

УДК 532.517.4:532.135

© 1998 г. В.Б. АМФИЛОХИЕВ, Л.С. АРТЮШКОВ

КРИТЕРИИ ПОДОБИЯ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ РАЗБАВЛЕННЫХ РАСТВОРОВ ПОЛИМЕРОВ И ОБОБЩЕННАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТА ТРЕНИЯ

Разбавленные растворы полимеров, снижающие турбулентное трение, рассмотрены как вязкоупругие жидкости, критериями подобия для которых кроме числа Рейнольдса являются числа Деборы или упругости. Введение обобщенного (вязкоупругого) числа Рейнольдса позволило свести к единой зависимости экспериментальные кривые коэффициентов сопротивления, полученные в трубах разного диаметра при различных концентрациях.

При измерении коэффициентов турбулентного трения в трубах для течения растворов полимеров наблюдаются так называемые эффекты диаметра и концентрации [1]. Первый из них заключается в отличии коэффициентов сопротивления для раствора постоянной концентрации при течении в трубах различных диаметров, второй – в их неодинаковых значениях для разных растворов в одной и той же трубе, несмотря на равенство чисел Рейнольдса, подсчитанных по вязкости каждого раствора. Примером проявления обоих эффектов служат фиг. 1 и 2, построенные по данным опытов [2], проведенных в весьма широком диапазоне изменения параметров (5 диаметров и 7 концентраций полиэтиленоксида WSR-301, 25 вариантов их комбинаций).

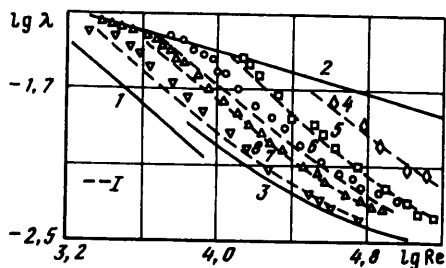
Оба явления, особенно эффект диаметра, приводят к затруднениям при пересчете результатов испытаний с условий лабораторной модели на натурные данные, когда диаметры труб значительно возрастают. Известно несколько методов такого пересчета, носящих эвристически-эмпирический характер. Наиболее удачными следует признать "метод постоянной динамической скорости" [3] и "метод параллельного переноса" [4]. Однако оба метода не являются универсальными и представляется логичным использовать для анализа турбулентных течений растворов полимеров в трубах подход, основанный на общих положениях реологии и теории подобия.

1. Поскольку полимерные растворы наряду с вязкостными свойствами проявляют свойства упругости [1], их реологическое соотношение должно соответствовать какой-либо вязкоупругой жидкости. Если использовать простейшую модель [5], то связь между напряжениями σ_{ij} и относительными скоростями деформаций $\dot{\gamma}_{ij}$ имеет вид

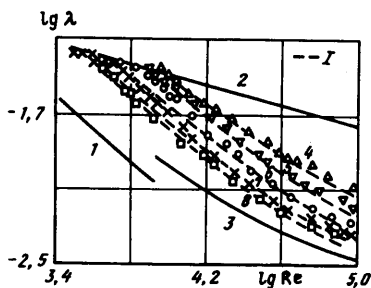
$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu_0 \dot{\gamma}_{ij} - k_0 \frac{D\dot{\gamma}_{ij}}{Dt} \quad (1.1)$$

где p – давление, δ_{ij} – символ Кронекера, μ_0 – динамическая вязкость при малых скоростях сдвига, $k_0 = \mu_0 \Theta$, Θ – характерное время раствора (время релаксации). Для получения наиболее общих зависимостей на основе теории подобия и размерностей достаточно использовать вместо D/Dt субстанциональную производную $d/dt = \partial/\partial t + v_j \partial/\partial x_j$, где $j = 1, 2, 3$, v_j – проекция скорости на ось x_j .

Приведение уравнения движения сплошной деформируемой среды (без учета



Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 1. Коэффициент сопротивления при $c = 15 \cdot 10^{-6}$ в функции от Re 1 – расчет по формуле (4.1); 1 – $\lambda = 64/Re$, 2 – $\lambda = 0,3164/Re^{1/4}$, 3 – асимптотика максимального снижения сопротивления, 4–8 – эксперимент [2]; для $L = 10,16; 5,08; 2,54; 1,905; 1,27$ см

Фиг. 2. Коэффициент сопротивления при диаметре $L = 2,54$ см в функции от Re : 1 – 1, 2 и 3 – как на фиг. 1; 4–8 – эксперимент [2]; для $c = 2 \cdot 10^{-6}, 5 \cdot 10^{-6}, 15 \cdot 10^{-6}, 25 \cdot 10^{-6}, 40 \cdot 10^{-6}$

массовых сил)

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3$$

где ρ – плотность жидкости, к безразмерному виду при использовании модели (1.1) дает

$$Sh \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -Eu \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re_0} \Delta v_i - \frac{De}{Re_0} \left[Sh \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \dot{\gamma}_{ij}}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(v_j \frac{\partial \dot{\gamma}_{ij}}{\partial x_j} \right) \right] \quad (1.2)$$

Здесь все производные обезразмерены, а критерии подобия (числа Струхаля, Эйлера, Рейнольдса и Деборы) имеют обычный вид

$$Sh = \frac{L}{VT}, \quad Eu = \frac{P}{\rho V^2}, \quad Re_0 = \frac{\rho VL}{\mu_0}, \quad De = \frac{V\Theta}{L} \quad (1.3)$$

В (1.3) прописными буквами обозначены характерные размерные величины: длина L , скорость V , давление P , время релаксации Θ , характерное время процесса T . В числе Деборы в качестве характерного времени, которое должно быть одинаковым как при неустановившемся, так и при установившемся движении, принято отношение L/V .

В некоторых случаях вместо числа Деборы удобнее использовать число упругости El , представляющее собой отношение сил упругости к силам инерции, но не содержащее скорости течения жидкости

$$El = \frac{De}{Re_0} = \frac{\mu_0 \Theta}{\rho L^2}$$

Именно этот комплексный критерий стоит перед квадратной скобкой в уравнении (1.2). Различием его численных значений для труб разных диаметров можно объяснить наличие целого семейства кривых $\lambda(Re)$, изображенных на фиг. 1 и полученных при одних и тех же значениях μ , Θ и ρ , но при разных характерных линейных размерах. С другой стороны, семейство кривых на фиг. 2 также легко объясняется различными значениями характерного времени раствора Θ для отдельных концентраций при одном и том же диаметре трубы.

2. Поиск обобщенного критерия подобия, коррелирующего характеристики турбулентного течения разбавленных растворов полимеров, можно провести по аналогии с теорией ламинарных течений вязкоупругой жидкости, где используется обобщенное число Рейнольдса, вычисляемое по кажущейся вязкости μ_a [1]

$$Re^* = \frac{\rho VL}{\mu_a}$$

Для жидкостей, проявляющих слабые вязкоупругие свойства, кажущаяся вязкость определяется выражением [6]

$$\mu_a = \frac{\mu_0}{[1 + (\Theta \dot{\gamma})^2]}$$

Отсюда

$$Re^* = Re_0 [1 + (\Theta \dot{\gamma})^2] \quad (2.1)$$

т.е. обобщенное число Рейнольдса Re^* зависит от характерного времени раствора Θ . Безразмерный комплекс $\Theta \dot{\gamma}$ есть аналог числа Деборы и при установившемся течении может быть заменен на $\Theta V/L$. В результате формула (2.1) приобретает вид

$$Re^* = Re_0 (1 + De^2) = Re_0 [1 + (El Re_0)^2] \quad (2.2)$$

Однако непосредственное использование критерия (2.2) в рассматриваемой задаче невозможно в связи с особенностями турбулентных течений растворов полимеров.

Осреднение уравнения (1.2) по Рейнольдсу дает уравнение осредненного турбулентного течения вязкоупругой жидкости [7], в котором наряду с обычными рейнольдсовыми турбулентными напряжениями $-\rho \langle v_i' v_j' \rangle$ фигурируют корреляционные моменты типа $\langle v_i' \Delta v_j' \rangle$. Полуэмпирические модели турбулентности, учитывающие такие моменты, не разработаны и их влияние можно учесть косвенно, заменив молекулярное характерное время Θ турбулентным временем релаксации Θ_T , которое может значительно отличаться от Θ и представляет собой эмпирическую константу для раствора каждой концентрации данного полимера с определенной молекулярной массой: $\Theta_T = \Theta_T(c, M)$.

Следует также отметить, что для замыкания уравнений турбулентных пристенных течений необходимо использование как минимум двух эмпирических констант. Если в качестве одной из констант использовать не молекулярное, а турбулентное время релаксации, то в выражении (2.2) можно ожидать изменения показателя степени. В результате для турбулентного течения раствора полимера следует принимать

$$Re_T^* = Re(1 + De_T^m) = Re[1 + (El_T Re)^m] \quad (2.3)$$

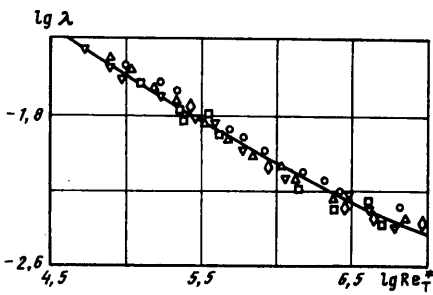
$$De_T = \frac{V \Theta_T}{L}, \quad El_T = \frac{De_T}{Re} = \frac{v \Theta_T}{L^2}, \quad Re = \frac{VL}{v}$$

где $v = \mu/\rho$ – кинематическая вязкость раствора.

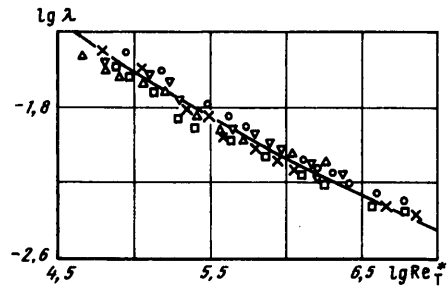
3. Что касается турбулентного времени релаксации, то для его определения можно использовать решение [8] или близкое к нему решение [9]. Оба они основаны на идее Ван-Дрифта об аналогии между законом затухания колебаний ламинарного течения вблизи плоской стенки (вторая задача Стокса [10]) и законом гашения турбулентных пульсаций у стенки. Решение второй задачи Стокса для упруговязкой жидкости позволило представить безразмерную длину пути перемешивания в виде [8]

$$l = k\eta \left[1 - \exp\left(-\frac{\alpha\eta}{A}\right) \right]$$

где $k = 0,4$ – постоянная Кармана, $A = 27$ – постоянная Ван-Дрифта, $\eta = u_* \tau_w / \nu$, y – расстояние от стенки, $u_* = \sqrt{\tau_w / \rho}$ – динамическая скорость, τ_w – касательное напряжение



Фиг. 3



Фиг. 4

Фиг. 3. Коэффициент сопротивления при $c = 15 \cdot 10^{-6}$ в функции от Re_T^* . Обозначения те же, что на фиг. 1

Фиг. 4. Коэффициент сопротивления при диаметре $L = 2,54$ см в функции от Re_T^* . Обозначения те же, что на фиг. 2

на стенке, α – функция, учитывающая упругие свойства раствора

$$\alpha = \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{2\beta}{A^2}\right)^2} - \frac{2\beta}{A^2}}, \quad \beta = \frac{\Theta_T \tau_w}{\mu} \quad (3.1)$$

Вводя обычный гидравлический коэффициент трения

$$\lambda = \frac{8\tau_w}{\rho V^2}$$

используя в качестве характерной скорости V среднерасходную скорость, а в качестве характерного линейного размера L – диаметр трубы, последнюю из формул (3.1) с учетом (2.3) можно записать в виде

$$\beta = \frac{1}{8} El_T Re^2 \lambda \quad (3.2)$$

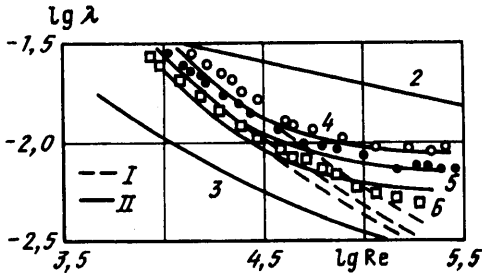
При расчете β необходимо учитывать явление предела эффективности полимерных молекул, связанное, по-видимому, с их полным разворачиванием при касательном напряжении τ_s . Таким образом, вычисляя β по формуле (3.1), следует заменить полученное численное значение β на β_s , если $\beta > \beta_s$, где

$$\beta_s = \frac{\Theta_T \tau_s}{\mu} \quad (3.3)$$

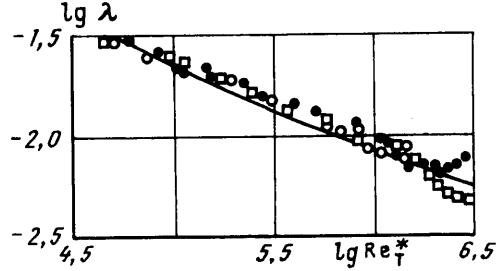
У полиэтиленоксидов типа WSR – 301 $\tau_s \approx 5$ Па и $\beta_s \approx 5 \cdot 10^3 \Theta_T$, а для Θ_T в [8] предложена формула, основанная на ранее известных экспериментальных данных

$$\Theta_T = 3,16 \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{7} cM^{0,85}\right) \right] \quad (3.4)$$

4. В экспериментах [2] молекулярная масса составляла $M = 4 \cdot 10^6$. Приведение этих опытных данных (см. фиг. 1 и 2) к координатам $\lambda = \lambda(Re_T^*)$ при подобранном показателе $m = 3/4$ в выражении для обобщенного числа Рейнольдса (2.3) с определением El_T по формуле (3.2) и с заменой, при необходимости, β на β_s представлено на фиг. 3 и 4. Наблюдается практически полная универсальность зависимости коэффициентов сопро-



Фиг. 5



Фиг. 6

Фиг. 5. Коэффициент сопротивления при диаметре $L = 2,73$ см в функции от Re *I* – расчет по формуле (4.1) без ограничения β , *II* – расчет с учетом условия $\beta \leq \beta_s$, 2 и 3 – как фиг. 1, 4–6 – эксперимент [11], для $c = 2 \cdot 10^{-6}, 5 \cdot 10^{-6}, 10 \cdot 10^{-6}$

Фиг. 6. Коэффициент сопротивления при диаметре $L = 2,73$ см в функции от Re_T^* . Обозначения те же, что на фиг. 5

тивления растворов от обобщенного числа Рейнольдса Re_T^* с исключением как эффекта диаметра, так и эффекта концентрации. Эту универсальную зависимость можно аппроксимировать формулой

$$\lambda = \frac{238,7}{(\lg Re_T^*)^{5,71}} \quad (4.1)$$

Расчет коэффициентов сопротивления по этой формуле в координатах $\lambda(Re)$ представлен на фиг. 1 и 2 кривыми *I*. Видно, что имеет место весьма хорошее соответствие расчетных и экспериментальных данных.

Следует отметить, что в опытах [2] значения τ_w были в основном меньше, чем τ_s , в результате чего формула (3.3) и значение β_s практически не использовались. Принципиальная важность ее введения демонстрируется на фиг. 5, где приведены экспериментальные данные [11] и расчет без ограничения $\beta \leq \beta_s$ (кривые *I*) и с ограничением (кривые *II*). Так как в опытах [11] использовался полиакриламид с молекулярной массой $M = 6 \cdot 10^6$, то при сохранении формулы (3.4) для Θ_T значение β_s принято несколько большим: $\beta_s = 7 \cdot 10^3 \Theta_T$. При малых Re оба варианта расчета дают совпадающие результаты, при больших Re только второй вариант (с ограничением $\beta \leq \beta_s$) согласуется с опытами. На фиг. 6 приведена зависимость коэффициента сопротивления от обобщенного числа Рейнольдса Re_T^* . Как и для фиг. 1 и 2, в этом случае также образовалась единая кривая, мало чем отличающаяся от зависимости (4.1).

Заключение. Рассматривая разбавленные полимерные растворы как слабые вязкоупругие жидкости, удалось привести к единой универсальной зависимости кривые гидравлического коэффициента трения, полученные при экспериментах в трубах разного диаметра и с различными концентрациями. Универсализующим параметром оказалось обобщенное вязкоупругое число Рейнольдса для турбулентного течения.

Авторы благодарны Морскому техническому университету Санкт-Петербурга, в рамках исследовательских программ которого выполнялась данная работа, и А.Б. Метцнеру из Делаварского университета (США) за полезное обсуждение результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Артюшков Л.С.* Динамика неньютоновских жидкостей: Учебник. Изд. 2-е, перераб. и доп. СПб.: Изд. центр СПбГМТУ, 1997. 459 с.
2. *Lowe R.J.* The turbulent shear flow of dilute polymer solutions of long chain polymers. // A Thesis Presented for the Degree of Master of Engineering at the University of Liverpool (UK). July 1969, 115 p.
3. *Savins J.G., Seyer F.A.* Drag reduction scale-up criteria // *Phys. Fluids*. 1977. V. 20. № 10. Pt2. P. S78–S84.
4. *Granville P.S.* Scaling-up of pipe-flow frictional data for drag-reducing polymer solutions // Paper 2nd Intern. Conf. on Drag Reduction, Cambridge (UK), 1977. Granfield, 1977. P. B1/1–B1/12.
5. *Walters K.* The solution of flow problems in the case of materials with memory // *J. méс.* 1962. V.1. № 4. P. 479–486.
6. *Bird R.B., Armstrong R.C., Hassager O.* Dynamics of polymeric liquids. V. 1. Fluid Mechanics. N.Y.: J. Willey, 1987. 649 p.
7. *Войткунский Я.И., Амфилохий В.Б., Павловский В.А.* Уравнение турбулентного движения вязкой жидкости при учете ее релаксационных свойств // *Гидромеханика*. Киев: Наук. думка, 1973. Вып. 23. С. 57–61.
8. *Ходорковский Я.С.* Турбулентное пристенное движение упруговязкой жидкости // *Инж-физ. журн.* 1976. Т. 30. № 1. С. 109–114.
9. *Mizushima T., Usui H., Yoshida T.* Turbulent pipe flow of dilute polymer solutions // *J. Chem. Eng. Japan*. 1974. V. 7. № 3. P. 162–167.
10. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969. 744 с.
11. *Шишов В.И.* Турбулентное течение слабых полимерных растворов при кратковременном воздействии больших сдвиговых напряжений: Дис. ... канд. техн. наук. Новосибирск, 1989. 153 с.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
18.XI.1996