

УДК 533.6.011.72:519.635

© 1998 г. Е.И. ВАСИЛЬЕВ

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ НЕКОТОРЫХ АВТОМОДЕЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА С УДАРНЫМИ ВОЛНАМИ

Представлены результаты численного моделирования трех задач о течении идеального газа с ударными волнами, допускающих автомодельные решения: двойное маховское отражение ударной волны от клина, распад комбинированного разрыва на кромке прямого угла и истечение сверхзвуковой струи из расширяющейся щели. Показано, что при определенных значениях исходных данных автомодельное течение становится неустойчивым, т.е. вместо него формируется пульсирующее во времени течение. Обсуждаются причины и механизм возникающих пульсаций.

Двумерные задачи распространения ударных волн, допускающие автомодельные решения, привлекают внимание исследователей как для тестирования численных методов [1, 2], так и тем, что являются элементами более сложных газодинамических течений. К подобным задачам относятся известные задачи о дифракции ударной волны на прямом угле и об отражении ударной волны от клина. Однако расчеты, представленные в [1, 3], демонстрируют нарушение автомодельности течения в задаче дифракции для слабых ударных волн, которое связано с развитием неустойчивости Кельвина – Гельмгольца на линии срыва (тангенциальный разрыв), исходящей от кромки угла, и в области вихря. Указанный эффект наблюдается лишь на достаточно мелкой расчетной сетке (порядка 300×300 ячеек и более в области линии срыва и вихря).

Достаточно сильный тангенциальный разрыв может присутствовать при маховском отражении ударных волн от клина. Причем в случае двойного маховского отражения он завернут в след за стеблем Маха, образуя у поверхности клина узкую струйку газа с вихрем на конце. Работы о возникновении и развитии неустойчивостей в этой структуре в настоящий момент отсутствуют.

Неустойчивость автомодельного течения обнаружена также в задаче об истечении сверхзвуковой струи газа из одного полупространства в другое через щель, размер которой увеличивается с постоянной скоростью [4]. При определенных исходных данных вместо автомодельного формируется пульсирующее течение с постоянным периодом в логарифмической шкале времени. Характер и механизм пульсаций имеют некоторое сходство с пульсациями, возникающими при сверхзвуковом обтекании сферы со струей, направленной навстречу потоку [5].

В данной работе по результатам численного моделирования обсуждаются эффекты неустойчивости автомодельных течений в упомянутых выше задачах.

1. Двойное маховское отражение. Рассматривается двумерное нестационарное течение идеального совершенного газа с постоянными теплоемкостями, возникающее при отражении плоской ударной волны от бесконечного клина с углом полураствора φ (фиг. 1, *a*).

Дифференциальные уравнения газовой динамики, описывающие двумерное неста-

ационарное течение невязкого и нетеплопроводного совершенного газа, имеют вид

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F}(\mathbf{a}) + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{G}(\mathbf{a}) = 0 \quad (1.1)$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ \rho uv \\ (e + p)u \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ p + \rho v^2 \\ (e + p)v \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

$$e = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{\rho(u^2 + v^2)}{2}$$

Здесь x – координата вдоль поверхности клина, y – ортогональная к x координата, ρ и p – плотность и давление, u и v – компоненты скорости вдоль осей x и y соответственно, e – полная энергия единицы объема, показатель адиабаты $\gamma = 1,4$.

С учетом того что в области течения имеются разрывы, под искомым решением подразумевается слабое решение, удовлетворяющее (1) в интегральном смысле.

Численное решение задачи проводилось монотонным методом второго порядка точности по пространству и времени [6, 7], который представляет собой одну из модификаций (W -модификация) метода Годунова [8].

Расчеты выполнялись на криволинейной подвижной сетке, границы которой изображены на фиг. 1, а. Точка B перемещалась таким образом, чтобы она всегда находилась на пересечении фронта падающей ударной волны и фиксированного луча OB . Подвижная граница BC параллельна неподвижной поверхности клина OA , граница OC перпендикулярна фронту падающей волны, граница BA в начальный момент была перпендикулярна OA . В процессе расчета к подвижной границе BA применялся алгоритм выделения ударной волны [9] и с течением времени она сливалась с фронтом падающей волны и стебля Маха. При движении падающего скачка расчетная область остается подобной самой себе, причем ее размеры линейно увеличиваются со временем.

В качестве граничных условий на OC и OA задавались условия непротекания, на BA и BC задавались параметры перед и за фронтом падающей ударной волны соответственно. Реализация граничных условий осуществлялась введением дополнительных рядов внешних приграничных ячеек. В качестве начальных параметров во всей расчетной области задавались параметры газа за фронтом падающего скачка.

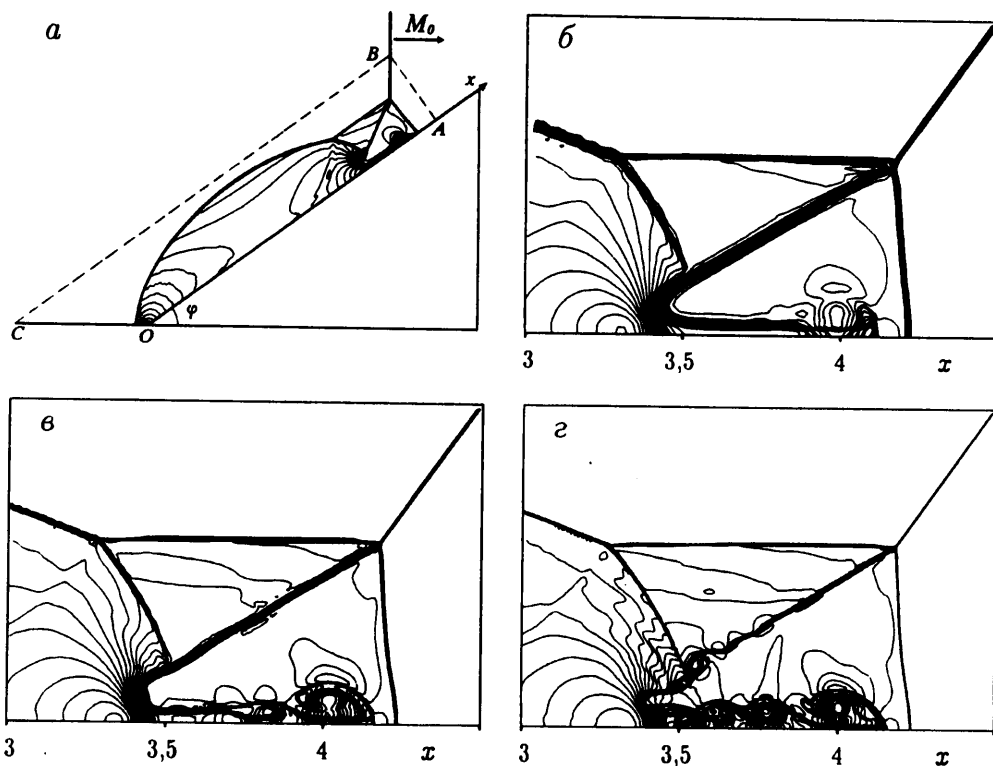
Структура расчетной области подразумевает, что в начальный момент времени фронт падающего скачка находится правее вершины клина, а положение точки B подбирается таким образом, чтобы отраженная от поверхности клина волна не смогла догнать границу BC .

Расчеты проводились для числа Маха падающей волны $M_0 = 4,5$ и угла клина $\varphi = 36^\circ$. На фиг. 1, б–г изображены изолинии поля плотности сформировавшегося течения в окрестности стебля Маха, полученные на различных расчетных сетках. Изолинии нанесены с шагом, равным 25% плотности газа перед падающей ударной волной. При выводе результатов осуществлялась нормировка координат x, y по высоте расчетной области.

Наибольшие различия в результатах на различных сетках наблюдаются в поведении струйки и тангенциального разрыва, исходящего из тройной точки на фронте падающего скачка.

На грубой сетке формируется автомодельное течение, т.е. стационарное в подвижной системе координат, связанной с сеткой. Тангенциальный разрыв и граница струйки стабильны, на конце струйки хорошо виден замыкающий вихрь (фиг. 1, б).

На средней сетке наблюдается неустойчивость Кельвина – Гельмгольца на границе струйки, что приводит к периодическому возникновению вихревых образований внутри



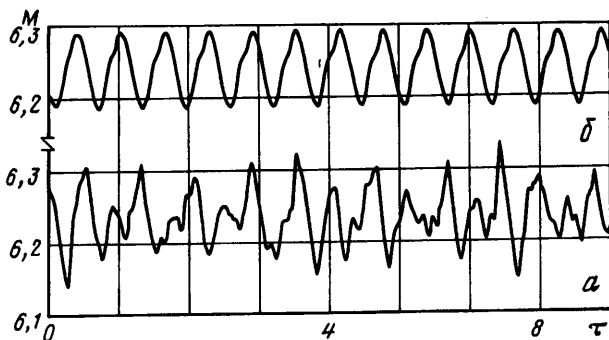
Фиг. 1. Двойное маховское отражение ударной волны от клина для $M_0 = 4,5$ и $\varphi = 36^\circ$. Изолинии плотности для всего поля течения (а) и для окрестности стебля Маха на различных расчетных сетках: б – 200×50 , в – 400×100 , з – 800×200

струи (фиг. 1, в). Вихревые образования возникают в начале струйки, затем с течением времени растут в размерах, сносятся вниз по потоку и в конце вливаются в замыкающий вихрь. На тангенциальном разрыве неустойчивость не проявляется, хотя видны небольшие плавные возмущения, вызываемые пульсациями течения в струйке.

На самой мелкой сетке интенсивность вихрей в струйке значительно выше, причем в дополнение к неустойчивости струйки отчетливо наблюдается неустойчивость тангенциального разрыва (фиг. 1, з). Анализ динамики развития возмущений во времени показывает, что неустойчивость тангенциального разрыва вызывается возмущениями от вихрей, распространяющихся по струйке, и колебаниями давления в замыкающем вихре, когда в него вливаются входящие вихри, т.е. неустойчивость тангенциального разрыва является вторичным (наведенным) эффектом по отношению к неустойчивости в струйке.

Неоднородности в струйке приводят к пульсациям расхода массы газа, поступающего в замыкающий вихрь, вызывая тем самым колебания давления как в самом вихре, так и непосредственно за фронтом стебля Маха. На фиг. 2 представлены зависимости числа Маха осевой части стебля как функции логарифмического времени: каждая единица времени τ соответствует удвоению размеров структуры течения. Представлены результаты для сформировавшегося течения на средней 400×100 (фиг. 2, а) и на мелкой сетке 800×200 (фиг. 2, б).

На сетке 400×100 , когда расчет фиксирует неустойчивость только в струйке, наблюдаются почти периодические пульсации интенсивности стебля Маха. На более мелкой сетке неустойчивость распространяется на тангенциальный разрыв и пе-



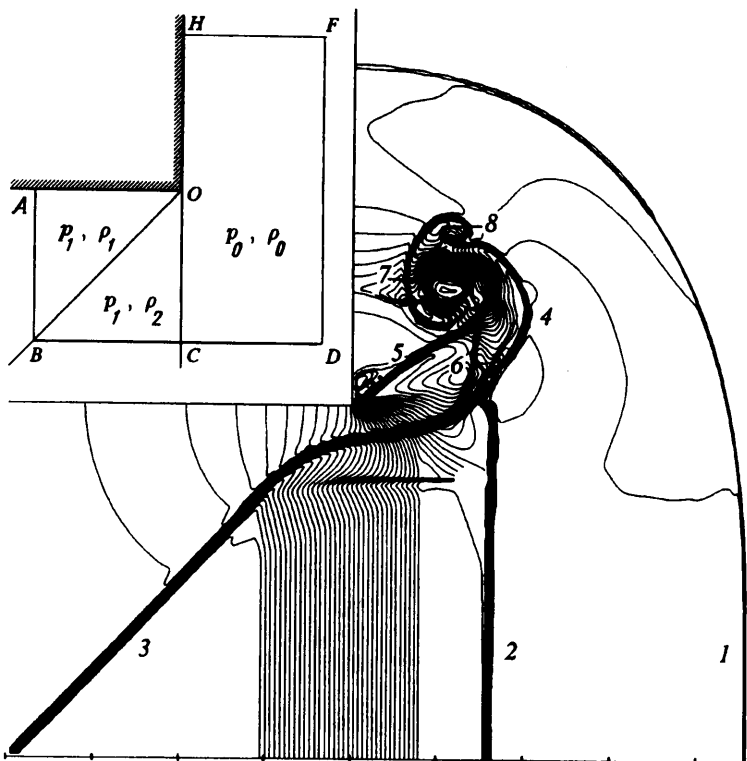
Фиг. 2. Временные зависимости числа Маха стебля для различных расчетных сеток: а – 400×100 , б – 800×200

риодичность пульсаций во времени нарушается. Последнее связано с тем, что периодичность образования вихрей в начале струйки из-за собственной неустойчивости и периодичность приходящих в струйку вихрей от тангенциального разрыва не совпадают. Близость амплитуд пульсаций на средней и более мелких сетках говорит о том, что при дальнейшем измельчении сетки качественных изменений в течении не будет. Диапазон пульсаций интенсивности стебля Маха в данном случае невелик и по избыточному давлению не превышает 8%. Частота пульсаций увеличивается с измельчением сетки. Для сетки 400×100 период одной пульсации равен 0,625, что соответствует физическому времени, за которое все размеры возмущенного течения увеличиваются в $2^{0,625}$ раза, т.е. более чем в 1,5 раза. На мелких сетках частота наиболее крупных пульсаций имеет такой же порядок.

Приведенные результаты демонстрируют сильную чувствительность характерного времени развития неустойчивости Кельвина – Гельмгольца на тангенциальном разрыве от масштаба сетки. Влияние схемной вязкости приводит к тому, что на грубой сетке за время перемещения частиц газа вдоль тангенциального разрыва вихревые образования на разрыве не успевают сформироваться.

Выделение ударных волн и подвижность расчетной сетки позволяют исследовать режим течения на достаточно длительном промежутке времени. Так, весь временной интервал $0 < \tau < 10$ на фиг. 2 соответствует увеличению размеров возмущенного течения в 2^{10} раз, т.е. более чем в 1000 раз. Ясно, что реализовать такой расчет на сетках с неподвижными границами очень сложно. Другим недостатком расчетов на неподвижных сетках является неравномерное распределение погрешности решения внутри расчетной области. Несмотря на то что в расчетах на неподвижной сетке количество ячеек в области возмущенного течения непрерывно и равномерно увеличивается, вычислительная ошибка уменьшается неравномерно по пространству. Причина заключается в том, что время перемещения частиц газа от тройной точки вдоль тангенциального разрыва и далее вдоль струйки в замыкающий вихрь относительно велико и соответствует времени увеличения размеров возмущенной области более чем в 3 раза. И если даже в какой-то момент времени переключиться на абсолютно точный гипотетический метод, то существующие до этого ошибки в энтропии на тангенциальном разрыве и в струйке исчезнут лишь после того, как частицы, переносящие их, будут снесены в замыкающий вихрь, т.е. через время, за которое размеры волновой конфигурации увеличатся в 3 раза.

Таким образом, ошибка расчета струйки уменьшается со значительным запаздыванием по сравнению с другими деталями течения, т.е. струйка формируется с отставанием по времени. Так, на фиг. 1, а приведен результат расчета на сетке с неподвижными границами по методике, аналогичной работе [2], на сетке 400×100 с использованием сгущения ячеек к поверхности клина и к боковым границам области. В этом варианте из-за отставания в формировании струйки возбуждение колебаний в ней к концу расчета не наблюдалось. Для выравнивания ошибки необходимо увеличить время расчета при сохранении количества ячеек, что возможно сделать на подвижных либо адаптивных сетках.



Фиг. 3. Начальные условия и изолинии плотности течения при распаде комбинированного разрыва: 1 – первичная ударная волна, 2, 3, 4 – контактные поверхности, 5 – граница сверхзвуковой струи, 6 – вторичный скачок, 7, 8 – вихревые образования

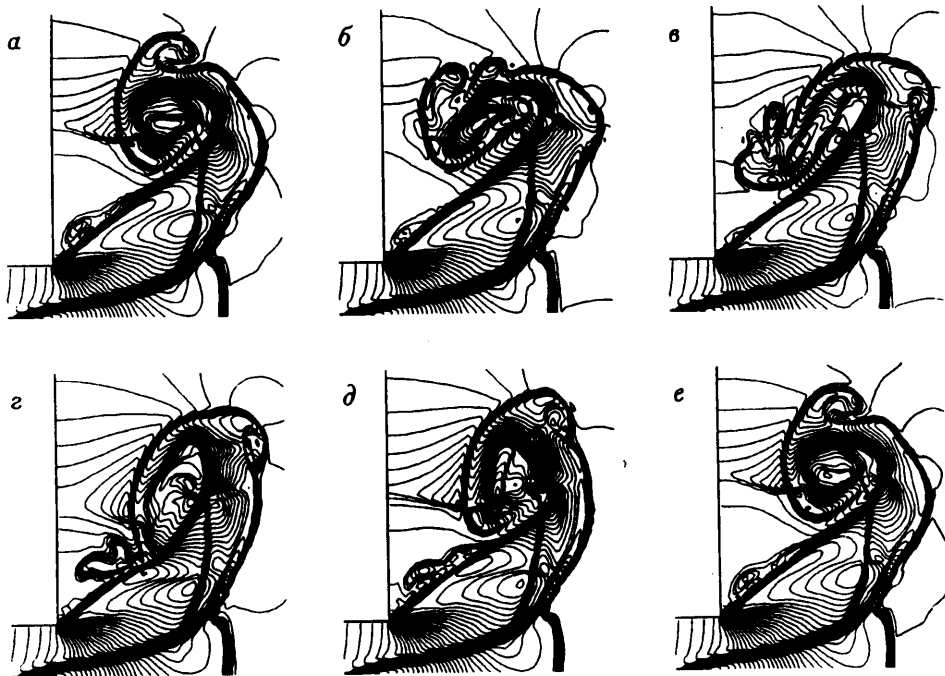
2. Распад комбинированного разрыва. Рассматривается нестационарное течение идеального совершенного газа, возникающее при распаде системы двух плоских разрывов, пересекающихся в вершине двугранного угла с раствором 90° . Начальная конфигурация расположения разрывов изображена в левой верхней части фиг. 3. На луче OC , который отделяет правую полуплоскость с пониженным давлением от остальной области, имеется скачок как давления, так и плотности, в то время как луч OB , разделяющий левый нижний квадрант на два сектора, представляет собой контактную поверхность. В момент $t = 0$ во всем пространстве газ покоится.

Уравнения движения при $t > 0$, а также метод численного решения совпадают с теми, что использовались в предыдущей задаче.

Начальное положение границ расчетной области $OABDFH$ изображено на фиг. 3. Скорости перемещения прямолинейных подвижных границ AB , BD и HF были пропорциональны расстоянию до вершины угла O с коэффициентом, который подбирался таким образом, чтобы возмущения от вершины угла не смогли догнать эти границы. К границе DF применялся алгоритм [9], в результате чего происходило выделение лобовой части ударной волны.

В качестве граничных условий на OA и OH задавались условия непротекания, на AB , BD , DF и FH сохранялись постоянными начальные значения параметров.

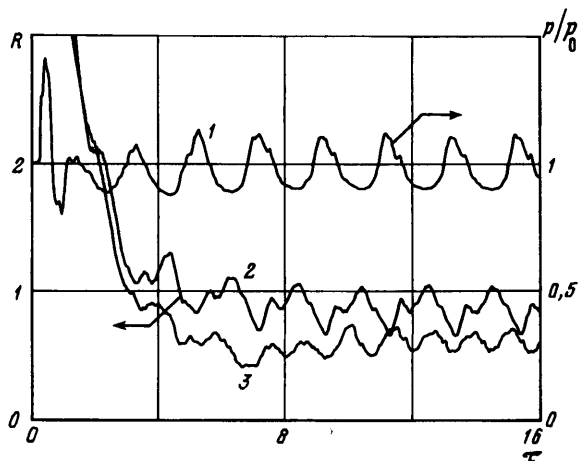
Расчеты проводились для случая, когда ниже контактной поверхности, расположенной под углом 45° к стенке, находится значительно более плотный газ. Были исполь-



Фиг. 4. Периодические колебания вихревой структуры при распаде комбинированного разрыва. Последовательные кадры для одного периода

зованы следующие значения исходных данных: $p_1/p_0 = \rho_1/\rho_0 = 20$, $\rho_2/\rho_1 = 10$. На фиг. 3 изображены изолинии плотности сформировавшегося расчетного течения с указанием основных отдельных элементов. При распаде разрыва OC формируется первичная ударная волна (1), в след за которой смещается сектор более плотного газа, ограниченный контактными поверхностями (2 и 3). Вершина сектора деформируется, открывая щель для истечения менее плотного газа. На выходе из щели формируется сверхзвуковая струя. Отчетливо видны граница струи (5), вторичный скачок торможения в струе (6) и контактная поверхность (4), отделяющая истекающий газ от газа за первичной ударной волной. Контактная поверхность сворачивается в достаточно крупный вихрь (7), расположенный над струей, вращение газа в котором происходит против часовой стрелки. Над основным вихрем виден малый вихрь (8), закрученный в противоположную сторону.

Примечательно в данном случае то, что вместо ожидаемого автомодельного течения формируется периодически колеблющееся течение в области основного вихря струи. На фиг. 4 представлено шесть последовательных кадров (а-е) развития течения в этой области за время одного периода в автомодельных координатах. Малый вихрь отделяется от основного и сносится в направлении вершины прямого угла (кадры а-г). В действительности в физических координатах (x, y) все размеры увеличиваются со временем и отделившийся вихрь просто отстает от основного, от которого он оторвался. Оторвавшаяся масса газа взаимодействует с границей струи, деформирует ее и вносит возмущения внутрь струи (в-д). Последнее приводит к усилению бокового всячего скачка сжатия внутри струи, что хорошо видно по сгущениям изолиний на кадрах г и д. Боковой скачок изменяет направление поля скорости в струе и приводит к небольшому выпячиванию правой части контактной поверхности в горизонтальном направлении (кадры д, е). Дальнейшее развитие этого возмущения можно проследить по кадрам б-е, так как кадры а и е соответствуют одной и той же фазе периода. За



Фиг. 5. Расчетные временные зависимости давления на границе струи (1) и невязки установления (2, 3) при формировании течения в задаче о распаде комбинированного разрыва

время следующего периода возмущение на контактной поверхности приводит к формированию малого вихря над основным вихрем (кадр *e*). В описанном механизме колебаний одновременно участвуют два малых вихря в противоположных фазах. Так, на кадре *z* видно, что в момент отрыва одного завершается формирование другого на противоположной стороне основного вихря.

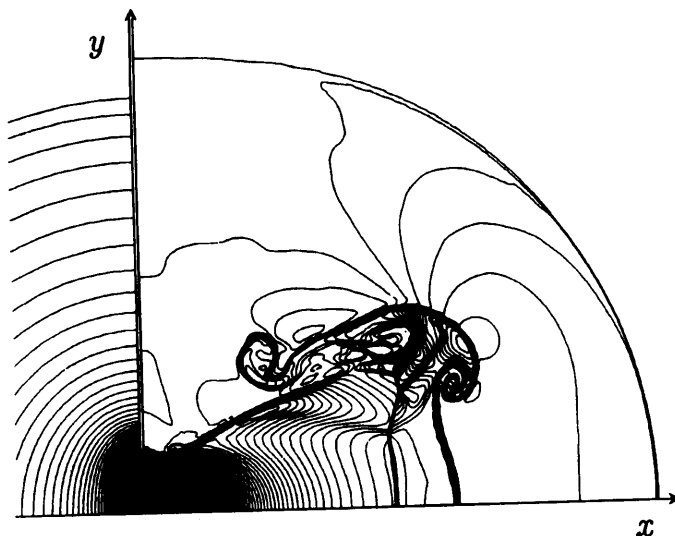
Зависимость давления в одной из точек над границей струи от логарифмического времени представлена на фиг. 5 (кривая 1). Видно, что промежуток формирования численного решения составляет приблизительно четыре единицы времени, что соответствует увеличению размеров расчетной области в 16 раз, после чего формируются довольно строгие периодические пульсации с амплитудой колебания около 20% по отношению к минимуму. Каждая пульсация осуществляется приблизительно за время четырехкратного увеличения размеров структуры течения.

Центрированная в вершине угла волна разрежения отражается от границы контакта с более тяжелым газом и вызывает перерасширение потока в струе. Благодаря этому перерасширению в струе и формируется висячий боковой скачок, играющий ключевую роль в описанном механизме колебаний. При уменьшении начального перепада плотностей ρ_2/ρ_1 на контактном разрыве интенсивности отраженной волны разрежения и висячего скачка уменьшаются и, как следствие, уменьшается интенсивность колебаний течения. При перепаде $\rho_2/\rho_1 < 4$ формируется практически автомодельное течение.

Степень отличия численного решения от автомодельного оценивалась по дискретному аналогу невязки установления в области основного вихря

$$R(\tau) = \frac{1}{S(\Omega)} \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} \left| \frac{\partial \rho}{\partial \tau} \right| ds$$

где Ω – верхняя четверть расчетной области, $S(\Omega)$ – ее площадь. Кривые 2 и 3 на фиг. 5 представляют собой зависимости невязки установления как функции от логарифмического времени τ с момента начала расчета для начальных перепадов плотности на контактном разрыве $\rho_2/\rho_1 = 10$ и 7 соответственно. Кроме уменьшения величины невязки наблюдается уменьшение периода пульсаций течения приблизительно в 1,5 раза. Последнее связано с тем, что при $\rho_2/\rho_1 = 7$ вокруг основного вихря одновременно обращается не пара, а тройка малых вихрей. Время формирования перио-



Фиг. 6. Изолинии плотности при истечении струи из расширяющейся щели $p_1/p_0 = 20$, $V_D = 0,15c_0$

дического численного решения увеличивается с уменьшением начального перепада плотности на контактном разрыве.

Расчеты проводились на сетке 180×200 ячеек, из которых на область основных пульсаций приходилось приблизительно 60×60 ячеек.

3. Истечение струи из расширяющейся щели. Рассматривается плоское нестационарное течение идеального совершенного газа, возникающее при раздвижении полуплоскостей. В начальный момент $t = 0$ две полуплоскости вертикальной плоскости-диафрагмы, разделяющей пространство на две части с покоящимся газом с параметрами ρ_1, p_1 слева и ρ_0, p_0 справа, начинают разъезжаться в вертикальном направлении в разные стороны с постоянной скоростью V_D . В образующуюся щель, размер которой увеличивается, начинает истекать струя газа. В левую сторону от отверстия, в область повышенного давления распространяется волна разрежения, а в правую, в область пониженного давления распространяется ударная волна. Между фронтами упомянутых волн возможно образование и других поверхностей разрывов, таких, как ударные волны, тангенциальные разрывы, контактные поверхности.

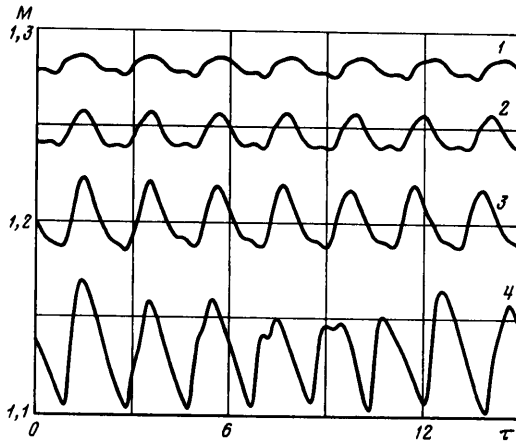
Для численного решения использовалась методика с подвижными сетками, аналогичная описанной выше. Дополнительным элементом являлось использование сгущающихся сеток и выделение вторичного скачка внутри истекающей струи. Детали методики расчета, построения и движения сетки изложены в [4].

Расчеты проводились в диапазоне начального перепада давлений и скорости раздвижения диафрагмы

$$10 \leq p_1 / p_0 \leq 100, \quad 0,05c_0 \leq V_D \leq 5c_0$$

где c_0 – скорость звука в правом полупространстве. Температура в начальный момент по разные стороны от диафрагмы считалась одинаковой, т.е. $\rho_1/\rho_0 = p_1/p_0$. Подробное исследование и описание закономерностей течения во всем указанном диапазоне можно найти в [4]. Здесь же остановимся на случае медленного раздвижения диафрагмы ($V_D \leq 0,2c_0$), при котором имеет место неустойчивость автомодельного течения.

На фиг. 6 приведены изолинии поля плотности сформировавшегося течения для $p_1/p_0 = 20$, $V_D = 0,15c_0$. Представлена только верхняя половина симметричного течения с неполным изображением области высокого давления. Картина течения похожа на



Фиг. 7. Пульсации во времени числа Маха первичной волны для начального перепада $p_1/p_0 = 20$, при различных скоростях расширения щели: $V_D/c_0 = 0,2; 0,15; 0,1; 0,05$ (кривые 1—4)

начальную стадию истечения недорасширенной сверхзвуковой струи. Хорошо видны первичная ударная волна, вторичный скачок внутри струи и контактная поверхность между ними. Ниже боковой границы струи наблюдается пучок волн сжатия (висячий боковой скачок), который взаимодействует со вторичным скачком, образуя на его фронте характерный излом (тройная точка). Также виден контактный разрыв, исходящий из тройной точки. Газ, прошедший через вторичный скачок выше тройной точки, имеет более высокую скорость и вызывает сильную деформацию периферийной части контактной поверхности. Над вторичным скачком выше границы струи существует возвратное вихревое течение с направлением вращения против часовой стрелки.

Для данного течения, как и в предыдущей задаче, имеет место колебательный характер течения, который проявляется в периодическом образовании малых вихрей на передней части контактной поверхности, обороте их вокруг основного вихря, отрыве от основного вихря и сносе в направлении щели. На фиг. 6 хорошо видны как фаза отрыва, так и фаза образования малых вихрей. Перед отрывом малый вихрь взаимодействует с границей струи, изменяет интенсивность висячего скачка и положение тройной точки на фронте вторичного скачка. Это в свою очередь ведет к изменению поля скорости газа за вторичным скачком и к образованию нового малого вихря на контактной поверхности.

Описанные колебания вызывают пульсации во всей области течения и, в частности, влияют на интенсивность первичной ударной волны. На фиг. 7 для сформировавшихся течений изображены зависимости числа Маха осевой части первичной ударной волны как функции логарифмического времени для перепада $p_1/p_0 = 20$ при различных скоростях раздвижения диафрагмы. Для кривых 1, 2 и 3 наблюдаются строго повторяющиеся пульсации с близкими периодами, приблизительно равными двум единицам времени, что соответствует четырехкратному увеличению размеров структуры течения за время одной пульсации, т.е. если для автомодельного режима в любые два момента времени имеет место подобие конфигураций течения, то в данном случае подобие имеет место только для конфигураций, линейные размеры которых различаются в 4 раза.

При увеличении скорости раздвижения амплитуда пульсаций уменьшается. При $V_D > 0,2c_0$ боковой скачок в струе практически вырождается и, как следствие, пульсации исчезают. Численное решение в этом случае выходит на автомодельный режим. При увеличении начального перепада давления также наблюдается умень-

шение интенсивности колебаний. Это связано с тем, что с увеличением перепада угол расширения струи становится больше и боковой висячий скачок, тройная точка и вихревая колеблющаяся структура оттесняются дальше от плоскости симметрии. В результате относительная доля газа, которая проходит через висячий скачок и попадает в вихревое образование, становится меньше, интенсивность срываемых вихрей, а следовательно, и интенсивность пульсаций уменьшаются.

При уменьшении V_D картина течения усложняется. Так, для $V_D = 0,05c_0$ (кривая 4) интенсивность пульсаций сравнима с интенсивностью первичной волны. Кроме того, имеет место небольшое изменение во времени амплитуды пульсаций с повторяемостью в 5–6 циклов. Причина последнего заключена в том, что периферийная часть контактной поверхности сильнее продвинута в сторону фронта первичной волны, а отрывающаяся область газа имеет более протяженную форму. Причем последняя в заключительной стадии отрыва распадается на два вихревых сгустка, которые взаимодействуют с границей струи на разных участках, образуя тем самым как бы два различных источника возмущений. Суперпозиция этих двух возмущений может порождать небольшие биения в механизме колебания течения. С уменьшением перепада p_1/p_0 характер течения также усложняется, струя приобретает бочковую структуру. На сужающемся участке границы струи начинает проявляться неустойчивость Кельвина – Гельмгольца и периодичность пульсаций сильно нарушается.

Заключение. Для всех рассмотренных течений в той или иной мере присутствует взаимодействие сверхзвуковой струи с набегающим потоком. Факты неустойчивости подобной структуры для стационарных течений известны. В [5, 10] исследовался пульсирующий характер течения при сверхзвуковом обтекании сферы со струей, направленной навстречу потоку. Результаты данной работы показывают, что для автомодельных течений такая структура течения также является слабоустойчивой и при определенных параметрах может генерировать в крупномасштабные пульсации в поле течения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Takayama K., Inoue O.* Shock wave diffraction over a 90-degree sharp corner. Posters presented at 18th ISSW // Shock Waves. 1991. V. 1. № 4. P. 301–312.
2. *Woodward P., Colella P.* The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks // J. Comput. Phys. 1984. V. 54. № 1. P. 115–173.
3. *Uchiyama N., Inoue O.* Shock wave / vortex interaction in a flow over 90-degree sharp corner // AIAA Journal. 1995. V. 33. № 9. P. 1740–1742.
4. *Васильев Е.И., Данильчук Е.В.* Численное моделирование и исследование истечения газа из расширяющейся щели // Волгоград: ВГПУ, 1996. 48 с.
5. *Fujita M.* Axisymmetrical oscillations of an opposing jet from a hemispherical nose // AIAA Journal. 1995. V. 33. № 10. P. 1850–1856.
6. *Васильев Е.И.* Монотонная схема повышенной точности для решения двумерных нестационарных уравнений Эйлера на подвижных сетках на основе схемы Годунова // Аннот. докл. 7-го Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике. М., 1991. С. 73.
7. *Васильев Е.И.* W-Модификация метода С.К. Годунова и ее применение для двумерных нестационарных течений запыленного газа // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1996. Т. 36. № 1. С. 122–135.
8. *Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я. и др.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
9. *Крайко А.Н., Макаров В.Е., Тилляева Н.И.* К численному построению фронтов ударных волн // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1980. Т. 20. № 3. С. 716–723.
10. *Калугин В.Т., Луценко А.Ю.* Экспериментальные исследования обтекания спускаемых аппаратов при струйном управлении аэродинамическими характеристиками // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 3. С. 115–125.