac{v_{0\varphi}}{r} = a + \frac{b}{r^2}, \quad g = -\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) v_{0\varphi} = -2a$$

$$v_r = v_\varphi = v_z = 0 \quad (r=1, R) \quad (1.6)$$

В случае, когда цилиндры вращаются в противоположные стороны, оказываются возможными два типа потери устойчивости течения Куэтта (1.4): монотонная неустойчивость, приводящая к возникновению стационарных вихрей Тейлора, и колебательная неустойчивость, порождающая вторичный автоколебательный режим типа бегущей азимутальной волны [1, 2].

Требуется исследовать колебательные режимы, которые возникают в малой окрестности точки пересечения нейтральных кривых, отвечающих монотонной и колебательной неустойчивости течения Куэтта.

2. Амплитудная система. Пусть (Ω_*, λ_*) – точка на плоскости параметров (Ω, λ) , отвечающая пересечению нейтральных кривых монотонной вращательно-симметричной и колебательной трехмерной потери устойчивости течения Куэтта. Предположим, что λ близко к λ_* , а Ω – к Ω_* , так что $\delta_1 = \lambda - \lambda_*$ и $\delta_2 = \Omega - \Omega_*$ – малые параметры одного порядка.

Если движение достаточно долго происходит в окрестности течения Куэтта, оно притягивается к соответствующему нейтральному многообразию, которое в рассматриваемой задаче шестимерно [3–5, 7, 8]. Среди различных способов построения ведущих членов сужения системы Навье–Стокса на нейтральное многообразие, видимо, самым быстрым является метод осреднения по "быстрому" времени. Существенно при этом, что осредненная система получается сразу в нормальной форме.

Следуя [4, 5], будем разбивать поле скоростей V и давление Π , удовлетворяющие (1.5)–(1.6), в виде

$$V = \sqrt{|\delta_1|}(U + U^*), \quad \Pi = \sqrt{|\delta_1|}(P + P^*)$$

$$U = \eta_0(t)\Phi_0(r, z) + e^{i\alpha_* t} [\eta(t)\Phi(r, \varphi, z) + \eta_1(t)\Phi_1(r, \varphi, z)] + \dots \quad (2.1)$$

$$P = \eta_0(t)p_0(r, z) + e^{i\alpha_* t} [\eta(t)p(r, \varphi, z) + \eta_1(t)p_1(r, \varphi, z)] + \dots$$

Здесь неизвестные комплексные амплитуды η_0, η, η_1 – функции "медленного" времени $t = |\delta_1| \tau$; Φ_0, p_0 – собственное решение линеаризации задачи (1.5)–(1.6) для монотонной вращательно-симметричной нейтральной моды; Φ, p и Φ_1, p_1 – неза-

висимые собственные решения линеаризации задачи (1.5)–(1.6) для колебательной трехмерной нейтральной моды (при этом Φ_1 получается инверсией (1.3) из Φ , так что $\Phi_1 = J\Phi$); c_* – циклическая частота нейтральных азимутальных волн. Величины порядков δ_1, δ_2 и выше в (2.1) опущены.

После подстановки (2.1) в (1.5)–(1.6) и осреднения по "быстрому" времени τ приходим к амплитудной системе [4, 5]

$$\frac{d\eta_0}{dt} = (\sigma + A|\eta_0|^2 + B|\eta|^2 + B^*|\eta_1|^2)\eta_0 + D\eta_0^*\eta^*\eta_1 \quad (2.2)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = (\mu + P|\eta_0|^2 + Q|\eta|^2 + R|\eta_1|^2)\eta + S\eta_0^*\eta_1$$

$$\frac{d\eta_1}{dt} = (\mu + P|\eta_0|^2 + R|\eta|^2 + Q|\eta_1|^2)\eta_1 + S\eta_0^2\eta$$

Вещественные (ввиду J -инвариантности течения Куэтта) коэффициенты A, D и комплексные коэффициенты B, P, Q, R, S системы (2.2) выражаются явно через решения серии линейных краевых задач. Соответствующие формулы приводятся ниже в разд. 3.

Вещественный инкремент σ и комплексный инкремент $\mu = \mu_r + i\mu_i$, при заданных δ_1 и δ_2 тоже могут быть вычислены; при этом μ_i оказывается одного порядка малости с δ_1 и δ_2 . Далее, имея это в виду, примем σ и μ_r за свободные параметры.

Отметим, что двупараметрическое семейство (2.2) с параметрами σ и μ масштабнo-инвариантно: система (2.2) сохраняет вид при замене $\eta_0 \rightarrow l\eta_0, \eta \rightarrow l\eta, \eta_1 \rightarrow l\eta_1, \sigma \rightarrow l^2\sigma, \mu \rightarrow l^2\mu, t \rightarrow t/l^2$ для любого вещественного $l \neq 0$.

Представим комплексные амплитуды η_0, η, η_1 в полярной форме: $\eta_0 = \rho_0 e^{i\psi_0}, \eta = \rho e^{i\psi}, \eta_1 = \rho_1 e^{i\psi_1}$. Для модулей амплитуд ρ_0, ρ, ρ_1 и фазового инварианта $\beta = 2\psi_0 + \psi - \psi_1$ получаем замкнутую систему, называемую моторной подсистемой (или просто мотором)

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_0 &= [\sigma + A\rho_0^2 + B_r(\rho^2 + \rho_1^2)]\rho_0 + D\rho_0\rho\rho_1 \cos\beta \\ \dot{\rho} &= (\mu_r + P_r\rho_0^2 + Q_r\rho^2 + R_r\rho_1^2)\rho + (S_r \cos\beta + S_i \sin\beta)\rho_0^2\rho_1 \\ \dot{\rho}_1 &= (\mu_r + P_r\rho_0^2 + R_r\rho^2 + Q_r\rho_1^2)\rho_1 + (S_r \cos\beta - S_i \sin\beta)\rho_0^2\rho \\ \dot{\beta} &= C(\rho^2 - \rho_1^2) - 2D\rho\rho_1 \sin\beta - [S_i(\rho^2 - \rho_1^2)\cos\beta + S_r(\rho^2 + \rho_1^2)\sin\beta]\rho_0^2 / \rho\rho_1, \\ C &= 2B_i + Q_i - R_i \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь учтено, что σ, A и D – вещественные; индекс r означает вещественную, а i – мнимую часть комплексной величины.

Уравнения для фаз ψ_0, ψ, ψ_1 отделяются и имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_0 &= B_i(\rho^2 - \rho_1^2) - D\rho\rho_1 \sin\beta \\ \dot{\psi} &= \mu_i + P_i\rho_0^2 + Q_i\rho^2 + R_i\rho_1^2 + (S_i \cos\beta - S_r \sin\beta)\rho_0^2\rho_1 / \rho \\ \dot{\psi}_1 &= \mu_i + P_i\rho_0^2 + R_i\rho^2 + Q_i\rho_1^2 + (S_i \cos\beta + S_r \sin\beta)\rho_0^2\rho / \rho_1 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Таким образом, дело сводится к исследованию системы (2.3). Фазовые переменные ψ_0, ψ, ψ_1 находятся из (2.4) простым интегрированием, причем одну из них можно выразить через две другие и β .

Система (2.3) инвариантна относительно преобразования $\rho \leftrightarrow \rho_1, \beta \rightarrow -\beta$, что является следствием инвариантности задачи (1.1)–(1.2) относительно инверсии J , опре-

деленной в (1.3). Отсюда, в частности, вытекает, что решения системы (2.3) либо являются J -симметричными (переводятся в себя преобразованием $\rho \leftrightarrow \rho_1, \beta \rightarrow -\beta$), либо образуют J -связанные пары (переводятся друг в друга).

Расслоение фазового пространства системы (2.3) на G -орбиты имеет особенности при $\rho = 0$ и $\rho_1 = 0$. Разрешение особенностей важно здесь не только для теории, но и для численного анализа. Вводя новые переменные¹

$$z_1 = \rho_0^2, \quad z_2 = \rho\rho_1 \sin \beta, \quad z_3 = \rho\rho_1 \cos \beta, \quad z_4 = (\rho^2 - \rho_1^2) / 2$$

запишем (2.3) в виде

$$\begin{aligned} 0, 5\dot{z}_1 &= (\sigma + Az_1 + Dz_3 + 2B_r f)z_1 \\ 0, 5\dot{z}_2 &= [\mu_r + P_r z_1 + (Q_r + R_r) f]z_2 - (Dz_2 - Cz_4)z_3 - S_i z_1 z_4 \\ 0, 5\dot{z}_3 &= [\mu_r + P_r z_1 + (Q_r + R_r) f]z_3 + (Dz_2 - Cz_4)z_2 + S_r z_1 f \\ 0, 5\dot{z}_4 &= (\mu_r + P_r z_1 + 2Q_r f)z_4 + S_i z_1 z_2, \quad f = \sqrt{z_2^2 + z_3^2 + z_4^2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Система (2.5) имеет особенность лишь при $z_2 = z_3 = z_4 = 0$, т.е. при $\rho = \rho_1 = 0$.

3. Расчет коэффициентов амплитудной системы. Для вычисления коэффициентов амплитудной системы (2.2) – при заданных значениях отношения радиусов цилиндров, аксиального и азимутального волновых чисел – на плоскости параметров Ω, λ строятся нейтральные кривые монотонной и колебательной потери устойчивости течения Куэтта. Затем ищется точка пересечения (Ω_*, λ_*) этих нейтральных кривых и при $\Omega = \Omega_*, \lambda = \lambda_*$ проводится численное интегрирование серии линейных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными комплексными коэффициентами. Далее амплитудные коэффициенты вычисляются по явным формулам через найденные ранее решения линейных краевых задач.

Для любых гладких соленоидальных векторных полей Φ и Ψ определим дифференциальные выражения

$$\begin{aligned} M\Phi &= \left\{ \Delta\Phi_r - \frac{\Phi_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial\Phi_\varphi}{\partial\varphi}, \Delta\Phi_\varphi - \frac{\Phi_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial\Phi_r}{\partial\varphi}, \Delta\Phi_z \right\} \\ N\Phi &= \omega \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} - \{2\omega\Phi_\varphi, g\Phi_r, 0\}, \quad N^*\Phi = -\omega \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} - \{g\Phi_\varphi, 2\omega\Phi_r, 0\} \\ L(\Phi, \Psi) &= \left\{ (\Phi, \nabla)\Psi_r - \frac{\Phi_\varphi\Psi_\varphi}{r}, (\Phi, \nabla)\Psi_\varphi + \frac{\Phi_r\Psi_\varphi}{r}, (\Phi, \nabla)\Psi_z \right\} \end{aligned}$$

$$L^0(\Phi, \Psi) = L(\Phi, \Psi) + L(\Psi, \Phi)$$

$$\Phi = \{\Phi_r(r, \varphi, z), \Phi_\varphi(r, \varphi, z), \Phi_z(r, \varphi, z)\}, \quad \Psi = \{\Psi_r(r, \varphi, z), \Psi_\varphi(r, \varphi, z), \Psi_z(r, \varphi, z)\}$$

Нейтральная кривая, соответствующая бифуркации возникновения вихрей Тейлора, находится путем решения спектральной задачи

$$(M - \lambda N)\Phi_0 = \nabla p_0, \quad \text{div}\Phi_0 = 0, \quad \Phi_0 = \mathbf{0} \quad (r=1, R) \quad (3.1)$$

где поле скоростей $\Phi_0(r, z)$ и давление $p_0(r, z)$ монотонной вращательно-симметричной нейтральной моды имеет вид $\Phi_0 = \{u_0(r), v_0(r), iw_0(r)\}e^{i\alpha z}$, $p_0 = q_0(r)e^{i\alpha z}$, причем можно считать, что u_0, v_0, w_0 и q_0 вещественны.

Разделяя в (3.1) переменные, получаем спектральную задачу для обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} - \alpha^2 \right) u_0 = \frac{dq_0}{dr} - 2\lambda\omega v_0$$

¹ Эту замену, развивая идею Ю.В. Волошина, предложила Н.В. Петровская [5].

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} - \alpha^2\right) v_0 = -\lambda g u_0 \quad (3.2)$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \alpha^2\right) w_0 = \alpha q_0, \quad \frac{du_0}{dr} + \frac{u_0}{r} - \alpha w_0 = 0$$

$$u_0 = v_0 = w_0 = 0 \quad (r=1, R)$$

Нейтральная кривая, соответствующая бифуркации возникновения азимутальных волн, находится путем решения спектральной задачи

$$(M - \lambda N - i\lambda c)\Phi = \nabla p, \quad \text{div } \Phi = 0, \quad \Phi = \mathbf{0} \quad (r=1, R) \quad (3.3)$$

$$\Phi = \{u(r), v(r), w(r)\} e^{-i(m\varphi + \alpha z)}, \quad p = q(r) e^{-i(m\varphi + \alpha z)}$$

Здесь c – неизвестная частота автоколебаний, m – азимутальное волновое число.

Разделяя в (3.3) переменные, получаем спектральную задачу для обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} - \frac{m^2}{r^2} - \alpha^2 - i\lambda(c - m\omega)\right] u &= \frac{dq}{dr} - 2\lambda\omega v - \frac{2im}{r^2} v \\ \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} - \frac{m^2}{r^2} - \alpha^2 - i\lambda(c - m\omega)\right] v &= -\frac{im}{r} q - \lambda g u + \frac{2im}{r^2} u \\ \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2} - \alpha^2 - i\lambda(c - m\omega)\right] w &= -i\alpha q \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} - \frac{im}{r} v - i\alpha w = 0$$

$$u = v = w = 0 \quad (r=1, R)$$

Задачи на собственные значения (3.2) и (3.4) решались численно методом "пристрелки" при фиксированных R , α и m . В результате этого расчета получены зависимости от отношения угловых скоростей цилиндров Ω критических значений числа Рейнольдса λ и частоты нейтральной моды c , соответствующих бифуркациям возникновения вихрей Тейлора и азимутальных волн. Далее методом Ньютона минимизировалась разность между найденными критическими значениями λ . Это позволило достаточно точно рассчитать значения Ω_* , λ_* и c_* , отвечающие точке пересечения нейтральных кривых. По завершении этого расчета проводилось совместное интегрирование задач (3.2) и (3.4) для вычисления компонент полей скоростей $u_0(r)$, $v_0(r)$, $w_0(r)$ и $u(r)$, $v(r)$, $w(r)$ нейтральных мод в точке (Ω_*, λ_*) . При этом была использована нормировка

$$\int_1^R u_0(r) r dr = \int_1^R u(r) r dr = 1$$

На втором этапе вычислений проводилось совместное интегрирование восьми линейных неоднородных краевых задач, правые части которых выражаются явно через найденные ранее вектор-функции Φ_0 и Φ . Эти задачи имеют вид

$$(M - \lambda_* N - i\lambda_* c_* e_k) \mathbf{X}_k = \nabla y_k + \lambda_* \mathbf{K}_k, \quad \text{div } \mathbf{X}_k = 0$$

$$\mathbf{X}_k = \mathbf{0} \quad (r=1, R), \quad (k=1, 2, \dots, 8)$$

$$e_1 = e_2 = e_3 = e_4 = 0, \quad e_5 = e_6 = 1, \quad e_7 = e_8 = 2$$

$$\mathbf{K}_1 = L^0(\Phi_0, \Phi_0)/2, \quad \mathbf{K}_2 = L^0(\Phi_0, \Phi_0^*), \quad \mathbf{K}_3 = L^0(\Phi, \Phi^*) \quad (3.5)$$

$$\mathbf{K}_4 = L^0(\Phi_1, \Phi^*), \quad \mathbf{K}_5 = L^0(\Phi, \Phi_0^*), \quad \mathbf{K}_6 = L^0(\Phi_1, \Phi_0^*)$$

$$\mathbf{K}_7 = L^0(\Phi, \Phi_1), \quad \mathbf{K}_8 = L^0(\Phi, \Phi)/2$$

$$\Phi_1 = J\Phi = \{u(r), v(r), -w(r)\} e^{-i(m\varphi - \alpha z)}$$

Параметры	$\alpha = 1,5$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$	$\alpha = 4$	$\alpha = 5$	$\alpha = 5,5$
Ω_*	-0,4214	-0,3837	-0,3704	-0,3894	-0,4587	-0,5783
λ_*	173,269	123,306	96,643	95,635	108,042	127,555
c_*	0,23975	0,25337	0,26927	0,28400	0,30265	0,31905
A	-1239,5	-567,2	-362,2	-216,7	-233,9	-302,0
B_r	-15,0	75,5	-389,6	-274,1	-312,8	-486,7
B_i	73,8	-13,8	510,1	191,3	239,9	473,2
D	-362,9	-257,1	-273,4	-220,9	-296,4	-521,1
P_r	-1554,3	-533,6	-378,1	-378,2	-500,8	-842,2
P_i	-99,8	114,8	-490,4	-193,9	-211,8	-356,8
Q_r	367,2	24,8	-146,9	-128,2	-150,9	-207,6
Q_i	-540,5	-889,6	-173,3	-141,1	-198,3	-385,2
R_r	-74,4	-29,3	-407,8	-203,2	-238,5	-372,4
R_i	-152,8	-179,7	401,1	82,3	103,8	260,7
S_r	-73,9	-23,9	-553,4	-227,6	-296,9	-587,0
S_i	-1104,4	-516,7	544,6	78,0	80,2	219,4

После отделения однородных переменных ϕ и z соответствующие (3.5) радиальные краевые задачи решались методом "пристрелки".

Помимо решений задач (3.1), (3.3) и (3.5) для отыскания коэффициентов амплитудной системы требуется найти собственные решения Ψ_0, q_0 и Ψ, q сопряженных краевых задач, отвечающих задачам (3.1) и (3.3). Эти расчеты также были выполнены с помощью метода "пристрелки".

На заключительном этапе вычислений коэффициенты амплитудной системы находятся по формулам

$$A = \gamma_0(L^0(\Phi_0, X_2) + L^0(\Phi_0^*, X_1), \Psi_0)$$

$$B = \gamma_0(L^0(\Phi_0, X_3) + L^0(\Phi^*, X_{10}) + L^0(\Phi, X_5^*), \Psi_0)$$

$$D = \gamma_0(L^0(\Phi_0^*, X_4) + L^0(\Phi^*, X_6) + L^0(\Phi_1, X_{10}^*), \Psi_0)$$

$$P = \gamma(L^0(\Phi, X_2) + L^0(\Phi_0^*, X_{10}) + L^0(\Phi_0, X_5), \Psi)$$

$$Q = \gamma(L^0(\Phi, X_3) + L^0(\Phi^*, X_8), \Psi)$$

$$R = \gamma(L^0(\Phi, X_9) + L^0(\Phi_1^*, X_7) + L^0(\Phi_1, X_4^*), \Psi)$$

$$S = \gamma(L^0(\Phi_0^*, X_6) + L^0(\Phi_1, X_{10}^*), \Psi)$$

$$X_9 = JX_3, \quad X_{10} = JX_6, \quad \gamma_0 = -1/(\Phi_0, \Psi_0), \quad \gamma = -1/(\Phi, \Psi)$$

Скалярное произведение векторных полей Φ и Ψ в пространстве $L_2(D)$, где $D = [1, R] \times [-\pi/m, \pi/m] \times [-\pi/\alpha, \pi/\alpha]$, записывается в виде

$$(\Phi, \Psi) = \int_{-\pi/\alpha}^{\pi/\alpha} \int_{-\pi/m}^{\pi/m} \int_1^R (\Phi_r \Psi_r^* + \Phi_\phi \Psi_\phi^* + \Phi_z \Psi_z^*) r dr d\phi dz$$

Описанный выше алгоритм расчета коэффициентов амплитудной системы (2.2) был реализован на компьютере IBM PC AT. Результаты вычислений при $R = R_2/R_1 = 2$, $m = 1$ и различных значениях аксиального волнового числа α представлены в табл. 1.

4. Равновесия моторной подсистемы. Система (2.3) при надлежащих ограничениях, наложенных на коэффициенты, имеет следующие равновесия на инвариантных плоскостях (их устойчивость и простейшие бифуркации рассмотрены в [4]).

Течение Куэтта

$$\rho_0 = \rho = \rho_1 = 0, \quad \forall \beta \quad (4.1)$$

Вихри Тейлора

$$\rho_0^2 = -\sigma / A, \quad \rho = \rho_1 = 0, \quad \forall \beta \quad (4.2)$$

Чистые азимутальные волны

$$\rho_0 = 0, \quad \rho^2 = \rho_1^2 = -\mu_r / (Q_r + R_r), \quad \forall \beta \quad (4.3)$$

Инверсионно-связанная пара (переводятся одно в другое преобразованием инверсии J) спиральных волн

$$\rho_0 = \rho_1 = 0, \quad \rho^2 = -\mu_r / Q_r, \quad \forall \beta \quad (4.4)$$

$$\rho_0 = \rho = 0, \quad \rho_1^2 = -\mu_r / Q_r, \quad \forall \beta \quad (4.5)$$

Псевдоантиинверсионная (антиинверсионная лишь в линейном приближении) пара смешанных азимутальных волн

$$\rho_0^2 = \frac{\Delta_1^+}{\Delta^+}, \quad \rho^2 = \rho_1^2 = \frac{\Delta_2^+}{\Delta^+}, \quad \beta = 0 \quad (4.6)$$

$$\rho_0^2 = \frac{\Delta_1^-}{\Delta^-}, \quad \rho^2 = \rho_1^2 = \frac{\Delta_2^-}{\Delta^-}, \quad \beta = \pi \quad (4.7)$$

$$\Delta_1^+ = \sigma(Q_r + R_r) - \mu_r(2B_r + D), \quad \Delta_2^+ = \mu_r A - \sigma(P_r + S_r)$$

$$\Delta_1^- = \sigma(Q_r + R_r) - \mu_r(2B_r - D), \quad \Delta_2^- = \mu_r A - \sigma(P_r - S_r)$$

$$\Delta^+ = (2B_r + D)(P_r + S_r) - A(Q_r + R_r), \quad \Delta^- = (2B_r - D)(P_r - S_r) - A(Q_r + R_r)$$

Помимо равновесий (4.1)–(4.7) у системы (2.3) может существовать до четырех инверсионно-связанных пар равновесий общего положения (не лежащих на инвариантных плоскостях), отыскание которых сводится к вычислению корней полинома 4-й степени.

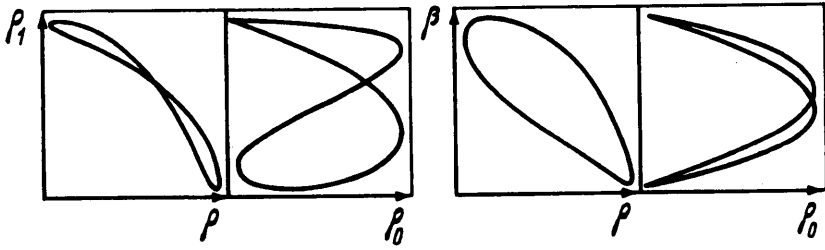
5. Расчет циклов моторной подсистемы. Вычисление предельных циклов системы (2.3) проводилось на IBM PC с помощью разработанной одним из авторов программы Суслор, позволяющей проводить расчет изолированных периодических движений автономных динамических систем различными методами, исследовать эволюцию циклов при изменении параметров задачи, их устойчивость и бифуркации. Большая часть расчетов была выполнена методом, основанным на отыскании неподвижной точки эволюционного оператора системы (2.5), однако в некоторых (довольно редких) случаях более эффективным оказывался поиск неподвижной точки отображения последования Пуанкаре. При расчете устойчивых циклов оба эти метода иногда применялись в комбинации с методом установления.

Все вычисления проводились для случая $R = R_2 / R_1 = 2$. Проекция фазовых траекторий некоторых из найденных циклов на координатные плоскости показаны на фиг. 1–5. В табл. 2 приведены координаты точек на циклах и периоды циклов (T).

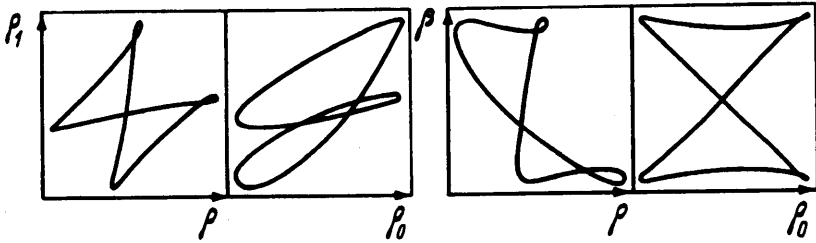
Опишем подробно серию расчетов предельных циклов, выполненную для случая $\alpha = 1,5$.

Масштабная замена неизвестных и времени, указанная выше (и соответствующая также масштабированию малых параметров δ_1, δ_2), позволяет перейти в семействе (2.3) к уравнению с параметром σ , принимающим одно из трех значений: $\sigma = 0$ и ± 10 . Эти значения σ и рассматриваются далее.

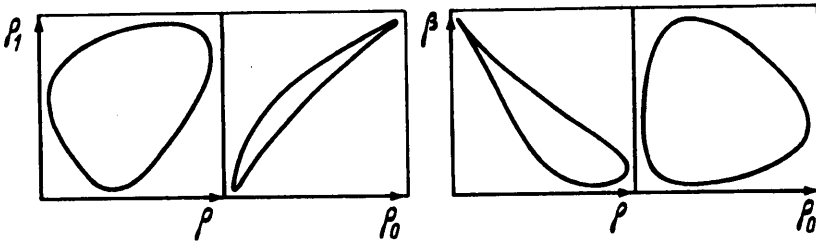
Ответвление циклов от равновесий. При $\sigma = 10$ в диапазоне $-244,80 \leq \mu_r \leq 361,44$ у (2.3) существует J -связанная пара неустойчивых равновесий общего положения, рождающаяся при $\mu_r = -244,80$ на паре спиральных волн (4.4)–(4.5) и гибнущая при $\mu_r = 361,44$ на смешанных азимутальных волнах (4.7). Бифуркаций у нее нет. В точке $\mu_r = 15,15$ происходит бифуркация Хопфа: от смешанных азимутальных волн (4.7) мягко ответвляется устойчивый J -симметричный цикл A_0 (фиг. 1).



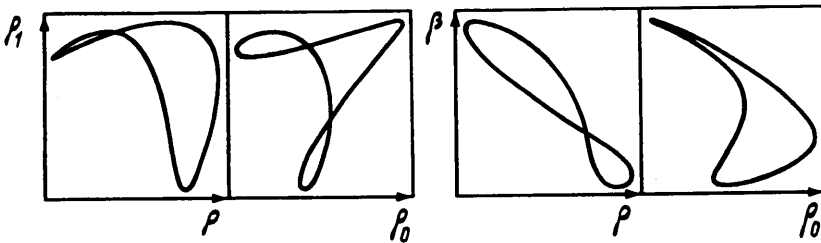
Фиг. 1. Устойчивый J -симметричный цикл A_0



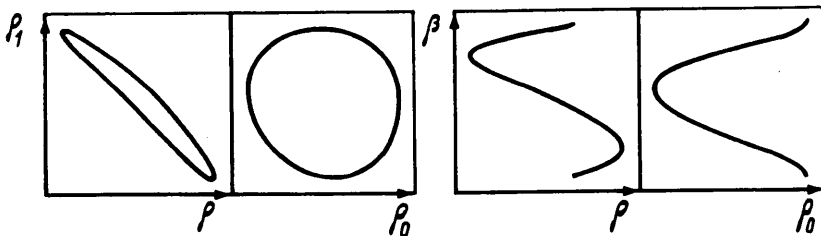
Фиг. 2. Неустойчивый J -симметричный цикл B_0



Фиг. 3. Устойчивый несимметричный цикл A_{+1}^1



Фиг. 4. Устойчивый несимметричный цикл A_{+1}^2



Фиг. 5. Неустойчивый J -симметричный периодический режим с вращением E_0

Цикл	α	σ	μ_r	ρ_0	ρ	ρ_1	β	T
A_0	1,5	10	20,00	0,1854	0,2918	0,3327	3,1497	0,1191
B_0	1,5	10	39,14	0,3151	0,5547	0,5853	3,2894	0,1215
$A_{\pm 1}^1$	1,5	10	26,95	0,2409	0,4047	0,4333	3,1478	0,1019
$A_{\pm 1}^2$	1,5	10	40,50	0,2923	0,5704	0,5035	2,9990	0,0764
E_0	2,0	-10	40,00	0,3722	1,0798	0,4029	1,4706	0,0097

При $\sigma = 0$ и -10 равновесий общего положения у моторной подсистемы нет.

При $\sigma = -10$ в точке $\mu_r = 14,19$ от неустойчивых смешанных азимутальных волн (4.7) ответвляется семейство неустойчивых циклов (предельными они не являются), лежащих на инвариантном подпространстве $\rho = \rho_1$, $\beta = \pi$. Эта бифуркация является вырожденной.

Других бифуркаций рождения или гибели циклов моторной подсистемы (2.3) на ее равновесиях нет.

J-Симметричные циклы при $\sigma = 10$. Цикл A_0 (фиг. 1) существует в диапазоне $15,15 \leq \mu_r \leq 54,15$. Это – единственный цикл, ответвляющийся от равновесия моторной подсистемы в случае $\sigma = 10$. Он мягко возникает при $\mu_r = 15,15$ в результате колебательной потери устойчивости (бифуркация Хопфа) смешанных азимутальных волн (4.7). При $\mu_r = 23,88$ цикл A_0 становится неустойчивым. В этой точке от него ответвляется J -связанная пара несимметричных устойчивых циклов $A_{\pm 1}^1$, существующая при $\mu_r \geq 23,88$. Это – бифуркация потери J -симметрии, связанная с потерей устойчивости J -симметричного цикла. При $\mu_r = 40,81$ от цикла A_0 ответвляется еще одна J -связанная пара несимметричных циклов $A_{\pm 1}^2$. Это – также бифуркация потери J -симметрии, но все три цикла-участника неустойчивы и направление ветвления изменилось на противоположное. При $\mu_r = 54,12$ цикл A_0 вновь приобретает устойчивость. Судя по поведению его мультипликаторов Флоке, в этой точке от цикла A_0 ответвляется J -симметричный квазипериодический режим с траекториями, лежащими на инвариантном двумерном торе. Рассчитать этот режим пока не удалось. Вероятно, он неустойчив. Наконец, при $\mu_r = 54,15$ устойчивый цикл A_0 гибнет, сливаясь с неустойчивым циклом B_0 .

Цикл B_0 (фиг. 2) существует в диапазоне $39,14 \leq \mu_r \leq 54,15$, неустойчив и не бифурцирует. Как его рождение, так и его гибель связаны с бифуркацией аннигиляции двух J -симметричных циклов, один из которых устойчив, а другой – нет.

Цикл C_0 существует в диапазоне $39,13733 \leq \mu_r \leq 42,51078$. Он рождается устойчивым одновременно с неустойчивым циклом B_0 при $\mu_r = 39,13733$ и почти сразу же, при $\mu_r = 39,13738$, делается неустойчивым в результате бифуркации потери J -симметрии. В этой точке от него ответвляется J -связанная пара несимметричных устойчивых циклов $C_{\pm 1}^1$, существующая при $\mu_r \geq 39,13738$. При $\mu_r = 42,508$ от неустойчивого цикла C_0 ответвляется J -связанная пара несимметричных неустойчивых циклов $C_{\pm 1}^2$. При $\mu_r = 42,51078$ цикл C_0 гибнет, сливаясь с циклом D_0 , существующим при $\mu_r \leq 42,51078$. Это – бифуркация аннигиляции двух J -симметричных неустойчивых циклов.

J-Связанные пары несимметричных циклов при $\sigma = 10$. Пара циклов $A_{\pm 1}^1$ (фиг. 3) существует в диапазоне $23,88 \leq \mu_r \leq 26,96$, устойчива и не бифурцирует. Она ответвляется при $\mu_r = 23,88$ от J -симметричного цикла A_0 и гибнет при $\mu_r = 26,96$, сливаясь с парой неустойчивых циклов $F_{\pm 1}$.

Пара циклов $F_{\pm 1}$ существует в диапазоне $22,93 \leq \mu_r \leq 26,96$, неустойчива и не бифурцирует. Она рождается при $\mu_r = 22,93$ одновременно с парой устойчивых циклов $G_{\pm 1}$ и гибнет при $\mu_r = 26,96$, сливаясь с парой устойчивых циклов $A_{\pm 1}^1$.

Пара циклов $G_{\pm 1}$ существует при $\mu_r \geq 22,93$. При $\mu_r = 22,93558$ она теряет устойчивость в результате бифуркации удвоения периода. В этой точке от нее ответвляется J -связанная пара устойчивых 2-оборотных несимметричных циклов $G_{\pm 2}$, которая существует при $\mu_r \geq 22,93558$.

Пара циклов $A_{\pm 1}^2$ (фиг. 4) существует в диапазоне $36,488875 \leq \mu_r \leq 40,812$. Она рождается при $\mu_r = 36,488875$ одновременно с парой циклов $E_{\pm 1}$. Обе эти пары циклов неустойчивы вблизи точки своего возникновения. При $\mu_r = 36,4906$ неустойчивая пара циклов $A_{\pm 1}^2$ претерпевает бифуркацию удвоения периода, оставаясь при этом неустойчивой. При $\mu_r = 39,60870$ происходит еще одна бифуркация удвоения, в результате которой циклы $A_{\pm 1}^2$ приобретают устойчивость. В этой точке от них ответвляется J -связанная пара несимметричных 2-оборотных циклов $A_{\pm 2}^2$, которая существует при $\mu_r \leq 39,60870$ и устойчива. При $\mu_r = 40,757$ циклы $A_{\pm 1}^2$ опять теряют устойчивость. Судя по поведению их мультипликаторов Флоке, в этой точке от них ответвляется J -связанная пара квазипериодических режимов (вероятно, неустойчивых) с траекториями, лежащими на инвариантных двумерных торах. При $\mu_r = 40,812$ неустойчивая пара циклов $A_{\pm 1}^2$ гибнет на неустойчивом J -симметричном цикле A_0 .

Бифуркации удвоения циклов при $\sigma = 10$. Вычисления показали, что J -связанные пары несимметричных циклов моторной подсистемы могут претерпевать бифуркации удвоения периода, в том числе и неограниченные последовательности таких бифуркаций. Так, удастся проследить шесть последовательных бифуркаций удвоения пары циклов $A_{\pm 1}^2$, приводящих в дальнейшем к возникновению J -связанной пары стохастических аттракторов, существующих при $\mu_r \leq 39,484004$.

Многооборотные циклы при $\sigma = 10$. Циклы, описанные выше, рассчитаны во всей области их существования. Провести столь подробные вычисления для многооборотных циклов удастся отнюдь не всегда. Например, удалось обнаружить J -симметричный 9-оборотный цикл (впервые о нем упоминалось в [4]), происхождение которого остается пока неясным. Этот цикл рассчитан в диапазоне $38,82 \leq \mu_r \leq 41,0286$. При $\mu_r < 40,5811$ он неустойчив, а при $\mu_r > 40,5811$ – устойчив. При $\mu_r = 41,0286$ этот цикл гибнет, сливаясь с аналогичным неустойчивым циклом. В точке $\mu_r = 40,5811$ происходит бифуркация потери J -симметрии, в результате которой возникает J -связанная пара устойчивых несимметричных 9-оборотных циклов, существующая при $\mu_r \leq 40,5811$. При $\mu_r = 40,5645$ она удваивается, а при $\mu_r = 40,5628$ происходит еще одно удвоение, в результате которого возникает J -связанная пара устойчивых несимметричных 36-оборотных циклов, существующих при $\mu_r \leq 40,5628$.

Периодические режимы с вращением ($\alpha = 2$). Система (2.3) наряду с амплитудами ρ_0, ρ, ρ_1 содержит фазовый инвариант β . Для ограниченности решений амплитудной системы (2.2) нужно лишь, чтобы ограниченными были амплитуды ρ_0, ρ, ρ_1 . Что касается угловой переменной β , то она при этом может быть как ограниченной, так и неограниченной. В частности, система (2.3) допускает решения, у которых ρ_0, ρ, ρ_1 периодичны с периодом p , в то время как β удовлетворяет лишь условию $\beta(t + p) = \beta(t) + 2\pi l$ для всех t при некотором целом l . Это означает, что точка на окружности, отвечающая углу β , возвращается через время p в первоначальное положение, но после l полных оборотов.

Проекция фазовой траектории одного из таких периодических режимов с вра-

щением E_0 , найденного в случае $\alpha = 2$, $\sigma = -10$, $\mu_r = 40$, показаны на фиг. 5. Это движение J -симметрично и неустойчиво, для него $n = -1$.

Заключение. Течение Куэтта в случае разновращающихся цилиндров представляет собой особенно удобный объект для численных и экспериментальных исследований благодаря тому, что переходы здесь возникают при довольно малых числах Рейнольдса. Присущая течению Куэтта симметрия позволяет расщепить амплитудную систему шестого порядка, описывающую это течение на нейтральном многообразии, на две подсистемы. Первая из них, названная моторной, имеет 4-й порядок и определяет эволюцию инвариантов группы симметрии: трех комплексных мод (тейлоровской и двух азимутальных) и резонансной линейной комбинации их фаз. Вторая подсистема выражает производные по времени от трех фаз через инварианты. Для отыскания фаз из нее достаточно выбрать лишь два уравнения.

Равновесию моторной подсистемы соответствует периодическое или квазипериодическое двухчастотное решение амплитудной системы, а также и полной системы Навье – Стокса. Периодическому решению моторной подсистемы соответствует, вообще говоря, трехчастотный квазипериодический режим. В общем случае интегрирование двух фазовых уравнений добавляет две новые частоты. Возможность сведения периодических движений к равновесиям, а квазипериодических – к периодическим чрезвычайно упрощает исследование.

В случае квазипериодического решения моторной подсистемы фазы уже не будут квазипериодичны, а в случае стохастического режима фазовые уравнения добавляют своего рода стохастичность.

Грубые периодические режимы моторной системы сохраняются и для полного уравнения на нейтральном многообразии, а значит, соответствующие результаты для полных уравнений Навье – Стокса могут быть обоснованы без принципиальных затруднений. Что же касается стохастических режимов (скажем, возникающих в результате каскада удвоений), то необходимая работа по установлению условий их сохранения при возмущении системы до сих пор еще не проведена в общей теории бифуркаций.

Вычисления на компьютере показали, что для некоторых областей изменения параметров существуют устойчивые и неустойчивые симметричные (относительно инверсии J) предельные циклы моторной подсистемы, а также пары несимметричных, отображаемых друг в друга инверсий J , предельных циклов. При продолжении их по параметру наблюдаются следующие типы бифуркаций: ответвление симметричного цикла от симметричного равновесия фактор-системы в результате трансверсальной к двумерному инвариантному подпространству колебательной неустойчивости; ответвление J -связанной пары несимметричных циклов от J -связанной пары несимметричных равновесий; ответвление J -связанной пары несимметричных циклов от симметричного цикла (бифуркация потери J -симметрии); одновременное возникновение или исчезновение двух симметричных циклов "из воздуха"; одновременное возникновение или исчезновение двух пар связанных несимметричных циклов; ответвление симметричного 2-тора от симметричного цикла; ответвление J -связанной пары несимметричных 2-торов от J -связанной пары несимметричных циклов; возникновение J -связанной пары несимметричных хаотических аттракторов в результате каскада удвоений J -связанной пары несимметричных циклов.

Как показывают вычисления, амплитудная система и ее моторная подсистема обнаруживают богатейшую картину переходов, которая вряд ли допускает полное описание. Пока не выполнен анализ устойчивости найденных квазипериодических и стохастических режимов относительно возмущений, нарушающих заданную периодичность, лишь эксперимент может показать, какие из них реально наблюдаемы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Джозеф Д. Устойчивость движений жидкости. М.: Мир. 1981. 638 с.
2. Ди Прима Р.С., Суинни Х.Л. Неустойчивости и переход в течении между концентрическими вращающимися цилиндрами // Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности. М.: Мир, 1984. С. 169–217.
3. Юдович В.И. Переходы и возникновение хаоса в течениях жидкости // Аннот. докладов 6-го Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике. Ташкент: Фан, 1986. С. 661.
4. Kolesov V., Yudovich V. Transitions near the intersections of bifurcations producing Taylor vortices and azimuthal waves // John Willy & Sons, Inc. RJCM. 1994. V. 1. № 4. P. 71–87.
5. Kolesov V., Ovchinnikova S., Petrovskaya N., Yudovich V. Onset of chaos through intersections of bifurcations in Couette-Taylor flow // The Third ICIAM Congress. Book of Abstracts. Hamburg, 1995. P. 201.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 734 с.
7. Chossat P., Demay Y., Iooss G. Interaction de modes azimuthaux dans le probleme de Couette-Taylor // Arch. Rational Mech. Anal. 1987. V. 99. № 3. P. 213–248.
8. Chossat P., Iooss G. Primary and Secondary Bifurcations in the Couette-Taylor Problem // Jap. J. App. Math. 1985. V. 2. № 1. P. 37–68.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
17.VI.1996