

УДК 533.72

© 1998 г. В.С. ГАЛКИН, М.Ш. ШАВАЛИЕВ

ГАЗОДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ МЕТОДА ЧЕПМЕНА – ЭНСКОГА

(обзор)

Обсуждаются особенности вывода газодинамических уравнений высших приближений (барнеттова и супербарнеттова) метода Чепмена – Энскога для неплотных одноатомных газов в отсутствие внешних сил. Приведены указанные уравнения, описаны их свойства и результаты их применения к различным задачам механики газа.

Проблемы вывода, обоснования и апробации макроскопических моделей являются одними из принципиальных проблем не только механики сплошных сред, но и физической кинетики в целом. В последнем случае это проблема сведения более общих молекулярно-кинетических моделей к более простым, макроскопическим. Здесь исторически фундаментальное место занимает классический метод Чепмена – Энскога решения (при числе Кнудсена $Kn \rightarrow 0$) кинетического уравнения Больцмана – Максвелла. Результатом является цепочка уравнений Эйлера, Навье – Стокса и уравнений высших приближений метода – Барнетта, супербарнеттова приближения и т.д.

Появление данного обзора продиктовано возросшим интересом к уравнениям высших приближений метода Чепмена – Энскога, особенно к уравнениям Барнетта. В первую очередь это следствие успеха применения последних в задаче о структуре ударной волны и возможного (в силу этого) расширения области применимости макроскопических моделей течений разреженных газов. Кроме того, при помощи приближения Барнетта установлен ряд новых интересных эффектов. В частности, показано, что в классической задаче теплообмена между нагретыми до различных температур телами необходим, вообще говоря, учет влияния не только температурного скольжения (крипа), но и барнеттовых температурных напряжений. В то же время не решен ряд принципиальных вопросов о статусе этих уравнений.

Данному вопросу посвящена обширная литература. Здесь рассматриваются в основном выполненные с конца 60-х годов статьи, посвященные наиболее разработанному случаю течений нейтральных одноатомных (бесструктурных) неплотных газов в отсутствие внешних сил. Чисто математические вопросы не рассматриваются. Предпочтение отдается работам заключительным или обзорным, опубликованным в наиболее доступных изданиях.

В разд. 1 рассматривается вопрос об учете внепорядковых членов в методе Чепмена – Энскога и дается краткое сравнение с другими методами возмущений, разд. 2 посвящен выражениям для переносных свойств в приближении Барнетта и в супербарнеттовом приближении. В разд. 3 обсуждаются связи приближения Барнетта с аксиоматической теорией механики сплошных сред, термодинамикой необратимых процессов, неравновесной статистической механикой. Новые эффекты, обусловленные при $Kn \rightarrow 0$ теми или иными членами формул для барнеттовых переносных свойств, рассмотрены в разд. 4. В разд. 5 излагаются основные особенности постановок крайних задач для рассматриваемых систем газодинамических уравнений. Далее описаны результаты применения последних к частным задачам: некоторые точные результаты кинетической теории (разд. 6), распространение звука и цилиндрическое течение Куэтта (разд. 7), структура ударной волны и гиперзвуковая аэродинамика (разд. 8).

1. В руководствах по кинетической теории газов [1–5] изложение метода Чепмена – Энскога базируется на задаче с начальными данными (релаксация) и не подчеркивается "композитность" метода, обеспечивающая его общность, эффективность и

недостатки ценой учета внепорядковых членов по числу Кнудсена $\text{Kn} \ll 1$. Краткому рассмотрению этой особенности метода Чепмена – Энскога, важной для дальнейшего, посвящен данный раздел. Исходной задачей метода является замыкание системы уравнений газодинамики для областей течения вне кнудсеновских слоев и ударных волн (разложение функции распределения по $\text{Kn} \ll 1$ необходимо и для вывода граничных условий, т.е. для решения задачи кнудсеновского слоя, однако ниже эта тема не рассматривается). Эта система для простого (одноатомного) газа в отсутствие внешних сил имеет вид

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad \rho \equiv mn$$

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad \tau_{ij} = p\delta_{ij} + p_{ij} \equiv p\delta_{ij} - \sigma_{ij}, \quad p = R\rho T \quad (1.1)$$

$$\frac{3}{2} R\rho \frac{DT}{Dt} + \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial q_i}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Здесь ρ – массовая плотность, \mathbf{u} – среднемассовая скорость, T – температура, \mathbf{q} – тепловой поток, σ_{ij} – вязкие напряжения [5], m – масса молекулы, $R = k/m$ – газовая постоянная.

Замыкание системы (1.1) осуществляется при помощи рядов

$$p_{ij} \sim \sum_{r=0}^{\infty} p_{ij}^{(r)}, \quad q_i \sim \sum_{r=0}^{\infty} q_i^{(r)}, \quad (p_{ij}^{(r)}, q_i^{(r)}) \sim \text{Kn}^r, \quad (p_{ij}^{(0)}, q_i^{(0)}) = 0$$

по степеням пространственных производных и их произведений от газодинамических переменных, коэффициенты рядов зависят от ρ , T и параметров межмолекулярных взаимодействий. В нулевом приближении получим уравнения Эйлера. Учет $p_{ij}^{(1)}$, $q_i^{(1)}$, пропорциональных производным от компонентов скорости и температуры соответственно, дает уравнения Навье – Стокса¹. В высших ($r \geq 2$) приближениях переносные свойства содержат вторые производные и парные произведения первых производных (уравнения Барнетта) и т.д.

Такое замыкание удастся провести при числах $\text{Kn} \ll 1$ путем приближенного решения в виде ряда $f \sim \sum_{r=0}^{\infty} f^{(r)}$ кинетического уравнения Больцмана (точнее, Больцмана – Максвелла [1])

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = J(f, f), \quad f = f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \quad (1.2)$$

В (1.2) x_i, ξ_i – компоненты радиуса-вектора и скорости молекул, $J(f, f)$ – интеграл столкновений, f – функция распределения, через которую выражаются переносные свойства

$$p_{ij} = m \int f \left(c_i c_j - \frac{1}{3} c^2 \delta_{ij} \right) d\boldsymbol{\xi}, \quad q_i = \frac{m}{2} \int f c_i c^2 d\boldsymbol{\xi}, \quad c_i = \xi_i - u_i \quad (1.3)$$

В методе Чепмена – Энскога рассматриваются ситуации, близкие к локально-равновесным [5], когда f близка к максвелловскому распределению

$$f^{(0)} = n(2\pi RT)^{-3/2} \exp\left(-\frac{c^2}{2RT}\right) \quad (1.4)$$

¹ Для краткости здесь и ниже именами Эйлера и Навье – Стокса названы соответствующие полные системы уравнений сохранения, а не только уравнения сохранения импульса [5].

Это связано с тем, что переносные свойства в соответствии с (1.3) являются низшими центральными моментами f , так что рассмотрение проводится на "куполе" f (где $c^2 \sim 2RT$), а не на "хвостах" f (где $c^2 \gg 2RT$). При этом [3, 4] $J(f, f) \sim 1/\text{Kn}$ и искомое разложение является внешним в координатном пространстве (вне кинетических слоев) и внутренним – в скоростном.

Методика разложения должна быть такой, чтобы ρ , u , T не разлагались по Kn , т.е. рассчитывались по (1.4). Перечисленные требования к решению (1.2) удается выполнить, если провести разложение оператора $\partial/\partial t$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial_0 f^{(0)}}{\partial t} + \left(\frac{\partial_1 f^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial_0 f^{(1)}}{\partial t} \right) + \dots, \quad \frac{\partial_r}{\partial t} \sim \text{Kn}^r \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial_0 u_i}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \left(u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} \right), \quad \frac{\partial_1 u_i}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{ij}^{(1)}}{\partial x_j}, \dots \quad (1.6)$$

и т.п. Формулы для $\partial_0/\partial t$ от газодинамических переменных следуют из уравнений Эйлера, сумма $\partial_0/\partial t$ и $\partial_1/\partial t$ дает уравнения Навье – Стокса и т.д. После исключения $\partial/\partial t$ выписываются окончательные уравнения для $f^{(r)}$, структура которых уже не зависит от того, стационарен процесс или нестационарен, решения уравнений зависят от c , газодинамических переменных и пространственных производных от них и не зависят явно от x , t . Поэтому p_{ij} , q_i выражаются через местные значения газодинамических переменных и их пространственных производных. Такой способ внешнего разложения решения принадлежит к весьма общему методу сокращения информации [6].

Предполагается, что все члены левой части (1.2) одного порядка. В нулевом приближении $J(f^{(0)}, f^{(0)}) = 0$, решением является (1.4). В следующих двух приближениях получаем

$$\frac{\partial_0 f^{(0)}}{\partial t} + \xi_i \frac{\partial f^{(0)}}{\partial x_i} = L(h^{(1)}), \quad \frac{\partial_0 f^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial_1 f^{(0)}}{\partial t} + \xi_i \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_i} - J(f^{(1)}, f^{(1)}) = L(h^{(2)})$$

где L – линеаризованный относительно $f^{(0)}$ оператор столкновений, $f^{(r)} = f^{(0)} h^{(r)}$, $r \geq 1$. Первое уравнение дает навье-стоксову поправку $h^{(1)}$, второе – барнеттову $h^{(2)}$.

Таков формальный алгоритм метода Чепмена – Энскога. Для ответа на поставленный выше вопрос о характере учета внепорядковых членов в этом методе, проведем обезразмеривание уравнения (1.2) с учетом "анизотропии" течения, т.е. разных по порядку величин производных от газодинамических переменных по x_i . Пусть [3]

$$f = f^* n_* c_T^{-3}, \quad \xi_i = \xi_i^* c_T, \quad c_i = c_i^* c_T, \quad x_i = x_i^* L_{i*}, \quad t = t^* \tau_*$$

$$c_T = (2RT_*)^{1/2}, \quad S_i = \frac{L_*}{c_T \tau_*}, \quad \lambda_i = \frac{L_*}{L_{i*}}, \quad S = \frac{u_*}{c_T} \approx M, \quad \text{Kn} = \frac{l_*}{L_*} \approx \frac{\mu_*}{\rho_* c_T L_*} \approx \frac{M}{\text{Re}}$$

Звездочкой снизу обозначены характерные для данной области течения величины, l – средняя длина свободного пробега молекул, M и Re – числа Маха и Рейнольдса, τ_* – характерное газодинамическое время, L_* – минимальная из характерных газодинамических длин L_{i*} (например, толщина пограничного слоя δ), $L_{i*} \gg l_*$. Предполагается [3, 4], что нормы производных от f такие же, как и нормы производных от газодинамических переменных. Решение ищется для купола f , т.е. $c_i^* = O(1)$. Ограничиваясь случаем $S \leq 1$, имеем $\xi_i^* = O(1)$. Теперь, опуская звездочки, запишем кинетическое уравнение (1.2) в безразмерном виде (J – базразмерный интеграл столкновений [3])

$$\text{Kn} Df = J(f, f), \quad Df = S_i \frac{\partial f}{\partial t} + \lambda_i \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (1.7)$$

Рассмотрим основные предельные ($Kn \rightarrow 0$) режимы обтекания тел.

1) $M = O(1)$, $Re \rightarrow \infty$, $S_t = O(1)$, $\lambda_i = O(1)$: течения невязкого нетеплопроводного газа на масштабах порядка размера тела $L = L_*$, описываемые уравнениями Эйлера. Фактически именно для этого случая строится метод Чепмена – Энскога: все слагаемые выражения (1.7) для Df порядка единицы, формулы (1.6) имеют ясный физический смысл (в частности, формула для $\partial_0 u / \partial t$ есть уравнение Эйлера, в случае стационарных течений невязкого газа $\delta_0 u / \partial t = 0$).

2) $M = O(1)$, $Re \rightarrow \infty$, $S_t = O(Kn)$, $L_* = L_{y*} \sim L\sqrt{Kn}$, $\lambda_y = O(1)$, $\lambda_{x,z} = O(Kn)$: течения в пограничных слоях около твердых стенок. Здесь y – нормальная к стенке координата, x, z – касательные к ней координаты, число Кнудсена Kn определяется по толщине пограничного слоя $\delta = L_*$, число Kn_L – по длине тела $L \gg L_*$; газодинамическое время $\tau_* = L/u_*$.

Как известно, эти течения описываются упрощенными уравнениями Навье – Стокса – уравнениями Прандтля. Главным слагаемым в Df является $\xi_y \partial f / \partial y \sim 1$, остальные – порядка Kn . Разложения (1.5), (1.6) для $\partial / \partial t$ теряют физический смысл, ибо уравнения Эйлера в пограничном слое несправедливы. Однако, пользуясь тем, что здесь в Df величина $\partial f / \partial t$ внепорядковая, можно чисто формально применять разбиения (1.5), (1.6) для $\partial / \partial t$, физический смысл будут иметь суммы $\partial_r / \partial t$: складывая $\partial_0 / \partial t$ и $\partial_1 / \partial t$, получаем уравнения Навье – Стокса, упрощая которые, будем иметь уравнения Прандтля. Та же процедура применяется при учете более высоких приближений. Применение (1.5) можно трактовать так: $\partial f / \partial t$ заменяется суммой, члены которой осуществляют перемещение внепорядковых слагаемых разложения левой части (1.2), необходимое для выполнения условий разрешимости при поставленных требованиях. В стационарных условиях эти члены отличны, вообще говоря, от нуля (в данном случае, например, $\partial_0(u, T) / \partial t \neq 0$), однако равна нулю их сумма.

Сказанное позволяет применять общий алгоритм метода ценой учета (и перестановок) внепорядковых членов.

3) $M \sim Kn \rightarrow 0$, $Re = O(1)$, $\lambda_i = O(1)$, $S_t = O(Kn)$, тела не нагреты (не охлаждены), так что $\nabla T \sim M^2 \rightarrow 0$. Это – известный класс течений вязкой несжимаемой жидкости, описываемых упрощенными уравнениями Навье – Стокса (ρ и T постоянны, $\nabla u = 0$). Как и во втором случае, первый член в Df порядка Kn по сравнению с остальными, разбиение оператора $\partial / \partial t$ носит формальный характер и т.д. Принципиально новым является здесь нарушение предположения о том, что производные по t, x_i от $f^{(0)}$ порядка единицы. Так как ρ, T постоянны, $u \sim Kn \ll 1$, то $f^{(0)} \approx f^{00}(\xi^2) + u_i f_i^{10}(\xi^2)$, где f^{00} и f_i^{10} не зависят от x_i, t . Поэтому указанные производные порядка Kn , первый член в Df порядка Kn^2 , остальные – порядка Kn , функция $f^{(1)} \sim Kn^2$. Однако эти результаты следуют и из общего алгоритма метода Чепмена – Энскога, т.е. он применим и здесь ценой учета внепорядковых членов.

Описывающие второй и третий классы течений асимптотические ($Kn \rightarrow 0$) уравнения получаются суммированием формул для $\partial_0 / \partial t$ и $\partial_1 / \partial t$ с последующим упрощением. В рассмотренном ниже (разд. 4) классе медленных неизотермических течений асимптотические уравнения сохранения импульса получают аналогичным суммированием $\partial_r / \partial t$, $r = 0, 1, 2$, т.е. они получаются не из уравнений Навье – Стокса, а из уравнений Барнетта.

Из сказанного ясно, почему в качестве общего алгоритма можно применять алгоритм для первого случая, учитывая внепорядковые (по Kn) члены. Такие члены учитываются и в полных уравнениях Навье – Стокса, носящих не асимптотический, а "композиционный" характер. Известным преимуществом этих уравнений является эффективность их применения для сквозных расчетов всего поля течения около тела, неожиданно широкая область применимости по Kn и т.д.

Метод Чепмена – Энскога дает общие уравнения механики газа как сплошной среды, в частности, уравнения Навье – Стокса. Для конкретных классов течений с заданной точностью (по Kn) проводится выделение главных членов полученных рядов для переносных свойств. Такая процедура проще последовательных (без учета внепорядковых членов) асимптотических решений кинетических уравнений для каждого класса течений модифицированными методами Гильберта.

Изложенная классическая схема метода Чепмена – Энскога [1–5] "привязана" к нестационарному случаю. Как и при рассмотрении высших приближений [1], в кинетическом уравнении можно перейти от переменных ξ, x, t к переменным s, x, t . Тогда в (1.2) вместо $\partial f/\partial t$ войдет Df/Dt и исключению подлежат не частные, а полные производные по t от газодинамических переменных (при этом $D_{r>1}/Dt = \partial_{r>1}/\partial t$, $D_0 u/Dt = -\rho^{-1} \nabla p$ и т.д.). Однако применение такой схемы метода не изменяет сделанных выводов, оно менее наглядно, а в случае линеаризованных ("стоксовых") течений полные и частные производные по t совпадают (см. разд. 6).

Теперь кратко о других методах возмущений кинетической теории для $Kn \rightarrow 0$. Асимптотическая версия метода Грэда фактически является обобщением классического метода Максвелла на немаксвелловские молекулы [1, 3]. В противоположность методу Чепмена – Энскога, функция распределения сначала представляется рядом по полиномам Эрмита от s , для коэффициентов разложения получается бесконечная цепочка уравнений моментов, которая решается методом аналогичным методу Чепмена – Энскога. Альтернативой последнему является "рафинированный" асимптотический метод Гильберта [3, 4], неоднократно подвергнутый критике [7]. Причиной было, например, то, что в задаче Коши он дает "вековые" решения при $t \rightarrow \infty$. Связанные с этим методом недоразумения частично объясняются тем, что в исходной работе Гильберта ему было придано чрезмерно общее значение. Однако, он применим, строго говоря, только для первого класса течений, а в задаче Коши – для времен $t \sim 1$. В отличие от метода Чепмена – Энскога, здесь разлагаются в ряды по Kn газодинамические величины, разложение $\partial/\partial t$ не проводится. Результатом является последовательность уравнений Эйлера и неоднородных уравнений, получающихся линеаризацией уравнений Навье – Стокса и т.д. относительно уравнений Эйлера.

Иначе говоря, при этом меняется сама концепция построения макроскопических моделей: вместо замыкания системы (1.1) весьма общими зависимостями p_{ij}, q_i от газодинамических переменных для каждого конкретного класса течений выводятся асимптотическая модель, относительно которой строится метод возмущений по степеням единого малого параметра.

Модификация метода Гильберта для других классов течения впервые проведена в [8] применительно ко второму классу течений. В главном приближении по $Kn \rightarrow 0$ сразу получаются уравнения Прандтля, далее – последовательность линеаризованных неоднородных уравнений Прандтля. В [9] этот подход распространен на случай медленных неизотермических течений. Применение модифицированных методов Гильберта дает возможность решения краевых кинетических задач для $Kn \ll 1$ методом сращиваемых асимптотических разложений. При $Re \gg 1$ решается трехслойная задача: область внешнего течения, пограничный слой, кнудсеновский слой. Результаты отечественных работ этого направления с учетом физико-химических процессов в высокотемпературных газах суммированы в [10]. Широкое применение метод сращиваемых разложений нашел в большой серии японских работ для различных классов течений. Обзор этих работ дан, например, в [11, 12], их отличительной особенностью является то, что интегральные уравнения для возмущений решаются без использования известных результатов метода Чепмена – Энскога и, главное, дается вывод граничных условий с расчетом входящих в них коэффициентов (в том числе для скорости скольжения второго порядка). Во всех случаях найденные отрезки разложений совпадают с результатами переразложения рядов Чепмена – Энскога.

Для данного обзора важно, что наиболее полный вывод уравнений высших при-

ближений был дан именно методом Чепмена – Энскога и что асимптотические методы [8–12] подтверждают его результаты. Отметим также, что разрабатывались более общие методы (кроме цитированных ниже работ отметим [13, 14]).

2. Рассмотрим сначала переносные свойства в случае простого газа. В приближении Навье – Стокса имеем

$$p_{ij}^{(1)} = -2\mu e_{ij}, \quad \mathbf{q}^{(1)} = -\lambda \nabla T$$

$$e_{ij} = \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\rangle, \quad \langle A_{ij} \rangle \equiv \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji}) - \frac{1}{3}\delta_{ij}A_{kk} \quad (2.1)$$

где μ, λ – коэффициенты вязкости и теплопроводности. В приближении Барнетта (2.1) дополняются слагаемыми [3, 15]

$$p_{ij}^{(2)} = K_1 \frac{\mu^2}{p} e_{ij} \nabla \mathbf{u} - K_2 \frac{\mu^2}{p} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + 2e_{ik} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right\rangle + \quad (2.2)$$

$$+ \frac{\mu^2}{\rho T} \left\langle K_3 \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{K_4}{p} \frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_j} + \frac{K_5}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right\rangle + K_6 \frac{\mu^2}{p} \langle e_{ik} e_{kj} \rangle$$

$$q_i^{(2)} = \frac{\mu^2}{\rho T} \left[\theta_1 \frac{\partial T}{\partial x_i} \nabla \mathbf{u} + \frac{2}{3} \theta_2 \frac{\partial}{\partial x_i} (T \nabla \mathbf{u}) + 2\theta_2 \frac{\partial T}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] + \quad (2.3)$$

$$+ \frac{\mu^2}{\rho} \left(\frac{\theta_3}{p} \frac{\partial p}{\partial x_j} + \theta_4 \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\theta_5}{T} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) e_{ij}$$

Из (2.2) видно, что приближение Барнетта вносит в тензор напряжений члены принципиально нового вида, не связанные с производными от скорости и зависящие от градиентов термодинамических величин, среди которых наиболее важными являются температурные напряжения

$$p_{ij}^T = \frac{\mu^2}{\rho T} \left\langle K_3 \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{K_5}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right\rangle \quad (2.4)$$

В свою очередь в тепловом потоке (2.3) появляются члены, обусловленные производными от скорости. В низшем приближении по полиномам Сонина (точном для максвелловских молекул, когда $\mu \sim T$) имеем для барнеттовых коэффициентов переноса [1, 3]

$$K_1 = \frac{4}{3} \left(\frac{7}{2} - \partial\mu \right), \quad K_2 = 2, \quad K_3 = 3, \quad K_4 = 0, \quad K_5 = 3\partial\mu, \quad K_6 = 8 \quad (2.5)$$

$$\theta_1 = \frac{15}{4} \left(\frac{7}{2} - \partial\mu \right), \quad \theta_2 = -\frac{45}{8}, \quad \theta_3 = -3, \quad \theta_4 = 3, \quad \theta_5 = 3 \left(\frac{35}{4} + \partial\mu \right), \quad \partial\mu \equiv \frac{T}{\mu} \frac{d\mu}{dT}$$

Важно подчеркнуть, что для навье-стоксовых коэффициентов переноса μ, λ приближение (2.5) дает достаточно высокую точность, в то время как влияние высших приближений по полиномам Сонина на барнеттовы коэффициенты переноса значительно более сильное. В случае молекул – упругих сфер (когда $\mu \sim \sqrt{T}$) для определения этих коэффициентов понадобилось четвертое приближение [1, 3], некоторые из результатов этих вычислений подтверждены прямым численным расчетом [16]. Коэффициенты переноса Барнетта для случаев релаксационного оператора столкно-

вений (БГКВ-модель) и оператора Фоккера – Планка получены в [17], они, вообще говоря, отличаются от (2.5) (о влиянии многоатомности см. [18]).

Подстановка (2.1)–(2.3) в (1.1), т.е. замена p_{ij}, q_i в (1.1) на $p_{ij}^{(1)} + p_{ij}^{(2)}, q_i^{(1)} + q_i^{(2)}$ соответственно, дает уравнения Барнетта. В полярной системе координат они записаны в [15], в цилиндрической – в [19], в произвольной криволинейной ортогональной системе координат – в [20].

Супербарнеттово приближение в силу сложности разработано гораздо слабее барнеттова, причем только для максвелловских молекул [21]. В рамках БГКВ-модели супербарнеттовы коэффициенты переноса получены в [22], они значительно отличаются от найденных при помощи (1.2) [21].

Общие выражения для $p_{ij}^{(3)}, q_i^{(3)}$ имеют очень громоздкий вид, поэтому здесь приведем их лишь для одномерного случая [23]

$$p_{xx}^{(3)} = \frac{R\mu^3}{3\rho^2} \left\{ \frac{u'}{\rho} \left(47T'\rho' - \frac{40}{\rho} T\rho'^2 + 32T\rho'' \right) + u' \left(\frac{16}{9R} u'^2 - \right. \right. \quad (2.6)$$

$$\left. - \frac{21}{T} T' - \frac{31}{3} T'' \right) - u'' \left(2 \frac{T}{\rho} \rho' + \frac{47}{3} T' \right) + \frac{2}{3} T u''' \left. \right\}$$

$$q_x^{(3)} = \frac{\mu^3 u'}{21\rho\rho} \left(\frac{271}{\rho} \rho' u' + \frac{421}{2} u'' - \frac{9005}{8T} T' u' \right) + \quad (2.7)$$

$$+ \frac{\mu^3 R}{16\rho\rho} \left\{ \frac{\rho'}{\rho} \left[T' \left(\frac{1834}{T} T' - \frac{1137}{\rho} \rho' \right) + 397T'' - \frac{82}{\rho} T\rho'' + \frac{92}{\rho^2} T\rho'^2 \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\rho} (701T'\rho'' - 10T\rho''') - \frac{813}{T^2} T'^3 - \frac{1451}{T} T'T'' - 157T'''' \right\}$$

где штрих означает производную по x . Для сравнения и справочных целей приведем также выражения для барнеттовых поправок к тензору напряжений и тепловому потоку в одномерном случае [23]

$$p_{xx}^{(2)} = \frac{2}{3\rho} R\mu^2 \left[\frac{4}{3R} u'^2 + \frac{2}{\rho} \left(\frac{T}{\rho} \rho'^2 - T\rho'' - \rho'T' \right) + \frac{3}{T} T'^2 + T'' \right] \quad (2.8)$$

$$q_x^{(2)} = \frac{\mu^2}{8\rho} \left(95u'T' - 14u'' - \frac{16}{\rho} u'\rho' \right) \quad (2.9)$$

Напомним, что формулы (2.6)–(2.9) справедливы в случае максвелловских молекул. Учитывая $p_{ij}^{(3)}, q_i^{(3)}$ в (1.1), получим газодинамические уравнения супербарнеттова приближения.

Перейдем к случаю смеси одноатомных газов. Как известно, в общем случае многокомпонентный континуум характеризуется скоростями и температурами для отдельных компонентов. Однако достаточно полный анализ барнеттовых переносных свойств проведен только для обычно используемого односкоростного однотемпературного газодинамического описания. В этом случае система уравнений сохранения состоит из уравнений неразрывности, импульса, энергии и $(N - 1)$ -го уравнения для концентраций y_α , где N – число компонентов смеси, $\alpha = 1, 2, \dots, N$. Кроме диссипативных величин p_{ij}, q_i в уравнения входят диффузионные скорости V_α . Формулы для барнеттовых поправок $p_{ij}^{(2)}, q_i^{(2)}, V_\alpha^{(2)}$ в отличие от (2.2), (2.3) содержат производные от y_α

[20, 24]. Например, в случае бинарной смеси в тензор напряжений входят, в частности, концентрационные напряжения

$$p_{ij}^c = \beta_1 \left\langle \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_i \partial x_j} \right\rangle + \beta_2 \left\langle \frac{\partial y_1}{\partial x_i} \frac{\partial y_1}{\partial x_j} \right\rangle, \quad \beta \sim \text{Kn}^2 \quad (2.10)$$

где y_1 – концентрация одного из компонентов.

Для вычисления барнеттовых коэффициентов переноса многокомпонентной смеси газов достаточно знать навье–стоксовы функции распределения $f_\alpha^{(1)}$, как и в случае простого газа [1]. В [24] получены общие выражения для этих коэффициентов, на основе этих выражений найдены приближенные расчетные формулы в первом приближении по полиномам Сонина, которые являются точными для максвелловских молекул. Эти формулы и, вообще, соотношения для переносных свойств смеси газов имеют очень громоздкий вид и здесь не приводятся.

В [20, 25] рассмотрен лоренцев газ [1], когда в случае степенных межмолекулярных потенциалов выражения для барнеттовых коэффициентов переноса могут быть получены в явном виде. Сравнение точных и приближенных значений этих коэффициентов показало [20], что наибольшие различия имеют место для тех из них, которые связаны с термодиффузией, для остальных различия малы, если межмолекулярные потенциалы не слишком "жесткие".

В супербарнеттовом приближении для смеси газов получены лишь частные результаты: вычислены линейные (по градиентам газодинамических величин) члены в $p_{ij}^{(3)}$, $q_i^{(3)}$ и $V_{\omega i}^{(3)}$ для бинарной смеси газов из максвелловских молекул [20] и супербарнеттова поправка к скорости радиальной диффузии, возникающей при течении Пуазейля смеси в цилиндрической трубе [26].

3. Из формул (2.2), (2.3) следует [1], что обусловленные пространственными производными от u члены $p_{ij}^{(2)}$, $q_i^{(2)}$ содержат компоненты $\text{rot } u$ (подчеркнем, что такие слагаемые не содержатся в p_{ij}^T, p_{ij}^c). Однако уже исходная работа Стокса (например, [27]) основывалась на предположении, что p_{ij} не могут зависеть от вращения системы отсчета ("наблюдателя"), т.е. именно от $\text{rot } u$. Это предположение обобщено на более сложные среды в качестве одного из основных постулатов аксиоматической теории механики сплошных сред Нолла–Трусделла [27] – принципа материальной независимости от системы отсчета, согласно которому напряжения и тепловые потоки инвариантны относительно евклидовой группы преобразований (например, при переходе от инерциальной системы к вращающейся относительно нее системе). В частности p_{ij}, q_i в газе не должны явно зависеть от угловой скорости его вращения.

Этот принцип представляет собой постулат о существовании более сильной симметрии, чем симметрия относительно преобразований Галилея, и справедлив при $\text{Kn} \rightarrow 0$. В связи с этим в иностранной литературе долгое время проходила дискуссия, в ходе которой заявлялось о противоречиях между свойствами инвариантности уравнения Больцмана и газодинамических уравнений высших приближений метода Чепмена–Энскога. Отсюда некоторые авторы делали вывод о некорректности последних. На этой основе в работах, в которых уравнения Барнетта применяются к проблемам ударных волн и гиперзвуковой аэродинамики (см. разд. 8), среди недостатков этих уравнений указывается невыполнение данного принципа.

Детальный обзор и анализ принципа проведены в [28, 29]. Показано, что указанных противоречий между свойствами инвариантности нет. Следовательно, вывод о некорректности метода Чепмена–Энскога неверен. В явном виде решена задача о свободномолекулярном цилиндрическом течении Куэтта во вращающейся системе отсчета при различных температурах и одинаковых угловых скоростях стенок [29]. Доказано, что в линейном по угловым скоростям приближении азимутальный (ок-

ружной) тепловой поток q_ϕ пропорционален угловой скорости стенок в неподвижной системе отсчета вопреки принципу материальной независимости от системы отсчета. Существование окружного теплового потока q_ϕ (а не только радиального q_r) следует и из (2.3), причем с такими же свойствами при евклидовых преобразованиях. Это явилось одним из стимулов вышеупомянутой дискуссии. Существование q_ϕ при $\text{Kn} \leq 1$ подтверждено численными расчетами (см. разд. 4). В дискуссии по обзору [30] отмечено, что данный принцип является аппроксимацией, основанной на пренебрежении инерциальными силами в уравнениях движения молекул и не может считаться фундаментальным принципом. Подчеркнута важность учета кориолисовых сил при расчете q_ϕ .

Поэтому принцип материальной независимости от системы отсчета, вообще говоря, не выполняется в кинетической теории, в том числе и в приближении Барнетта.

Важно подчеркнуть факт, не упомянутый в дискуссии: традиционная постановка вопроса о выражениях для p_{ij} , q_i через газодинамические переменные "исчезает" при использовании модифицированных методов Гильберта или Чепмена–Энскога (см. разд. 1, 5), когда изменяется процедура макроскопического описания и "скоростные" слагаемые $p_{ij}^{(2)}$, $q_i^{(2)}$ входят в неоднородные части газодинамических уравнений.

Перейдем к вопросу применимости термодинамики необратимых процессов к приближению Барнетта для переносных свойств. Для процессов, близких к локально-равновесным, постулируются линейные связи потоков \mathbf{J} и сопряженных к ним термодинамических сил \mathbf{X} и принцип симметрии Онсагера для кинетических коэффициентов. Из кинетической теории следует справедливость этих результатов в приближении Навье–Стокса [5]. В ряде работ предлагались обобщения этих законов термодинамики необратимых процессов: J может зависеть, в частности, от XX [31] и от VX [32] с соответствующими соотношениями симметрии.

Справедливость этих обобщений применительно к приближению Барнетта для переносных свойств рассмотрена в [24]. Установлено, что здесь соотношения симметрии для кинетических коэффициентов, вообще говоря, не выполняются. Исключением является линейный случай, когда выражения для переносных свойств линейризуются по производным от газодинамических переменных. Тогда матрица кинетических коэффициентов симметрична, имеют место перекрестные явления, аналогичные термодиффузии и диффузионному термоэффекту Дюфура: вязкодиффузия и диффузионная вязкость, термовязкость и тепловой поток из-за неоднородности скорости и т.д. [24].

Коснемся вкратце еще одной интересной проблемы: расходимости по времени барнеттовых коэффициентов переноса, которая получается при использовании более сложных уравнений неравновесной статистической механики, чем уравнение Больцмана ([33, 34] и т.д.). Отсюда делается вывод о необходимости пересмотра структуры гидродинамических уравнений путем замены разложения переносных свойств в ряды по степеням градиентов макровеличин другой процедурой. Однако в [33] показано, что автокорреляционные функции можно разбить на две части. Регулярная часть определяется уравнением Больцмана и описывается экспоненциальным законом затухания, сингулярная часть определяется поправками по плотности к уравнению Больцмана и описывается асимптотическим степенным законом затухания с очень малым коэффициентом. Если рассматриваются течения с малыми, но конечными градиентами макроскопических величин, то за характерное время течения сингулярная часть остается малой по сравнению с регулярной частью и практически ею можно пренебречь. За такое время молекулы или успевают столкнуться с поверхностью обтекаемого тела (это означает, что корреляции разрушаются), или вылететь за пределы пограничного слоя в область, где диссипативные процессы отсутствуют. В [34] на примере течения между параллельными пластинами даны численные оценки, подтверждающие этот вывод.

4. Рассмотрим новые эффекты, обусловленные теми или иными членами формул для переносных свойств (в основном барнеттовых) в главном приближении по $\text{Kn} \rightarrow 0$.

1) Барнеттовы переносные свойства обладают определенной анизотропией. Некоторые барнеттовы члены в тепловом и диффузионных потоках могут отличаться по направлению от навье-стоксовых потоков или иметь место, когда последних вообще нет. Приведем некоторые результаты такого рода.

В плоском течении Куэтта между параллельными пластинами с различными температурами согласно (2.3) существует продольный тепловой поток $q_x^{(2)} = \theta_5 \mu^2 (2\rho T)^{-1} (dT/dy)(du_x/dy)$, где оси x, y направлены вдоль и поперек пластин. В [35] не просто обращено внимание на этот факт, а проведен численный расчет q_x в рамках модельного кинетического уравнения (S -модель) при различных Kn . Подтверждено существование этого потока и показана область применимости выражения для потока $q_x^{(2)}$.

Аналогичные результаты получены для цилиндрического течения Куэтта (см. также разд. 3). В [36] рассмотрено течение плотного газа между коаксиальными цилиндрами, вращающимися с одинаковой угловой скоростью Ω и имеющими разные температуры. Расчеты методом молекулярной динамики указывают на наличие не только радиального q_r , но и азимутального потока тепла q_ϕ . Последний пропорционален произведению Ω на радиальный градиент T , как и в приближении Барнетта. Для неплотного газа расчетный анализ такого течения в рамках модельного кинетического уравнения (S -модель) проведен в [37]. Подтверждены выводы не только барнеттова (для q_ϕ), но и супербарнеттова (для q_r) приближений.

Другим примером такого рода является теория [26] обнаруженного экспериментально [38] эффекта накопления более тяжелых молекул в приосевой области течения Пуазейля бинарной смеси газов в цилиндрической трубе. Анализ показал наличие четырех "источников" радиальной диффузии, которой эффект обусловлен: термодиффузии (неоднородное по сечению трубы распределение T возникает из-за тепловыделения за счет вязкости); бародиффузии (неоднородное по сечению распределение p обусловлено барнеттовыми напряжениями); некоторых слагаемых выражения для диффузионной скорости барнеттова (в [38] учтен только этот "источник" и в итоге получен качественно неверный результат) и супербарнеттова приближения. Полученное в [26] выражение для радиальной диффузионной скорости тяжелого компонента согласуется по знаку и порядку величины с опытными данными [38].

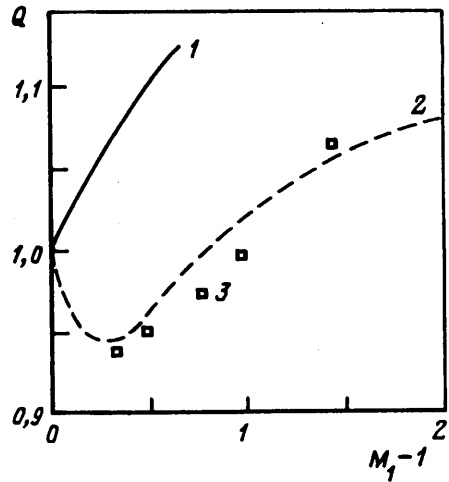
Вообще говоря, влияние термодиффузии является здесь преобладающим. Однако при достаточно малом термодиффузионном отношении k_T этим влиянием можно пренебречь (напомним, что $k_T = 0$ при температуре, равной температуре инверсии, а также для максвелловских молекул). В этом исключительном случае супербарнеттово приближение дает вклад основного порядка величины, наряду с барнеттовым.

2) Имеются эффекты, вклады в которые от навье-стоксовых и барнеттовых членов одного порядка по величине, но различны по знаку, причем именно барнеттов вклад зачастую определяет "знак" эффекта. Отметим в первую очередь наиболее показательные асимптотические свойства задач о распространении звука и структуре ударной волны (см. также разд. 7, 8).

Первый крупный успех в уравнениях Барнетта пришел при решении задачи о распространении звука высокой частоты ω , обзоры результатов можно найти в [39, 40]. Показано, что при $Kn \ll 1$ фазовая скорость $v = v_0(1 + d\omega^2 + \dots)$, где v_0 — адиабатическая скорость звука. В коэффициент дисперсии d вклад дает не только приближение Навье — Стокса, но и линейные члены приближения Барнетта, причем эти вклады одного порядка.

Для описания структуры ударной волны наряду с ее толщиной используется, в частности, параметр асимметрии профиля плотности Q . Согласно уравнениям Навье — Стокса $Q > 1$, в то время как из уравнений Барнетта следует $Q < 1$ при $M_1 \ll 1,8$ [41, 42], что подтверждается экспериментальными и численными данными (фиг. 1) [43].

Фиг. 1. Зависимость параметра асимметрии профиля плотности Q от числа Маха [43]: 1 – решение уравнений Навье – Стокса; 2 – решение уравнений Барнетта; 3 – решение методом прямого статистического моделирования



Заметим, что результаты метода прямого статистического моделирования хорошо согласуются с экспериментом.

Значительный интерес вызвала работа [32], где показано, что имеет место влияние вязкого переноса импульса на диффузию. При определенных условиях (например, течения в капиллярах или через пористые среды) в силу этого влияния бародиффузионное отношение k_p становится функцией не только термодинамических величин, но и молекулярных характеристик, причем оно может иметь любой знак в зависимости от параметров смеси.

Еще одним примером такого рода является зависимость ∇p от Kn в цилиндрическом течении Куэтта: из уравнений Барнетта в согласии с экспериментом следует убывание ∇p с ростом Kn , а из уравнений Навье – Стокса – возрастание [44].

3) В [45, 46] указан класс течений сплошной среды, не описываемых уравнениями Навье – Стокса: если в обозначениях разд. 1 $M \sim Kn \rightarrow 0$, $Re = O(1)$, $\lambda_i = O(1)$, $S_i = O(Kn)$, $\nabla T \sim 1$, то в уравнении импульса необходим учет температурных напряжений p_{ij}^T (2.4). Это – медленные неизотермические течения газа около нагретых (охлажденных) тел. Важно подчеркнуть, что сюда относится и классическая задача о теплообмене при относительных перепадах температуры $\theta_T = O(1)$, где, вообще говоря, необходим учет не только температурного скольжения, но и температурных напряжений [12, 45, 46]. В смесях газов при задаваемых краевыми условиями относительных перепадах концентраций $\theta_c = O(1)$ необходим аналогичный учет концентрационных напряжений [46–48].

Обнаружение целого класса течений газа как сплошной среды, для описания которого уравнения Навье – Стокса недостаточны, имеет принципиальное значение [5]. Результаты исследований указанных течений посвящен ряд достаточно подробных обзоров [49–52]. Большинство полученных здесь результатов относится к случаю стационарных течений простого газа. В соответствии со спецификой задачи, входящие в уравнение импульса производные от p_{ij}^T преобразуются так, что система уравнений сохранения для медленных неизотермических течений имеет тот же порядок, что и система уравнений Навье–Стокса. В главном ($Kn \rightarrow 0$) приближении вместо условия прилипания для касательной к стенке составляющей скорости ($u_\tau(x_\tau) = 0$) ставится условие температурного скольжения $u_\tau(x_\tau) \sim \partial T_w / \partial x_\tau$, где x_τ – касательная к стенке координата, T_w – температура стенки.

В отличие от полной системы уравнений Барнетта эта система уравнений устойчива по Бобылеву [53, 54] (см. разд. 5). В [54] получены также более общие результаты об ее устойчивости.

Чтобы выделить эффекты именно температурных напряжений, исключив действие температурного скольжения, рассматривался случай $T_w(x_\tau) = \text{const}$, когда справедливы обычные краевые условия: $u_n = 0$, $u_\tau = 0$, $T = T_w$. Согласно стационарным уравнениям Навье–Стокса при этом газ покоится ($\mathbf{u} = 0$, $p = \text{const}$, $\nabla(\lambda \nabla T) = 0$). Однако при наличии напряжений p_{ij}^T система уравнений сохранения не имеет решения $\mathbf{u} = 0$, возникает движение с некоторой скоростью u_T . Исключением является неподвижный газ между концентрическими цилиндрами, концентрическими сферами и параллельными пластинами, имеющими различные однородные температуры, когда напряжения p_{ij}^T уравниваются давлением [45, 46].

Иначе говоря, имеет место новый вид конвекции газа со скоростью u_T в отсутствие внешних сил (термострессовая конвекция). Для ряда течений удалось получить решения полученной системы уравнений (в том числе в явном виде), иллюстрирующие эту конвекцию [46, 55, 56]. Условия ее реализации обсуждались в [46, 51].

При малых перепадах температуры ($\theta_T \ll 1$), скорость термострессовой конвекции $u_T \sim \theta_T^3$. Если пренебречь величинами $O(\theta_T^3)$, то $u_T = 0$, температурные напряжения перераспределяют давление (возмущение которого порядка θ_T^2) и входят в выражения для местных сил (на стенке). Их действие приводит к новым эффектам [57]: в соответствии с установленной электростатической аналогией нагретые (охлажденные) тела отталкиваются, нагретое тело и охлажденное тело притягиваются; имеет место нелинейный термофорез (когда термофоретическая сила $\sim \theta_T^2$, обычный линейный термофорез обусловлен температурным скольжением); сила, действующая на нагретое (охлажденное) уединенное тело в безграничном однородном газе, равна нулю.

Такой же вывод на основе численного решения задачи о термострессовой конвекции около уединенного осесимметричного тела с учетом членов $O(\theta_T^3)$ сделан в [56], для слабо деформированной сферы – в [57]. Однако в общем случае вопрос о величине силы, действующей на уединенное тело с однородной температурой $T_w \neq T_\infty$, не решен.

Указанные новые эффекты обусловлены температурными напряжениями при малых разностях температур тел T_{wn} и T_∞ ($T_{wn}(x_\tau) = C_n$, $C_n = \text{const}$). Обобщения законов взаимодействия тел и термофореза на случай произвольных различий температур даны в [58]. В общем случае на систему двух тел действует суммарная сила.

Если поток, набегающий на тело с однородной температурой T_w , таков, что $Re_\infty \ll 1$, то поле скоростей около тела в общем случае определяет термострессовая конвекция, а набегающий поток оказывает лишь возмущающее действие. Исключением является случай изотермической сферы, когда при $u_\infty = 0$ вследствие симметрии p_{ij}^T уравниваются давлением и $u_T = 0$. Задача обтекания такой сферы при $Re_\infty \ll 1$ решена в [59, 60]. Показано, что с ростом отношения T_w/T_∞ действующая на сферу сила F уменьшается по сравнению с ее значением, рассчитанным по уравнениям Навье–Стокса для сжимаемой жидкости. При некотором значении T_w/T_∞ (зависящем от вида межмолекулярного взаимодействия) F становится отрицательной. Этот принципиальный факт подвергся многократному обсуждению, в том числе в связи с броуновским движением [50, 52]. Законы термодинамики здесь не нарушаются, ибо для поддержания температуры T_w к сфере должна подводиться энергия. По-видимому полезным было бы получить численное решение задачи для конечных Re_∞ .

В [61] показано значительное уменьшение F из-за действия p_{ij}^T при вдуве или испарении с поверхности изотермической сферы. В то же время при движении газа около нагретой сферы, обусловленном слабой переменной T_w по ее поверхности, p_{ij}^T слабо влияют на F [62].

Принципиальным является вопрос о степени влияния p_{ij}^T и температурного скольжения на теплообмен между телами при $\theta_T \sim 1$ (это влияние обычно не учитывается). Важный анализ проведен в [63], где на некоторых примерах показана незначительность "обратного" влияния p_{ij}^T (т.е. влияния термострессовой конвекции) на теплопередачу. Аналогичный вывод фактически сделан также и в [12]. В целом же этот вопрос не закрыт.

Были рассмотрены также изотермические течения бинарных смесей одноатомных газов (пренебрегалось эффектом Дюфура, так что $T = \text{const}$, $y_1 + y_2 = \text{const}$). При $\theta_c = O(1)$ в уравнении сохранения импульса необходим учет концентрационных напряжений p_{ij}^c (2.10), а его структура аналогична структуре уравнения сохранения импульса простого газа с учетом p_{ij}^T . Окончательная форма уравнений и их анализ даны в [57], описки исправлены в [64]. Граничные условия отличаются от случая простого газа тем, что в главном приближении для u_τ ставится условие диффузионного скольжения $u_\tau(x_\tau) \sim \sim \partial y_1 / \partial x_\tau$.

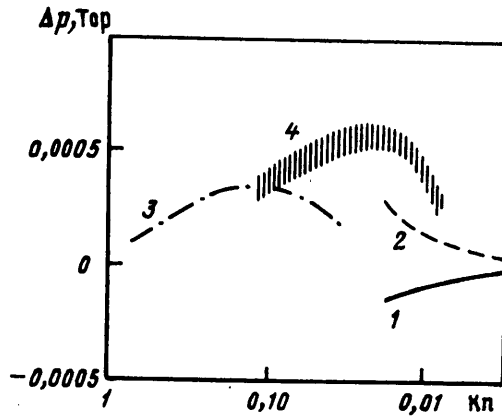
Если вдоль поверхностей тел, помещенных в смесь газов, концентрации постоянны, то справедливы свойства, аналогичные описанным выше: концентрационно-стрессовая конвекция, взаимодействие тел и т.д. [47, 57]. Напряжения p_{ij}^c сравнительно слабо влияют на силу сопротивления испаряющейся частицы при $\text{Re}_\infty \ll 1$ [64].

Вывод уравнений медленных течений осуществлялся упрощением уравнений Барнетта (критические замечания сделаны в [65]), модифицированным методом Гильберта [2, 9, 12], методом Максвелла [47, 66] с одинаковыми результатами. Однако для установления области их применимости и практической значимости необходимы экспериментальные и расчетные исследования. Сложность расчета при помощи кинетических уравнений обусловлена известными трудностями вычислений при $\text{Kn} \ll 1$, особенно для случая малых скоростей. В эксперименте трудно разделить сложные совместные действия различных факторов (термострессовая конвекция, температурное скольжение, гравитационная конвекция).

Тем не менее удалось рассчитать при помощи релаксационного кинетического уравнения (БГКВ-модель) задачу о движении газа между параллельными пластинами [67] с различными слабо неоднородными температурами. Продемонстрирован пример течения, которое при $\text{Kn} \rightarrow 0$ стремится к течению, описываемому не уравнениями Навье–Стокса, а уравнениями с учетом p_{ij}^T (вне кнудсеновских слоев), т.е. расчетным путем подтверждены выводы асимптотической теории и указаны границы ее применимости.

В ряде работ обсуждались различные возможности экспериментального подтверждения характера действий температурных напряжений (см. [51, 68]). В конечном итоге предложена обнадеживающая схема опыта по обнаружению влияния больших перепадов температуры на термомолекулярную разность давлений Δp в канале, проведены некоторые расчеты. При специально подобранном профиле изменения температуры вдоль стенки канала значения Δp , даваемые уравнениями Навье–Стокса и уравнениями медленных неизотермических течений (т.е. с учетом p_{ij}^T), различаются знаком, что облегчает экспериментальную проверку эффекта. После этого были проведены соответствующие расчеты Δp при помощи макроскопических уравнений и модельных кинетических уравнений для различных Kn и других параметров задачи, преодолены многочисленные трудности измерений. Постановка вопроса, схема опыта, сравнения расчетных и опытных данных даны в [68].

Представленные на фиг. 2 результаты [68] подтверждают выводы о знаке Δp , обусловленном действием температурных напряжений. Различия расчетных и опытных данных объясняются не только погрешностями вычисления малых разностей больших величин, но и недостаточно полным моделированием условий опыта в расчете: вы-



Фиг. 2. Зависимость нелинейной термомолекулярной разности давлений от числа Кнудсена [68]: 1 – решение уравнений Навье – Стокса; 2 – решение уравнений медленных неизотермических течений; 3 – решение модельного кинетического уравнения; 4 – экспериментальные данные

числения проводились для одноатомного газа из максвелловских молекул, в эксперименте же применялся воздух и т.д. Однако это не затрагивает центрального результата работы, являющегося редким примером экспериментального подтверждения тонкого кинетического эффекта.

5. В разд. 4 рассмотрены эффекты, справедливые в главном по числу Kn приближении. В общем случае метод Чепмена–Энскога носит асимптотический характер [3, 4], уравнения Барнетта дают поправки к уравнениям низших порядков, претендуя на распространение макроскопического решения в сторону больших Kn . Эффективность этого распространения обсуждается в разд. 6–8. Здесь же кратко остановимся на вопросе о порядках величин этих поправок.

Как следует из разд. 1, 4, вид газодинамических уравнений в главном приближении по $Kn \rightarrow 0$ и характер барнеттовых поправок зависят от конкретных условий. Именно, в случае невязких течений (первый класс течений) отношение навье-стоксовых и барнеттовых слагаемых уравнений сохранения к эйлеровым порядка соответственно $Kn \sim Re^{-1}$ и $Kn^2 \sim Re^{-2}$. Для пограничного слоя (второй класс) отношение барнеттовых членов к главным членам уравнений порядка $(\delta/L)^2 \sim Re^{-1}$, где δ – толщина слоя, L – размер тела [3]. Такой же величины те слагаемые уравнений Навье–Стокса, которые не учитываются в уравнениях пограничного слоя первого (Прандтля) и второго порядков, и даже некоторые (максимальные) члены супербарнеттова вклада в уравнения сохранения.

Таким образом, имеет место "перемешивание" различных приближений метода Чепмена–Энскога, обусловленное здесь неоднородностью метрики течения. Другим примером являются медленные неизотермические течения (разд. 4): в силу малости скорости газа и перепадов давления в нем соответствующие слагаемые формул для p_{ij} , q_i сдвигаются в сторону более высоких приближений по Kn . Температурные напряжения фигурируют в главном приближении, $q_i^{(2)}$ и остальные слагаемые $p_{ij}^{(2)}$ порядка Kn^2 по сравнению с единицей. Интересно, что такого же порядка некоторые члены супербарнеттовых выражений для $p_{ij}^{(3)}$, $q_i^{(3)}$, в чем легко убедиться с помощью (2.6), (2.7).

Приведенные оценки для классов течений 1, 2 получены для $M = O(1)$. В случае гиперзвуковых течений важен правильный выбор характерных значений макропара-

метров. Например, в пограничном слое $T_* \sim T_0 \approx 1/2(\kappa - 1)M_\infty^2 T_\infty$, где T_0, T_∞ – температуры торможения и набегающего потока, что не было учтено в некоторых работах (см. [69], где даны соответствующая критика и детальные оценки эффектов разреженности в пограничных слоях при гиперзвуковом обтекании).

Перейдем к сравнению свойств уравнений Барнетта и Навье–Стокса. Большое число дополнительных нелинейных членов в уравнениях Барнетта затрудняет их анализ и решение. Постановка начальной задачи не меняется, ибо и те, и другие – уравнения первого порядка по времени. Важно, что уравнения Барнетта содержат пространственные производные более высокого порядка, чем уравнения Навье–Стокса: третьи производные от p и T в уравнении сохранения импульса и от u_i в уравнении энергии. Для решения краевых задач требуются дополнительные граничные условия. Положение усугубляется тем, что метод Чепмена–Энскога может вводить посторонние (ложные) решения, "отсев" которых предъясвляет повышенные требования к точности постановки и методики решения уравнений Барнетта [4].

Наиболее полное рассмотрение вопроса о краевых условиях дано в [70]. Предложенный здесь способ получения дополнительных граничных условий основан, вопервых, на требовании, которому должны удовлетворять граничные условия для уравнений высших приближений метода Чепмена–Энскога: при переразложении по малому параметру Kn уравнения и граничные условия к ним должны сводиться к уравнениям соответствующего модифицированного метода Гильберта и граничным условиям к последним. Это возможно, если указанные дополнительные граничные условия при такой процедуре обратятся в тождество. Второе требование учитывает то, что в уравнения высших приближений старшие производные входят как малые поправки (по отношению к слагаемым основного порядка), т.е. они являются уравнениями с малым параметром при старших производных. Дополнительные граничные условия должны сохранять "поправочный" характер старших производных во всей рассматриваемой области течения, исключая из решения особенности, обусловленные указанной сингулярностью уравнений. Способ проиллюстрирован на простых примерах. Рассмотрена задача о теплопередаче между параллельными пластинами в супербарнеттовом приближении. Дополнительные условия ставятся в поле течения. Обсужден случай пограничного слоя.

В целом, вопрос о постановке краевых задач для уравнений Барнетта остается нерешенным. Однако в последнее время интерес к этой проблеме возрос. Методика [70] применена в задаче о плоском течении Куэтта с разнонагретыми пластинами [71].

Важнейшей особенностью уравнений высших приближений метода Чепмена–Энскога является открытая в [53] их коротковолновая неустойчивость. Была рассмотрена линеаризованная относительно состояния покоя нестационарная система одномерных уравнений Барнетта. Для решений типа плоских волн доказано, что существуют растущие с t решения, т.е. в отличие от уравнений Навье–Стокса уравнения Барнетта неустойчивы к малым периодическим возмущениям с длиной волны $\lambda_\nu < \lambda_{\nu*} \approx 2,5l_*$. Вывод о неустойчивости справедлив для супербарнеттова приближения [53]. Следовательно, уже для линеаризованных уравнений Барнетта задача Коши некорректна. Неустойчивость проявляется и в случае стационарных краевых задач, если для их численного решения применять методы установления (при дроблении расчетной сетки, см. разд. 8).

Обнаружение неустойчивости побудило искать усовершенствования метода Чепмена–Энскога. В [72] при помощи линеаризованных уравнений Грэда установлена структура разложения этим методом для p_{ij}, q_i и, затем, предложен метод частичного суммирования этого разложения, устраняющего коротковолновую неустойчивость. Ранее аналогичный способ регуляризации разложения метода Чепмена–Энскога был предложен в [73] на основе результатов [74] по структуре линеаризованных уравнений газодинамики в произвольном приближении по $Kn \ll 1$. Результирующая система уравнений формально имеет тот же вид, что и линеаризованные нестационарные

уравнения Навье–Стокса, но с новыми коэффициентами, зависящими от длины волны. В длинноволновом пределе система переходит в систему уравнений Барнетта.

Подчеркнем, что в [72, 73] рассматривались состояния, когда справедливо линейризованное уравнение Больцмана. Значимость полученных результатов снижается в силу известного факта вырождения последовательности уравнений метода Чепмена–Энскога для стационарных линейризованных течений, для которых данная проблема неустойчивости отсутствует (см. разд. 6). Для более сложных ситуаций предложения по усовершенствованию метода Чепмена–Энскога приводят к усложнению уравнений, поэтому, наверное, они не получили развития.

Простейшим решением проблем граничных условий и коротковолновой неустойчивости был бы отказ от этого метода в пользу модифицированных методов Гильберта (см. разд. 1), и соответственно от использования полной системы уравнений Навье–Стокса. Однако последние обладают важными преимуществами и неожиданно широкой областью применимости по Kn (не следующей из стандартных оценок по порядку величины членов рядов метода Чепмена–Энскога). Более интересным представляется предложение [4] применять гибридные методы, промежуточные между методами Чепмена–Энскога и Гильберта. Для многих приложений интересен вариант, дающий уравнения Навье–Стокса и цепочку неоднородных линейризованных уравнений Навье–Стокса: число граничных условий не увеличивается, снимается неустойчивость по Бобылеву и т.д. Эти методы можно назвать модифицированными методами Чепмена–Энскога. Указанное переразложение относительно приближения Навье–Стокса применимо не всегда: в случае медленных неизотермических течений оно должно производиться относительно уравнений с учетом p_{ij}^T . Очевидным исключением является случай сильной ударной волны (см. разд. 8).

Предложение [4] осталось практически не реализованным. Можно отметить [15], где расчет цилиндрического течения Куэтта при помощи уравнений Барнетта проводился методом возмущений относительно решения уравнений Навье–Стокса, а также анализ сдвигового течения уравнения Больцмана в [75].

6. Приведем некоторые точные результаты кинетической теории, иллюстрирующие особенности ее методом возмущений и их высших приближений. Это позволил сделать класс точных решений Галкина–Труделла уравнений кинетических моментов (уравнений переноса Максвелла), получающихся из уравнения (1.2) интегрированием с весом по ξ . Он описан в [2–4], более подробный обзор результатов дан в [75, 76].

Предполагается, что в задаче Коши для безграничного пространства компоненты скорости $u_i = \Psi_{ij} x_j$, Ψ_{ij} – известные функции t . Плотность, температура, напряжения и остальные центральные кинетические моменты зависят только от t . При этом в случае максвелловских молекул бесконечная система уравнений переноса распадается на рекуррентные системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Тогда, например, при специальных начальных условиях, когда исчезает начальный кнудсеновский слой, для одномерного течения $u_x = x(t + \alpha)^{-1}$, $\alpha = \text{const}$ получаем

$$p = p(0)(1 + t^*)^r, \quad r = -\frac{1}{2 \text{Kn}} \left\{ 1 + 4 \text{Kn} - \left[1 + 4 \text{Kn} \left(\frac{1}{3} + \text{Kn} \right) \right]^{1/2} \right\}, \quad t^* = \frac{t}{\alpha} \quad (6.1)$$

При $\text{Kn} \ll 1$ имеем абсолютно сходящийся ряд $r = -\frac{5}{3} + \frac{8}{9} \text{Kn} - \frac{16}{27} \text{Kn}^2 + \dots$, первый член разложения соответствует решению в приближении Эйлера ($r = -\frac{5}{3}$), два члена – Навье–Стокса, три – Барнетта и т.д., причем здесь приближение Барнетта значительно лучше согласуется с точным решением, чем приближение Навье–Стокса. Используя этот ряд для r и переразлагая (6.1) по Kn относительно решения уравнений Эйлера при фиксированном t^* , получим решение методом Гильберта. При $\text{Kn} \ll 1$, $t^* \sim 1$ это течение близко к невязкому. Сугубо "вязким" течением является сдвиговое

течение $u_x = \beta y$, $\beta = \text{const}$, когда метод Гильберта неэффективен [75]. На примере этого течения в ряде работ дан анализ различных вопросов кинетической теории ([77] и др.).

Теперь опишем работы, в которых указаны случаи вырождения рядов Чепмена–Энскога, что иллюстрирует значимость приближения Навье–Стокса. В [78] на основе стационарного решения уравнения Больцмана, линеаризованного относительно абсолютного максвелловского равновесия, сделан вывод, что вне кнудсеновских слоев газодинамические переменные удовлетворяют системе линеаризованных уравнений (1.1) в приближении Навье–Стокса (в частности, уравнение импульса сводится к уравнению Стокса для ползущих течений). Тот же вывод следует и из общих результатов [74], полученных методом Чепмена–Энскога из линеаризованного нестационарного уравнения Больцмана.

Критическое рассмотрение истории вопроса, обобщение и применение полученных результатов даны в [79]. Показано, что аналогичное вырождение имеет место и для рядов Чепмена–Энскога для переносных свойств: в стационарном линеаризованном случае ряды Чепмена–Энскога для переносных свойств смеси газов состоят из конечного числа членов, тепловые и диффузионные потоки даются приближением Барнетта, напряжения – супербарнеттовым приближением, остальные члены рядов равны нулю. Дивергенция от этих слагаемых высших приближений метода Чепмена–Энскога равна нулю.

Доказательство такого вырождения проведено двумя способами в предположении существования и единственности решения задачи: при помощи групповых свойств линеаризованного уравнения Больцмана [74] и при помощи общего алгоритма метода Чепмена–Энскога методом математической индукции. Это приложение общего алгоритма к проблеме вырождения рядов для переносных свойств интересно с методической точки зрения как иллюстрация замечания о разбиении оператора d/dt , сделанного при обсуждении второго класса течений в разд. 1.

Для нелинейных процессов аналогичное вырождение обнаружено в [80–82]. Путем анализа бесконечной цепочки уравнений переноса для коэффициентов разложения f ряд по полиномам Эрмита показано, что в задаче о теплопередаче между плоскими параллельными пластинами в газе максвелловских молекул при $\text{Kn} \ll 1$ уравнения (1.1) сводятся к уравнениям в приближении Навье–Стокса (ненавье–стоксовы слагаемые равны нулю). Обзор работ по обобщению этого результата на смесь газов дан в [81].

7. Практический интерес к уравнениям Барнетта возник в 40-е годы в связи с развитием динамики разреженного газа. Была надежда, что они расширят область применимости решений системы уравнений Навье–Стокса при малых Kn . В докладе [83] были подведены первые итоги. Успешным оказалось применение уравнений Барнетта к задаче о распространении звука, обеспечивающее существенное уточнение решения для звуковой моды в рамках уравнений Навье–Стокса, особенно для коэффициента поглощения в интервале $0,3 < \text{Kn} < 1,7$ (супербарнеттовы уравнения дают худшие результаты [39]). Однако высшие приближения метода Чепмена–Энскога увеличивают порядок дисперсионного уравнения и, следовательно, число мод, что вызвало критические замечания [39].

Последнее и главное – неудача в задаче о структуре ударной волны (см. разд. 8) – сделали выводы доклада [83] не очень оптимистичными. Широко распространилось пессимистическое отношение к уравнениям высших приближений метода Чепмена–Энскога [4]. Новая волна интереса к ним возникла в конце 60-х годов. В [44] представлены измерения полей плотности цилиндрического нелинейного ($M \approx 1$) течения Куэтта разреженного газа ($\text{Kn} = 0,04\text{--}1,07$) и проведены сравнения с решениями уравнений Навье–Стокса и Барнетта [15] с граничными условиями скольжения первого и второго порядка соответственно. Результаты решений этих уравнений в пределах точности измерений аппроксимируют поля ρ для $\text{Kn} \leq 0,05$ и $0,2$ соответственно, при больших Kn расчетные и опытные данные значительно различаются, т.е. при $\text{Kn} \approx 0,05\text{--}0,2$ приближение Барнетта лучше согласуется с опытом, чем приближение

Навье–Стокса, максимальное различие результатов этих приближений составляет менее 20%. Несколько меньше аналогичное различие в плоском течении Куэтта [71]. Более важными представляются результаты [44] по зависимости ∇p от Kn (см. разд. 4), однако расчетные результаты [44] нуждаются по мнению авторов обзора в детальном анализе.

Резкое усиление интереса к полным уравнениям Барнетта было обусловлено открытием новых эффектов (разд. 4) и новыми результатами по структуре ударной волны. Некоторые итоги подведены в [66]. В обзорном докладе [85] дан анализ состояния вопроса и сформулированы нерешенные задачи².

8. Перейдем к проблеме структуры ударной волны. Важно подчеркнуть, что метод Чепмена–Энскога применим, строго говоря, только для слабой ударной волны, где $Kn \ll 1$ [4, 86].

В обзоре [83] сделан вывод, что уравнения Барнетта не имеют решения для числа Маха набегающего ($x = -\infty$) потока $M_1 > 1,9$. Более того, уже при $M_1 \geq 1,5$ в решении этих уравнений (вверх по потоку) имеют место осцилляции газодинамических переменных. Детальный анализ постановки данной задачи о структуре ударной волны в газе из максвелловских молекул проведен в [42].

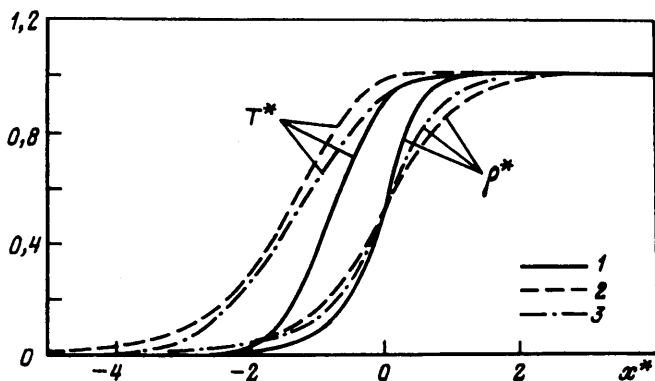
Прежде чем излагать результаты [42], напомним свойства решения задачи в рамках уравнений Навье–Стокса. Система уравнений имеет особые точки $x = \pm\infty$. В их окрестностях отклонения решения от асимптотических (равновесных) значений пропорциональны $\exp(\lambda_n x)$, где λ_n – один из двух корней характеристических уравнений (все корни – вещественные). При $x = \infty$ один корень положительный, другой – отрицательный, для него "траектория" решения удовлетворяет необходимому требованию к решению при $x \rightarrow \infty$. При $x = -\infty$ оба корня положительные, эта особая точка "притягивает" приходящие траектории. В итоге эффективно интегрирование уравнения для $u(T)$ от некоторой точки вблизи $u(x = \infty)$, $T(x = \infty)$ вверх по потоку.

В случае уравнений Барнетта также имеем две особые точки, но λ_n удовлетворяют алгебраическим уравнениям четвертой степени. При $x = \infty$ один корень вещественный отрицателен, остальные корни (или их вещественные части) положительны. При $x = -\infty$ вблизи $M_1 = 1$ все корни вещественные и положительные; при $M_1 = 1,5$ все корни комплексные, появляются осцилляции численного решения; наконец, при $M_1 > 1,9$ одна пара комплексно-сопряженных корней приобретает отрицательную вещественную часть, особая точка $x = -\infty$ перестает быть притягивающей, осцилляции становятся настолько большими, что не удается получить физически приемлемого решения. Система уравнений супербарнеттова приближения имеет такие корни характеристических уравнений λ_n , которые не дают возможности решать задачу интегрирования вверх по потоку при любом $M_1 > 1$ [42].

Эти выводы скорректированы в [87], где оригинальным численным методом при помощи уравнений Барнетта задача рассчитана до $M_1 = 4$. После этого стал применяться метод установления.

Решающий "прорыв", обусловивший резкий рост интереса к полной системе уравнений Барнетта в гиперзвуковой аэродинамике, сделан в [88], где структура скачка уплотнения рассчитана вплоть до $M_1 = 50$ при помощи систем уравнений Навье – Стокса, Барнетта и уравнений супербарнеттова приближения. Результаты расчетов сравнены с результатами решения уравнения Больцмана методом прямого статистического моделирования. Показано, что результаты уравнений Барнетта и – в случае максвелловских молекул – супербарнеттовых уравнений значительно лучше согласуются с кинетическими и опытными данными, чем результаты, полученные в рамках уравнений Навье – Стокса. Это давало надежду на создание эффективных моделей гиперзвуковых течений слаборазреженных газов, обеспечивающих достаточно точный

² Кроме того, в ряде работ (см. [84]) высшие приближения метода Чепмена–Энскога применялись для приближенного анализа некоторых внутренних задач.



Фиг. 3. Профили приведенных температуры T^* и плотности ρ^* в ударной волне при $M_1 = 11$ в случае молекул – упругих сфер ($\mu \sim \sqrt{T}$) [91]: 1 – решение уравнений Навье – Стокса; 2 – решение уравнений Барнетта; 3 – решение методом прямого статистического моделирования

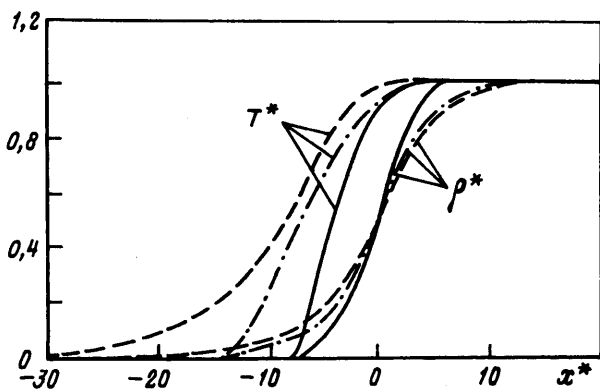
расчет не только у поверхности тел, что обеспечивают уравнения Навье – Стокса, но и в зоне размытого скачка уплотнения, где последние недостаточно точны (для учета излучения при второй космической скорости необходима весьма высокая точность расчета течения именно в этой зоне [89]). Можно было надеяться, что приемлемую точность обеспечат уравнения Барнетта.

Затем первоначальная эйфория стала убывать. Расчеты [88] проводились на сравнительно грубой сетке. В [90] была продемонстрирована коротковолновая неустойчивость (см. разд. 5) численных решений полной системы уравнений Барнетта для ударных волн при измельчении расчетной сетки, особенно "сильная" в случае максвелловских молекул. Предложенная в этой работе методика развита и уточнена в [91]. Вместо уравнений Барнетта применяются "расширенные" уравнения Барнетта, отличающиеся дополнительными слагаемыми в p_{ij} и q_i супербарнеттова вида, которые были найдены эмпирически. Система расширенных уравнений устойчива, и решения близки к решению уравнений Барнетта. Заново проведены сравнительные расчеты структуры ударной волны при помощи уравнений Навье – Стокса, расширенных уравнений Барнетта, уравнения Больцмана для максвелловских молекул, упругих сфер ($M_1 = 1,1-50$) и аргона ($M_1 \leq 11$). Продемонстрированы преимущества уравнений Барнетта по сравнению с уравнениями Навье – Стокса (см. также [92–94]).

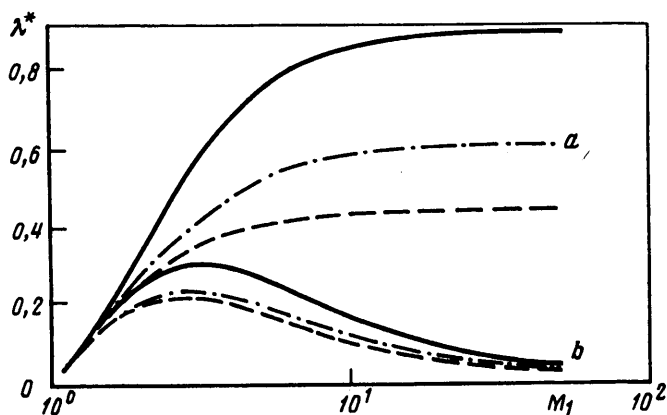
На фиг. 3, 4 представлены результаты расчетов [91] профилей приведенных температуры и плотности при $M_1 = 11$, а на фиг. 5 – зависимости толщины ударной волны от M_1 . Используются обозначения $x^* = x/l$, $\lambda^* = l/\delta$, где δ – толщина ударной волны, рассчитываемая как обычно по $\max dp^*/dx^*$, l – средняя длина свободного пробега молекул перед ударной волной. Наибольшая неточность макромоделей имеет место в зонах "передних крыльев" профилей ρ^* и особенно T^* .

Авторы [94] вернулись к стационарной постановке задачи. На границах расчетной области, включающей скачок уплотнения, в качестве граничных условий используются обыкновенные дифференциальные уравнения релаксационного типа, полученные из анализа особых точек. Применяется глобальный метод итераций решения краевой задачи. В результате удалось получить стационарное решение задачи о структуре сильной ударной волны при помощи уравнений Барнетта. Результаты расчетов, вообще говоря, хорошо согласуются с известными.

Расширенные уравнения были применены для расчетов течений в окрестностях плоских затупленных передних кромок тел [90], обтекания кругового цилиндра [92], течения в окрестности критической точки сферы [19] при больших числах M_∞ , различ-



Фиг. 4. Профили приведенных температуры T^* и плотности ρ^* в ударной волне при $M_1 = 11$ в случае максвелловских молекул ($\mu \sim T$) [91]. Обозначения см. на фиг. 3

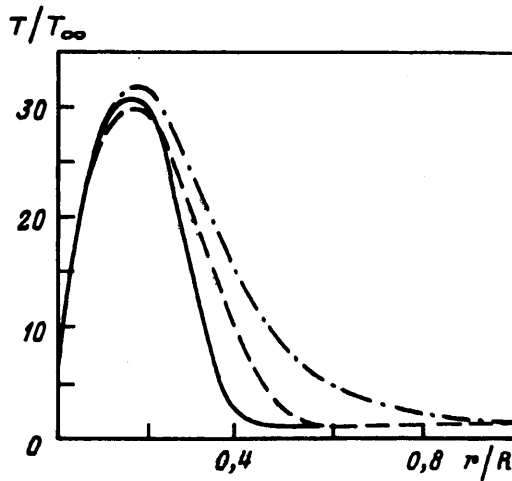


Фиг. 5. Зависимость безразмерной величины, обратно пропорциональной толщине ударной волны, от числа Маха [91]: a – молекулы – упругие сферы; b – максвелловские молекулы. Остальные обозначения см. на фиг. 3

ных Kp_∞ и $T_w \ll T_0$, где T_0 – температура торможения. Для расширенных уравнений дополнительных (по сравнению с уравнениями Навье – Стокса) краевых условий не вводилось. Обоснование авторы видят в малости барнеттовых членов вблизи сильно охлажденной стенки. В пристеночном слое члены с производными высших порядков рассчитывались путем экстраполяции значений переменных из внешней области течения.

В этих задачах гиперзвукового обтекания уравнения Барнетта уточняют уравнения Навье – Стокса, но не столь кардинально, как в случае структуры ударной волны. Значительное уточнение имеет место для профиля T в передней части скачка уплотнения (см. данные из [19] на фиг. 6). Противоположный вывод о большей точности уравнений Навье – Стокса сделан в [96], где при помощи уравнений Барнетта рассчитано обтекание плоской полубесконечной пластины под нулевым углом атаки при $M_\infty \approx 13$, $T_w/T_0 \approx 0,08$. Однако этот вывод не является достаточно обоснованным из-за изъянов в постановке задачи и методике вычислений [19].

Заключение. Результаты метода Чепмена – Энскога согласуются с точными решениями уравнения Больцмана и со свойствами последнего. Газодинамические уравнения



Фиг. 6. Распределение температуры вдоль линии торможения течения газа из молекул – упругих сфер около сферы при $M_\infty = 10$, $Kp_\infty = 0,1$, $T_w/T_\infty = 1$ [19]. Обозначения см. на фиг. 3

высших приближений метода явились очень удобным аппаратом для открытия новых тонких асимптотических ($Kp \rightarrow 0$) эффектов, где определяющую роль играют ненавье–стоксовы переносные свойства. Почти все эти эффекты обусловлены приближением Барнетта (например, конвекция газа под действием температурных или концентрационных напряжений). Супербарнеттово приближение только в одном случае дает вклад основного порядка величины: в радиальную диффузию при малом значении термодиффузионного отношения. Ряд эффектов получил расчетное (путем численного решения кинетических уравнений) и экспериментальное подтверждение. Указанные эффекты описываются упрощенными (для $Kp \rightarrow 0$) соотношениями, свободными от дефектов полной системы уравнений Барнетта.

Полная система уравнений Барнетта обеспечивает некоторое уточнение решений уравнений Навье – Стокса при малых Kp (особенно в задаче об ультразвуке). Неожиданным оказался успех применения этих уравнений в задаче о структуре сильной ударной волны, где они значительно лучше согласуются с кинетическими расчетными и экспериментальными данными, чем уравнения Навье – Стокса. Однако это преимущество, по-видимому, уменьшается при использовании расширенных уравнений Барнетта для расчета гиперзвукового обтекания тупых тел, хотя они значительно уточняют результаты по распределению температуры в передней зоне размытого скачка уплотнения.

Среди нерешенных вопросов приближения Барнетта в первую очередь важны вопросы о дополнительных краевых условиях (порядок системы уравнений Барнетта выше порядка системы уравнений Навье – Стокса) и о коротковолновой неустойчивости этих уравнений, проявляющейся, в частности, при решении стационарных задач методами установления. Для подавления неустойчивости применяются расширенные уравнения Барнетта, включающие некоторые специально подобранные внепорядковые члены. При решении задач гиперзвуковой аэродинамики на увеличение порядка системы уравнений просто не обращается внимания: считается, что около "холодной" поверхности члены уравнений с высшими пространственными производными пренебрежимо малы.

В связи с этим актуальна задача замены полной системы уравнений Барнетта более простой, достаточно точной и не обладающей указанными дефектами: например, системой, в которой барнеттовы слагаемые входят как неоднородные, рассчитывае-

мые на решении системы уравнений Навье – Стокса. Замена основана на использовании модифицированных методов Чепмена – Энскога, приводящих к переразложению по Kn цепочки уравнений сохранения высших приближений относительно базиса, более общего по сравнению с уравнениями Эйлера. Анализ эффективности переразложения наиболее важен для задач, где уравнения Барнетта значительно точнее уравнений Навье – Стокса или где особенно значимы преимущества метода Чепмена – Энскога как равномерно пригодного, устраняющего секулярные члены разложений.

Проблеме указанной замены полной системы уравнений Барнетта для задачи о структуре ударной волны посвящена работа [97], где показано, что близкие результаты в широком диапазоне значений числа Маха $M_1 \approx 1,5-35$ дают полная система и система усеченных неоднородных уравнений Барнетта. Порядок последней равен порядку системы уравнений Навье – Стокса, она не обладает коротковолновой неустойчивостью по Бобылеву. Эта система получается из полной системы уравнений Барнетта следующим образом: выделяются те слагаемые формул для напряжений и тепловых потоков, которые пропорциональны вторым производным от газодинамических переменных и парным произведениям первых производных от температуры; из содержащих эти слагаемые членов уравнений импульса и энергии формируется неоднородная часть, она рассчитывается на решении усеченной системы (в которой указанные члены опускаются). Иначе говоря, в качестве базиса взята система уравнений, в которой учитываются остальные нелинейные барнеттовы слагаемые формул для напряжений и тепловых потоков.

Среди других нерешенных вопросов отметим то, что не проведен анализ точности различных приближений по полиномам Сонина для барнеттовых коэффициентов переноса смесей газов, хотя известно, что барнеттовы коэффициенты здесь более чувствительны по сравнению с навье-стоксовыми. Почти не изучен вопрос о степени влияния вращений и колебаний молекул на эти коэффициенты, не говоря уже о влиянии более сложных неупругих процессов.

Полная система уравнений супербарнеттова приближения имеет значительно более громоздкий вид, получена она только для случая максвелловских молекул, применялась лишь для некоторых одномерных задач с незначительным успехом. Указанные выше проблемы здесь только усугубляются, однако их решение, видимо, менее актуально, чем решение уравнений Барнетта.

Авторы благодарны Е.С. Асмолову за помощь в работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01244).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 510 с.
2. Рудяк В.Я. Статистическая теория диссипативных процессов в газах и жидкостях. Новосибирск: Наука, 1987. 269 с.
3. Коган М.Н. Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.
4. Cercignani C. The Boltzmann equation and its applications. N.Y.: Springer, 1988. 455 p.
5. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. 527 с. (Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 10).
6. Богаевский В.Н., Повзнер А.Я. Алгебраические методы в нелинейной теории возмущений. М.: Наука, 1987. 255 с.
7. Струминский В.В. О методе Гильберта решения кинетического уравнения Больцмана // Докл. АН СССР. 1964. Т. 158. № 1. С. 70–73.
8. Жигулев В.Н. Уравнения движения неравновесной среды с учетом излучения // Инж. журн. 1964. Т. 4. Вып. 2. С. 231–241.
9. Галкин В.С. Вывод уравнений медленных течений смесей газов из уравнения Больцмана // Уч. зап. ЦАГИ. 1974. Т. 5. № 4. С. 40–47.

10. *Zhigulev V.N.* Methods of obtaining hydrodynamic equations of motion of complicated media and their boundary conditions on the basis of kinetic equations // *Rarefied Gas Dynamics: Proc. 13th Intern. Symp., Novosibirsk, 1982. N.-Y.: Plenum Press. 1985. V. 1. P. 161-176.*
11. *Sone Y.* Asymptotic theory of a steady flow of a rarefied gas past bodies for small Knudsen numbers // *Advances in Kinetic Theory and Continuum Mechanics. Berlin: Springer, 1991. P. 19-31.*
12. *Sone Y., Aoki K., Takata S. et al.* Inappropriateness of the heat-conduction equation for description of a temperature field of a stationary gas in the continuum limit // *Phys. Fluids. 1996. V. 8. № 2. P. 628-638.*
13. *Khonkin A.D., Orlov A.V.* Derivation of the modified diffusion equations in a gas mixture // *Phys. Rev. E. 1994. V. 49. № 1. P. 906-909.*
14. *Рудяк В.Я.* Нелокальное решение уравнения Больцмана // *ЖТФ. 1995. Т. 65. Вып. 11. С. 29-40.*
15. *Lin T.C., Street R.E.* Effect of variable viscosity and thermal conductivity on high-speed slip flow between concentric cylinders // *NACA Rep. 1954. № 1175. 36p.*
16. *Brooker P.J.* An exact solution for the third approximation to the pressure tensor of a gas of rigid spheres // *Austral. J. Phys. 1970. V. 23. № 1. P. 1-10.*
17. *McCoy B.J.* Second-order constitutive equations for monatomic fluids // *Amer. J. Phys. 1969. V. 37. № 8. P. 785-789.*
18. *McCoy B.J., Dahler J.S.* Second-order constitutive relations for polyatomic fluids // *Phys. Fluids. 1969. V. 12. № 7. P. 1392-1403.*
19. *Zhong X., Furumoto G.H.* Augmented Burnett-equation solutions over axisymmetrical blunt bodies in hypersonic flow // *J. Spacecraft and Rockets. 1995. V. 32. № 4. P. 588-595.*
20. *Шавалиев М.Ш.* Явления переноса в газовых смесях в барнеттовском и супербарнеттовском приближениях: Дис. канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, ИТПМ СО АН СССР, 1978. 162 с.
21. *Шавалиев М.Ш.* Барнеттовское приближение к функции распределения и супербарнеттовские вклады в тензор напряжений и тепловой поток // *ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 4. С. 656-660.*
22. *Cha C.Y., McCoy B.J.* Third-order constitutive equations for a monatomic gas // *J. Chem. Phys. 1971. V. 54. № 10. P. 4369-4372.*
23. *Шавалиев М.Ш.* Супербарнеттовские поправки к тензору напряжений и тепловому потоку в газе из максвелловских молекул // *ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 3. С. 168-171.*
24. *Шавалиев М.Ш.* Явления переноса в барнеттовском приближении в многокомпонентных газовых смесях // *Изв. АН СССР. МЖГ. 1974. № 1. С. 126-137.*
25. *Uribe F.J., Garcia Colin L.S.* The Burnett equations for a Lorentzian mixture // *Phys. Fluids A. 1993. V. 5. № 7. P. 1814-1830.*
26. *Шавалиев М.Ш.* О радиальной диффузии в пуазейлевском течении газовой смеси // *Изв. АН СССР. МЖГ. 1979. № 5. С. 91-96.*
27. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
28. *Галкин В.С., Носик В.И.* Кинетическая теория и принцип материальной независимости от системы отсчета в механике сплошных сред // *ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 4. С. 563-571.*
29. *Галкин В.С., Носик В.И.* Принцип материальной независимости от системы отсчета и цилиндрическое течение Куэтта разреженного газа // *ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 6. С. 957-961.*
30. *Cohen E.G.D.* Kinetic theory of non-equilibrium fluids. Discussion // *Physica A. 1983. V. 118. № 1-3. P. 17-47.*
31. *Дьярмати И.* Неравновесная термодинамика. Теория поля и вариационные принципы. М.: Мир, 1974. 304 с.
32. *Жданов В., Казан Ю., Сазыкин А.* Влияние вязкого переноса импульса на диффузию в газовой смеси // *ЖЭТФ. 1962. Т. 42. № 3. С. 857-867.*
33. *Dufty J.W., Lindenfeld M.J.* Nonlinear transport in the Boltzmann limit // *J. Stat. Phys. 1979. V. 20. № 3. P. 259-301.*
34. *Kuscer I.* Irreversible thermodynamics of rarefied gases // *Physica A. 1985. V. 133. № 3. P. 397-412.*
35. *Бишаев А.М., Рыков В.А.* О продольном потоке тепла в течении Куэтта // *Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 3. С. 162-166.*

36. Hoover W.G., Moran B., More R.M., Ladd A.J.C. Heat conduction in a rotating disk via nonequilibrium molecular dynamics // Phys. Rev. A. 1981. V. 24. № 4. P. 2109–2115.
37. Sharipov F.M., Kremer G.M. Heat conduction through a rarefied gas between two rotating cylinders at small temperature difference // ZAMP. 1995. V. 46. № 5. P. 680–692.
38. Annis B.K. Stress induced diffusion in monatomic gases and gas suspensions // Phys. Fluids. 1971. V. 14. № 2. P. 269–277.
39. Greenspan M. Transmission of sound waves in gases at very low pressures // Physical Acoustics. V. II. Pt A. Properties of gases, liquids and solutions. N.Y.; L.: Acad Press, 1965. P. 1–45.
40. Foch J.D., Ford G.W. The dispersion of sound in monatomic gases // Studies in statistical mechanics / Eds J. De Bour, G.E. Uhlenbeck. Amsterdam: North Holland, 1970. V. 5. P. 103–231.
41. Шавалиев М.Ш. Многоскоростная многотемпературная газодинамика и ударно-волновые процессы в смесях газов // Дис. док. физ.-мат. наук. Новосибирск, ИТПМ СО АН СССР, 1992. 241 с.
42. Foch J.D. On higher order hydrodynamic theories of shock structure // The Boltzmann equation. Theory and applications. Vienna: Springer, 1973. P. 123–140.
43. Honma H., Xu D.Q., Oguchi H. Kinetic model approach to the shock structure problem: a detailed aspect // Rarefied Gas Dynamics: Proc. 17th Intern. Symp. VCH. Weinheim, 1991. P. 161–166.
44. Alofs D.J., Springer G.S. Cylindrical Couette flow experiments in the transition regime // Phys. Fluids. 1971. V. 14. № 2. P. 298–305.
45. Галкин В.С., Коган М.Н., Фридлиндер О.Г. О некоторых кинетических эффектах в течениях сплошной среды // Изв. АН СССР. МЖГ. 1970. № 3. С. 13–21.
46. Галкин В.С., Коган М.Н., Фридлиндер О.Г. О свободной конвекции в газе в отсутствие внешних сил // Изв. АН СССР. МЖГ. 1971. № 3. С. 98–107.
47. Галкин В.С., Коган М.Н., Фридлиндер О.Г. О концентрационно-стрессовой конвекции и некоторых свойствах медленных течений смесей газов // Изв. АН СССР. МЖГ. 1972. № 2. С. 113–118.
48. Шавалиев М.Ш. О медленных движениях тел в газовых смесях // Изв. СО АН СССР. Сер. тех. наук. 1973. № 3. Вып. 1. С. 68–73.
49. Коган М.Н., Галкин В.С., Фридлиндер О.Г. О напряжениях, возникающих в газах вследствие неоднородности температуры и концентраций. Новые типы свободной конвекции // Успехи физических наук. 1976. Т. 119. Вып. 1. С. 111–125.
50. Kogan M.N. Non Navier-Stokes gas dynamics and thermal-stress phenomena // Rarefied Gas Dynamics: Proc. 15th Intern. Symp. Stuttgart: Teubner, 1986. V. 1. P. 15–24.
51. Friedlander O.G. On thermal-stress gas flows // Arch. Mech. 1990. V. 42. № 4–5. P. 475–482.
52. Kogan M.N. Kinetic theory in aerothermodynamics // Progress Aerospace Sci. 1992. V. 29. № 4. P. 271–354.
53. Бобылев А.В. О методах Чемпена – Энскога и Грэда решения уравнения Больцмана // Докл. АН СССР. 1982. Т. 262. № 1. С. 71–75.
54. Борис А.Ю., Галкин В.С., Кравченко В.А., Фридлиндер О.Г. Об устойчивости решений уравнений медленных неизотермических течений газа // ЖТФ. 1987. Т. 57. Вып. 7. С. 1255–1260.
55. Галкин В.С., Фридлиндер О.Г., Царькова Г.Е. Примеры термострессовой конвекции // Уч. зап. ЦАГИ. 1972. Т. 3. № 5. С. 60–65.
56. Александров В.Ю. Численное исследование медленных неизотермических течений около осесимметричных тел // Уч. зап. ЦАГИ. 1982. Т. 13. № 6. С. 40–48.
57. Галкин В.С., Фридлиндер О.Г. О силах на тела в газе, обусловленных барнеттовскими напряжениями // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 2. С. 271–283.
58. Борис А.Ю. Термофорез и взаимодействие равномерно нагретых сферических частиц в газе // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 2. С. 324–327.
59. Галкин В.С., Коган М.Н., Фридлиндер О.Г. Обтекание сильно нагретой сферы потоком газа при малых числах Рейнольдса // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 5. С. 880–885.
60. Борис А.Ю., Фридлиндер О.Г. Медленные течения газа около сильно нагретой или охлажденной сферы // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 6. С. 170–175.
61. Борис А.Ю. Медленное обтекание сильно нагретой сферы при вдуве и испарении с ее поверхности // Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 4. С. 128–134.
62. Фридлиндер О.Г. Течение газа около неравномерно нагретой сферы // Уч. зап. ЦАГИ. 1975. Т. 6. № 5. С. 55–61.

63. Жбакова А.В., Фридендер О.Г. Теплопередача в медленных течениях газа // Уч. зап. ЦАГИ. 1978. Т. 9. № 5. С. 125–128.
64. Борис А.Ю. Сила сопротивления испаряющейся сферической частицы в медленном потоке бинарной смеси газов // Докл. АН СССР. 1982. Т. 265. № 3. С. 553–555.
65. Жигулев В.Н. К вопросу о течениях газа около сильно нагретых тел // ПМТФ. 1972. № 4. С. 95–98.
66. Галкин В.С., Коган М.Н. К выводу уравнений медленных неизоэнтальпических течений газа // Изв. АН СССР. МЖГ. 1979. № 6. С. 77–84.
67. Александров В.Ю., Фридендер О.Г. Течения слаборазреженного газа между параллельными неравномерно нагретыми пластинами // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 1. С. 115–121.
68. Alexandrov V., Boris A., Freedlender O., et al. Thermal stress effect and its experimental detection // Rarefied Gas Dynamics: Proc. 20th Intern. Symp. Beijing. 1997. P. 79–84.
69. Галкин В.С. Об эффектах скольжения при обтекании тел гиперзвуковым слаборазреженным потоком // Инж. журн. 1963. Т. 3. Вып. 1. С. 27–36.
70. Макашев Н.К. О граничных условиях для уравнений газодинамики, соответствующих высшим приближениям в методе Чепмена – Энскога решения уравнения Больцмана // Изв. АН СССР. МЖГ. 1979. № 3. С. 77–87.
71. Zhong X., Koura K. Comparison of solutions of the Burnett equations, Navier-Stokes equations and DSMC for Couette flow // Rarefied Gas Dynamics: Proc. 19th Intern. Symp. Oxford: Univ. Press, 1995. V. 1. P. 354–360.
72. Горбань А.Н., Карлин И.В. Структура и аппроксимации разложения Чепмена – Энскога для линеаризованных уравнений Грэда // ЖЭТФ. 1991. Т. 100. Вып. 4(10). С. 1153–1161.
73. Rosenau P. Extending hydrodynamics via the regularization of the Chapman – Enskog expansion // Phys. Rev. A. 1989. V. 40. № 12. P. 7193–7196.
74. Grad H. Asymptotic theory of the Boltzmann equation // Phys. Fluids. 1963. V. 6. № 2. P. 147–181.
75. Галкин В.С. Точное решение системы уравнений кинетических моментов второго порядка для двухмасштабного гомоэнергетического аффинного течения одноатомного газа // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 3. С. 156–166.
76. Truesdell C., Muncaster R.G. Fundamentals of Maxwell's kinetic theory of a simple monatomic gas. N.-Y.: Acad. Press, 1980. 593 p.
77. Santos A., Carzo V. Exact non-linear transport from the Boltzmann equation // Rarefied Gas Dynamics: Proc. 19th Intern. Symp. Oxford: Univ. Press, 1995. V. 1. P. 13–22.
78. Cercignani C. On the general solution of the steady linearized Boltzmann equation // Rarefied Gas Dynamics: Proc. 9th Intern. Symp.: Porz-Wahn, 1974. V. 1. P. A9/1–A9/11.
79. Галкин В.С. Вырождение рядов Чепмена – Энскога для переносных свойств в случае медленных стационарных течений слаборазреженных газов // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 4. С. 157–163.
80. Асмолов Е.С., Макашев Н.К., Носик В.И. Теплопередача между плоскими параллельными пластинами в газе максвелловских молекул // Докл. АН СССР. 1979. Т. 249. № 3. С. 577–580.
81. Nosik V.I. Degeneration of the Chapman – Enskog expansion in onedimensional motions of Maxwellian molecule gases // Rarefied Gas Dynamics: Proc. 13th Intern. Symp. Novosibirsk, 1982. N.-Y.: Plenum Press, 1985. V. 1. P. 237–244.
82. Макашев Н.К., Носик В.И. Стационарное течение Куэтта (с теплопередачей) газа максвелловских молекул // Докл. АН СССР. 1980. Т. 253. № 5. С. 1077–1081.
83. Sherman F.S., Talbot L. Experiment versus kinetic theory for rarefied gases // Rarefied Gas Dynamics. L.: Pergamon Press, 1960. P. 161–191.
84. McCoy B.J. Burnett theory of thermal transpiration in the near-continuum range // J. Chem. Phys. 1973. V. 58. № 10. P. 4712–4713.
85. Струминский В.В., Шавалиев М.Ш. Гидродинамические уравнения высших приближений метода Чепмена – Энскога // Динамика разреженного газа: Тр. 6-й Всесоюз. конф. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1980. Ч. 1. С. 86–91.
86. Montgomery J.T. Existence of weak shock wave solutions for higher-order theories of gas dynamics // Phys. Fluids. 1975. V. 18. № 2. P. 148–152.
87. Simon C.E., Foch J.D. Numerical integration of the Burnett equations for shock structure in Maxwell

- gas // *Rarefied Gas Dynamics: Amer. Inst. Aeronaut. and Astronaut. Princeton: Univ. Press, 1977. V. 1. P. 493–500.*
88. *Fisco K.A., Chapman D.R. Comparison of Burnett, super-Burnett and Monte Carlo solutions for hypersonic shock structure // Rarefied Gas Dynamics: Progr. in Astronaut. and Aeronaut. Washington: AIAA, 1989. V. 118. P. 374–395.*
 89. *Cheng H.K., Emanuel G. Perspective on hypersonic nonequilibrium flow // AIAA Journal. 1995. V. 33. № 3. P. 386–400.*
 90. *Zhong X., MacCormack R.W., Chapman D.R. Stabilization of the Burnett equations and application to hypersonic flows // AIAA Journal. 1993. V. 31. № 6. P. 1036–1043.*
 91. *Lumpkin F.E., Chapman D.R. Accuracy of the Burnett equations for hypersonic real gas flows // J. Thermophys. and Heat Transfer. 1992. V. 6. № 3. P. 419–425.*
 92. *Chou L.C., Deng Z.-T., Liaw G.-S. Comparison of shock wave structures by solving Burnett and Boltzmann equations // AIAA Paper. 1994. № 2056. 8 p.*
 93. *Salomons E., Mareschal M. Usefulness of the Burnett description of strong shock waves // Phys. Rev. Lett. 1992. V. 69. № 2. P. 269–272.*
 94. *Reese J.M., Thiele F., Woods L.C. On appropriate boundary conditions for rarefied gas shock wave calculations // Rarefied Gas Dynamics: Proc. 19th Intern. Symp. Oxford: Univ. Press, 1995. V. 1. P. 514–520.*
 95. *Imlay S.T. Solution of the Burnett equations for hypersonic flows near the continuum limit // AIAA Paper. 1992. № 2922. 10 p.*
 96. *Tannehill J.C., Eisler G.R. Numerical computation of the hypersonic leading edge problem using the Burnett equations // Phys. Fluids. 1976. V. 19, № 1. P. 9–15.*
 97. *Бузыкин О.Г., Галкин В.С., Носик В.И. Модификации уравнений Барнетта и структура ударной волны // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 3. С. 164–176.*

Москва

Поступила в редакцию
5.XII.1996