МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 • 1998

УДК 533.6.011.72:531.5

© 1998 г. А.Н. ГОЛУБЯТНИКОВ

К ОБРАЗОВАНИЮ ОДНОРОДНОГО РАЗЛЕТА ГРАВИТИРУЮЩЕГО ГАЗА ПРИ НАЛИЧИИ ГРАДИЕНТА ДАВЛЕНИЯ

В рамках ньютоновской механики исследуется возможность образования однородного разлета гравитирующего газа, возникающего в результате прохождения волны детонации в свободно сжимающейся среде (пыли). Постановка задачи связана с моделированием крупномасштабного расширения Вселенной, хотя результаты могут быть использованы для расчетов последствий сферического коллапса и других газовых масс. В работе построен класс точных решений, учитывающий влияние градиента давления газа. Проведен анализ возможных изменений поведения системы по сравнению со случаем однородного давления, исследованным в [1].

Вопрос о смене предварительного сжатия на расширение Вселенной был поставлен В. де Ситтером и обсуждался Х. Альфвеном и О. Клейном, которые считали видимую часть Вселенной конечной метагалактической системой, расширяющейся в более или менее пустое пространство (см. [2]). Автомодельное решение такой задачи с полным переходом на ударной волне массы покоя пыли в излучение в рамках общей теории относительности впервые дано в [3].

В данной работе используется метод обратной задачи [4], который позволяет в случае сферической симметрии по любому известному решению в области за ударной волной найти необходимое распределение параметров коллапсирующей пыли, закон движения ударной волны и соответствующую переменную величину тепловыделения. В частности, может иметь место сосредоточенное выделение энергии типа взрыва. Тепловыделение может происходить, например, за счет возникающих при сжатии вещества термоядерных реакций или превращений элементарных частиц [2]. При образовании за ударной волной однородного движения газа при наличии градиента давления характер движения определяется двумя произвольными функциями одной переменной, связанными с уравнением состояния вещества.

1. Предполагается, что в силу гравитационной неустойчивости пыль, имеющая в момент времени $t = -\infty$ нулевые плотность и скорость, начинает сферически-симметрично сжиматься к центру, причем при $t = 0$ в центре симметрии образуется сферическая расходящаяся ударная волна, ограничивающая область однородного сферически-симметричного адиабатического движения идеального газа. Данная начальная асимптотика позволяет моделировать явление гравитационного сжатия в начале сильно рассеянной холодной массы газа.

Согласно терминологии задачи Кеплера, пыль сжимается с радиальной "параболической" скоростью. Нетрудно провести также анализ задачи с эллиптической или гиперболической скоростями сжатия пыли, имея в распоряжении еще одну произвольную функцию лагранжевой переменной [4], однако здесь соответственно необходимы либо дополнительное описание предыстории сжатия, либо физическое объяснение негравитационной фокусировки пыли к центру.

В лагранжевых переменных (m – масса шара радиуса $r(m, t)$) уравнения адиабатического сферически-симметричного движения гравитирующего газа и условия на разрыве имеют вид

$$\ddot{r}+4\pi r^2 p'+\frac{km}{r^2}=0,\quad \dot{s}=0,\quad \rho=\frac{1}{4\pi r^2 r'},\quad p=\rho^2\frac{\partial u(\rho,s,m)}{\partial\rho} \tag{1.1}$$

$$[r]_1^2=0,\quad [\dot{r}\dot{M}-4\pi r^2 p]_1^2=0,\quad [(\dot{r}^2/2+u)\dot{M}-4\pi r^2\dot{r}p]_1^2=0 \tag{1.2}$$

где точка и штрих означают производные по t и m, u – удельная внутренняя энергия, которая в принципе может учитывать неоднородность состава среды за счет явной зависимости от m, ρ – плотность, s – энтропия, p – давление, $m = M(t)$ – закон движения ударной волны, k – гравитационная постоянная. Индексами 1, 2 обозначены соответственно состояния среды до и после ударной волны. Удельное тепловыделение $Q(m)$ включено во внутреннюю энергию пыли.

Пусть в области 1 находится пыль, отвечающая состоянию холодного газа с нулевым давлением. Тогда имеют место формулы

$$\frac{\dot{r}^2}{2}-\frac{km}{r}=0,\quad r=\left(\frac{9km}{2}\right)^{1/3}(t_0(m)-t)^{2/3}$$

$$\rho=\frac{1}{6\pi k((t_0-t)^2+2mt_0'(t_0-t))} \tag{1.3}$$

Функция $t_0(m)$ характеризует время прихода частиц пыли в центр симметрии при отсутствии ударной волны, причем в области движения пыли $t_0 \geqslant t$.

Пусть в области 2 происходит однородный разлет газа $r = m^{1/3}a(t)$ [5]. Тогда в силу разделения переменных в (1.1) необходимо, чтобы

$$p=-\frac{1}{4\pi a^2}\left(m^{2/3}\frac{du_1}{da}+\frac{du_2}{da}\right),\quad \rho=\frac{3}{4\pi a^3}$$

$$u=m^{2/3}u_1(a)+u_2(a)+u_3(m) \tag{1.4}$$

где u_i – три произвольные функции указанных аргументов. При этом уравнения движения дают интеграл

$$\frac{\dot{a}^2}{2}-\frac{2}{3}u_1-\frac{k}{a}=h \tag{1.5}$$

В случае равновесия ($\dot{a}=0$) имеем алгебраическое уравнение

$$-\frac{2}{3}\frac{du_1}{da}+\frac{k}{a^2}=0 \tag{1.6}$$

Для описания космологического разлета часто вместо h используют так называемую постоянную Хаббла H, равную $\dot{a}/a$ при фиксированном значении ρ (или a) и, следовательно, u_1. Согласно современным данным [2], имеют место оценки $H \simeq 0{,}3\cdot 10^{-17}$ 1/с и $a \simeq 0{,}6\cdot 10^{10}$ см/г$^{1/3}$. Откуда определяется (в предположении $u_1 = 0$) $h \simeq 2\cdot 10^{-16}$ см^2/(с^2 · г$^{2/3}$). Однако не исключается возможность наличия во Вселенной и большей плотности ρ, создаваемой невидимой материей, а также влияния градиента давления посредством $u_1 \neq 0$, что может сделать постоянную h нулем или отрицательной.

В общем случае уравнение (1.5) интегрируется в квадратурах. В зависимости от вида функции $u_1(a)$ и значения h здесь допустимы новые режимы поведения решений, включая равновесие, периодические колебания и непрерывную смену сжатия на расширение, невозможные при $u_1 = 0$ [1]. При смене режимов, например расширения на сжатие, следует учитывать изменение знака производной $\dot{a}$.

Рассмотрим условия на разрыве (1.2). В силу соотношения $[r]_1^2 = 0$ имеем [1] $t_0' > 0$ и, следовательно, плотность пыли (1.3) в области перед ударной волной не содержит особенностей. Это обеспечивает существование решения обратной задачи о восстановлении функции $t_0(m)$, а также закона движения пыли после определения функций $a(t)$ и $M(t)$.

При расширении газа за ударной волной условие сохранения на разрыве потока количества движения (1.2) после исключения $\dot{a} > 0$ с помощью интеграла (1.5) дает линейное уравнение для определения $M^{2/3}$ от a

$$\frac{dM^{2/3}}{da} = -\frac{1}{3h + 2u_1}\left(M^{2/3}\frac{du_1}{da} + \frac{du_2}{da}\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (a/k)(h + 2u_1/3)}}\right) \tag{1.7}$$

которое интегрируется в квадратурах.

Пусть $u = u_3 + Q(m)$ – удельная внутренняя энергия пыли, часть которой Q переходит на ударной волне в тепловую и кинетическую энергию газа. Величина u_3 на разрыве по определению сохраняется и, следовательно, выпадает из рассмотрения. Ниже при вычислении энергии она полагается равной нулю. Используя условие сохранения потока энергии (1.2), имеем

$$Q = M^{2/3}u_1 + u_2 - \frac{kM^{2/3}}{a}\left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{a}{k}\right)\left(h + \frac{2u_1}{3}\right)}\right)^2 \tag{1.8}$$

При продолжении сжатия за ударной волной в уравнениях (1.7), (1.8) следует изменить знак перед корнем.

Уравнения (1.7), (1.8) допускают соотношение, которое является полным интегралом энергии, включающим отрицательную гравитационную энергию, для области 2[5]; E_* – энергия необходимого в некоторых случаях точечного взрыва

$$M^{5/3}\left(\frac{3h}{5} + u_1\right) + Mu_2 = E_* + \int_0^M Q\,dm \tag{1.9}$$

Если найдена функция $M(a)$, то далее с помощью соотношения (1.5) неявно определяется зависимость $M(t)$, а также закон движения пыли. В общем случае имеем два уравнения, связывающих четыре функции u_1, u_2, Q, M от a, две из которых могут быть заданы достаточно произвольно, однако при этом следует соблюдать почти всюду выполнение термодинамических неравенств

$$p > 0,\quad \partial p/\partial\rho > 0,\quad \partial^2 p/\partial(1/\rho)^2 > 0$$

В силу явного отсутствия энтропии в формуле (1.4) не накладываются специальные ограничения на температуру $T = \partial u/\partial s$. Например, можно считать u линейной функцией от T при фиксированных ρ и m.

2. Специальный случай представляет собой формирование равновесия газа. В этом случае условия на разрыве (1.2) дают соотношения

$$\frac{dM^{2/3}}{dt} = -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2a}{k}}\left(M^{2/3}\frac{du_1}{da} + \frac{du_2}{da}\right)$$

$$Q = M^{2/3}(u_1 - k/a) + u_2, \quad E_* = 0$$

где постоянная a определяется уравнением (1.6). Интеграл энергии имеет вид

$$\frac{3}{5}\left(u_1 - \frac{k}{a}\right)M^{5/3} + u_2 M = \int_0^M Q\,dm$$

Интегрируя уравнение для $M(t)$ при условии $M(0) = 0$, получим

$$M^{2/3} = -\frac{2a}{3k}\frac{du_2}{da}\left(1 - \exp\left(-t\sqrt{\frac{k}{2a^3}}\right)\right) \tag{2.1}$$

Здесь для существования ненулевого решения всегда должны выполняться неравенства $du_1/da > 0$ и $du_2/da < 0$. Полная масса M_∞ конечна и определяется пределом (2.1) при $t \to \infty$. Полная энергия также конечна.

В частности, опуская $u_3(m)$, рассмотрим уравнение состояния совершенного газа вида

$$u = f(m)a^{-3(\gamma-1)} = (A_1 m^{2/3} + A_2)a^{-3(\gamma-1)} \tag{2.2}$$

где функция $f \geqslant 0$ связана, например, с распределением энтропии; A_1, A_2 и показатель адиабаты $\gamma > 1$ постоянны.

При $\gamma \neq 4/3$ из уравнения (1.6) получим $a = (2(1-\gamma)A_1/k)^{1/(3\gamma-4)}$, причем необходимо выполнение неравенств $A_1 < 0$, $A_2 > 0$. При $\gamma = 4/3$ должно выполняться равенство $A_1 = -3k/2$, a – произвольная постоянная.

Вычисляя полные массу и энергию, найдем

$$M_\infty = (-A_2/A_1)^{3/2}, \qquad E_\infty = 2/5(3\gamma - 4)A_1 a^{-3(\gamma-1)} M_\infty^{5/2}$$

Выделение энергии со временем монотонно убывает

$$Q = A_2 a^{-3(\gamma-1)}\left(2(1-\gamma) + (2\gamma - 1)\exp\left(-t\sqrt{k/(2a^3)}\right)\right)$$

что показывает, что вначале энергия выделяется, а затем поглощается. Полная энергия всей системы, включая гравитационную, в зависимости от γ может быть как положительной, так и отрицательной.

Исследуем теперь образование однородного движения, используя уравнение состояния совершенного газа (2.2), где всегда $A_2 \geqslant 0$ и $A_1 \neq 0$ (случай $A_1 = 0$ разобран в [1]), причем при $A_2 = 0$ $A_1 > 0$. Знак A_1 соответствует знаку радиальной производной давления. Уравнение (1.7) допускает разделение переменных

$$\frac{dM^{2/3}}{da} = \frac{\alpha(M^{2/3} + A_2/A_1)}{a(3a^\alpha h/A_1 + 2)}\left(1 \mp \frac{1}{\sqrt{1 + (a/k)(h + 2a^{-\alpha}A_1/3)}}\right) \tag{2.3}$$

где $\alpha = 3(\gamma - 1)$, верхний знак отвечает разлету ($dM/da > 0$), нижний – сжатию ($dM/da < 0$).

Особенности уравнения (2.3) имеют следующий смысл. Обращение в нуль подкоренного выражения в правой части (2.3) означает достижение максимального значения функции $a(t)$. При дальнейшем движении газа может происходить смена режимов разлета или сжатия, масса $M(t)$ продолжает расти. В частности, возможны колебания $a(t)$ с периодической сменой сжатия и расширения. Случай, когда $M^{2/3}$ становится равным $-A_2/A_1$, означает обращение в нуль скачка давления, что может отвечать, например, "мягкому" (без волн разрежения) выходу детонационной волны на возможную внешнюю границу сжимающегося пылевого облака. Прохождение решения через корень выражения $3a^\alpha h/A_1 + 2$ (что допустимо, если $h/A_1 < 0$) при расширении газа за ударной волной может осуществляться с помощью аналитического продолжения, при сжатии это соответствует непрерывности скорости на разрыве ("замораживание" разрыва).

Рассмотрим следующие возможности. Пусть $A_2 > 0$. Тогда решение уравнения (2.3) не существует в следующих случаях: либо начальное значение $a(0) \equiv a_* = 0$ и $\gamma \geqslant 4/3$, либо когда подкоренное выражение при $a = a_*$ отрицательно или обращается в нуль вместе со своей производной по a. Последний случай возможен только при отрицательных значениях A_1, h и $\gamma > 4/3$, когда подкоренное выражение достигает нулевого максимума, что отвечает формированию равновесия, рассмотренному выше. При всех других значениях параметров решение, отвечающее тому или иному режиму движения, существует, причем при $a_* > 0$ без сосредоточенного выделения энергии E_* (1.9). Если $a_* = 0$ (начальный разлет), то при $\gamma < 6/5$ также $E_* = 0$, при $\gamma = 6/5$ $E_* = A_2^{5/2}(4k)^{-3/2}$, при $6/5 < \gamma < 4/3$ начальное выделение энергии бесконечно.

При $A_2 = 0$ решение качественно меняется. Ненулевое решение уравнения (2.3) с начальным условием $M(a_*) = 0$ существует только при $\gamma \geqslant 4/3$ и $a_* = 0$. При этом решение содержит мультипликативную произвольную постоянную, которая не определяется начальным условием и должна быть задана дополнительно. В результате для любого заданного значения $a > 0$, при котором существует правая часть уравнения (2.3), и при прочих фиксированных параметрах можно получить в данный момент в области за ударной волной при подходящем тепловыделении $Q(a)$ любое значение массы M. При этом, однако, $Q(a) \to \infty$, когда $a \to 0+$. Точечное выделение энергии возможно только при $\gamma = 4/3$ (см. ниже).

Начальное сжатие может осуществляться только при $A_2 > 0$, $a_* > 0$ и $2A_1 + 3ha_*^\alpha < 0$.

С точки зрения физики тепловыделения максимальное значение величины Q имеет порядок 10^{21} см^2/с^2, что достигается при полной аннигиляции вещества; при термоядерных реакциях – $10^{18} - 10^{19}$ см^2/с^2 (при $a \sim 10^{-2} - 10^{-1}$ см/г$^{1/3}$) [6]. Однако при моделировании крупномасштабных явлений локальное превышение Q указанных величин или даже сосредоточенное выделение энергии могут быть вполне допустимы [5].

3. В качестве примеров рассмотрим некоторые случаи интегрирования уравнения (2.3) в элементарных функциях. Пусть имеет место параболическое движение газа за ударной волной с $h = 0$, причем $\gamma \neq 4/3$ (или $\alpha \neq 1$). Тогда имеем

$$A_2 > 0, \quad M^{2/3} = (A_2 / A_1)(CF_\pm(a) - 1); \quad A_2 = 0, \quad M^{2/3} = CF_+(a)$$

$$F_\pm(a) = \left(1 \pm \sqrt{1 + Ba^{1-\alpha}}\right)^{\alpha/(1-\alpha)}, \quad B = 2A_1/(3k) \tag{3.1}$$

где C – произвольная постоянная, верхний знак соответствует разлету.

Здесь возможны следующие режимы. При $A_2 = 0$ – только разлет, $a_* = 0$ и $\alpha > 1$. Полные масса и энергия

$$M_\infty^{2/3} = 2^{\alpha/(1-\alpha)}C, \quad E_\infty = 0$$

Пусть $A_2 > 0$. При $A_1 < 0$ за ударной волной возможно продолжение сжатия среды. Если $\alpha < 1$, $a \leqslant a_* \leqslant |B|^{1/(\alpha-1)}$, имеет место сжатие в точку ($a = 0$) за конечное время с момента образования детонационной волны. Полные масса и энергия

$$M_0^{2/3} = \frac{A_2}{|A_1|}, \quad E_0 = \frac{A_2^{5/2}}{3k|A_1|^{1/2} F_-(a_*)} \tag{3.2}$$

Если $\alpha > 1$, $a_* \geqslant a \geqslant |B|^{1/(\alpha-1)}$, сжатие идет до нижнего предела величины a, что отвечает массе $M^{2/3} = (1 - 1/F_-(a_*))A_2/|A_1|$, далее происходит полный разлет. Полные масса и энергия

$$M_\infty^{2/3} = L_-, \quad E_\infty = 0, \quad L_\pm = (1 - 2^{\alpha/(1-\alpha)}/F_\pm(a_*))A_2/|A_1|$$

Пусть теперь вначале за ударной волной возникает разлет газа. В случае $A_1 > 0$ – чистый разлет. При $\alpha > 1$ полные масса и энергия

$$M_\infty^{2/3} = -L_+, \quad E_\infty = 0$$

При $\alpha < 1$ полные масса и энергия бесконечны. При $a_* = 0$ и $6/5 \leqslant \gamma < 4/3$ имеется сосредоточенное выделение энергии.

Когда $A_1 < 0$, при $\alpha > 1$ – также чистый разлет, $a \geqslant a_* \geqslant |B|^{1/(\alpha-1)}$, полные масса и энергия

$$M_\infty^{2/3} = L_+, \quad E_\infty = 0$$

Если $\alpha < 1$, начальный разлет газа в диапазоне $0 \leqslant a_* \leqslant a \leqslant |B|^{1/(\alpha-1)}$, сменяется при $M^{2/3} = (1 - 1/F_+(a_*))A_2/|A_1|$ на сжатие до нуля, полные масса и энергия определяются формулами (3.2) с заменой $F_-(a_*)$ на $F_+(a_*)$. При $a_* = 0$, как и выше, возможно сосредоточенное выделение энергии.

Пусть теперь $\gamma = 4/3 (\alpha = 1)$, h – любое, тогда вместо (3.1) получим аналогичные формулы для $M^{2/3}$

$$B > -1, \quad h \neq 0, \quad F_\pm = \frac{a^\beta\left(\sqrt{1+B+\theta} \pm \sqrt{1+B}\right)^{1-2\beta}}{\sqrt{1+B+\theta} \pm 1}$$

$$B > -1, \quad h = 0, \quad F_+ = a^\beta, \quad F_- = a^{1-\beta}$$

$$B = -1, \quad F_\pm = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\theta} \pm 1} \exp\left(\pm \frac{1}{\sqrt{\theta}}\right)$$

$$B < -1, \quad F_\pm = \frac{\sqrt{a}}{1+B+\theta \pm 1} \exp\left(\frac{\pm 1}{\sqrt{|1+B|}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1+B+\theta}}{\sqrt{|1+B|}}\right)$$

$$\theta = ah/k, \quad \beta = 1/2\left(1 - (1+B)^{-1/2}\right)$$

При $B \leqslant -1$ всегда $h > 0$. Случай с $A_2 = 0$ реализуется только при $B > 0$.

Здесь возможны следующие режимы. Пусть $B > 0$, тогда при $h \geqslant 0$ только полный разлет до $a = \infty$, при $h < 0$ – разлет ($|\theta| < 1 + B$) либо сжатие ($B < |\theta| < 1 + B$).

Когда $-1 < B < 0$, при $h > 0$ – полный разлет либо сжатие ($0 < \theta < |B|$), при $h < 0$ – разлет либо сжатие с одинаковыми пределами $0 < |\theta| < 1 + B$, при $h = 0$ – полный разлет либо сжатие от любого a_* до $a = 0$.

Если $B \leqslant -1 (h > 0)$, то имеют место разлет ($\theta > |B| - 1$) либо сжатие ($|B| - 1 < \theta < |B|$).

В силу уравнений движения (1.1) $\ddot{a} = -k(1+B)/a^2$, т.е. при $B > -1$, происходят торможение при расширении и ускорение при сжатии, при $B < -1$ – соответственно наоборот, в случае $B = -1$ движение равномерно. Таким образом, непрерывный переход сжатия в разлет возможен только при $B < -1$.

Случай $B = -1$ отвечает $a = a_* \pm \sqrt{2ht}$, $a_* > 0$, т.е. либо полному сжатию, либо полному разлету. В случае, например, разлета полные масса и энергия положительны и конечны.

В частности, рассмотрим случай $h = 0$ и $A_2 = 0$ ($A_1 > 0$). Тогда $M^{2/3} = Ca^\beta$ (полный разлет, $a_* = 0$) и вычисление необходимого выделения энергии (1.8) дает функцию

$$Q = Ca^{\beta-1}\left(A_1/3 - 2k(1+\sqrt{1+B})\right)$$

Сходимость интеграла энергии (1.9) при $a \to 0$ приводит к условию $A_1 \geqslant 36k$. В случае $A_1 = 36k$ имеем автомодельное решение о сильном взрыве [4] с $E_* = 36kC^{5/3}$ и $Q = 0$. В других случаях точечного выделения энергии нет. При $A_1 > 36k$ функция $Q(a)$ положительна и монотонно убывает, полные энергия и масса бесконечны.

Приведем решение задачи о сильном точечном взрыве ($a_* = 0$) при заданных $Q = 0$, $u_2 = 0$ и достаточно произвольном h, определяя подходящую функцию $u_1(a)$ с учетом термодинамических неравенств. Тогда решение (1.7) дает

$$u_1 = 3h + \frac{18k}{a}\left(1+\sqrt{1+\frac{\theta}{3}}\right), \quad h \geqslant 0$$

Случай $h = 0$ рассмотрен выше ($\gamma = 4/3$). При $h > 0$ эффективный показатель адиабаты $(\rho/p)\,\partial p/\partial\rho$ монотонно уменьшается по мере расширения от $4/3$ до $7/6$. Зависимость $M(a)$ определяется решением уравнения (1.9). Полная масса конечна и равна $(5/18\, E_* / h)^{3/5}$, E_* – энергия взрыва.

Заключение. Исследованы необходимые условия образования в результате гравитационного коллапса сферически-симметричного однородного адиабатического движения газа при наличии градиента давления. Задача сведена к решению линейного уравнения первого порядка для закона движения детонационной волны, которое интегрируется в квадратурах при любом уравнении состояния образующегося вещества. Подробно исследован случай совершенного газа, который допускает дополнительное разделение переменных. Показано, что при этом возможно образование новых режимов, невозможных при отсутствии градиента давления: равновесия, периодических колебаний и непрерывного перехода образующегося в начале сжатия газа в разлет. В качестве примеров, когда решение может быть выражено в элементарных функциях, рассмотрены случаи формирования движения совершенного газа с параболической скоростью и, в общем случае, с показателем адиабаты $\gamma = 4/3$. Определено уравнение состояния газа, необходимое для образования разлета в результате точечного взрыва.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 97-01-00196).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Голубятников А.Н.* К образованию однородного разлета гравитирующего газа // Изв. РАН. МЖГ. 1997. № 6. С. 158–163.
2. *Пиблс П.* Физическая космология. М.: Мир, 1975. 310 с.
3. *Cahill M.E., Taub A.H.* Spherically symmetric similarity solutions of the Einstein field equations for a perfect fluid // Communs. Math. Phys. 1971. V. 21. № 1. P. 1–40.
4. *Голубятников А.Н.* О сферически-симметричном движении гравитирующего газа при наличии сильной ударной волны // Докл. АН СССР. 1976. Т. 227. № 5. С. 1067–1070.
5. *Седов Л.И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1965. 386 с.
6. *Мартынов Д.Я.* Курс общей астрофизики. М.: Наука, 1979. 640 с.

Москва

Поступила в редакцию
24.I.1997