

УДК 533.6.011

© 1998 г. А.Н. КРАЙКО, Д.Е. ПУДОВИКОВ

ТОНКИЕ ПРОФИЛИ МИНИМАЛЬНОГО ВОЛНОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРИ ЗАДАННЫХ ХОРДЕ, ПЛОЩАДИ ПРОДОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ И ПОДЪЕМНОЙ СИЛЕ

Решена задача оптимального профилирования крыльевых профилей, которые при обтекании сверхзвуковым потоком на малых углах атаки реализуют минимум коэффициента волнового сопротивления при заданных хорде, площади продольного сечения и коэффициенте подъемной силы. Показана важная роль заднего торца, причем даже для весьма тонких профилей.

Как показали примеры оптимального профилирования симметричных тел с коэффициентом подъемной силы $C_y = 0$ из [1–3], для определения влияния заднего торца достаточно ограничиться приближением, не дающим внутренних точек излома. Более того, для тонких профилей и малых углов атаки α само профилирование можно выполнять в рамках линейной теории, рассчитывая затем C_y и коэффициент волнового сопротивления C_x сравнимых оптимальных и неоптимальных конфигураций путем интегрирования уравнений Эйлера или использования развитого в [3] модифицированного "shock-expansion method". Далее этот метод именуется "методом [3]". Хотя при таком подходе выигрыши оказываются меньшими, чем при профилировании в рамках метода [3], однако, как видно из дальнейшего, они достаточно велики.

Исследуемые профили изображены на фиг. 1. На ней ось x декартовых координат x направлена по вектору скорости набегающего потока V_∞ , начало координат совпадает с передней точкой профиля, сплошной линией (штрихами) нарисованы образующие профиля с задним торцом (с острой задней кромкой). Так как $\alpha \ll 1$, то длина хорды и координаты x_f , x_{f+} и x_{f-} различаются на величины порядка α^2 . Здесь и далее нижние индексы $f, f+, \dots$ приписываются параметрам в точках $f, f+, \dots$, а индекс " ∞ " – параметрам набегающего потока. Ввиду малости α с точностью до α включительно ограничение на длину хорды заменим таким же ограничением на абсциссы x_f , x_{f+} и x_{f-} . Приняв их максимально допустимую величину за масштаб длины, будем иметь $x_f, x_{f\pm} \leq 1$. При таком упрощении торец $x = 1$, который может появляться у оптимального профиля как участок краевого экстремума, перпендикулярен оси x , а не хорде профиля.

Пусть верхняя и нижняя образующие профиля даются уравнениями $y = y_\pm(x)$, где, как и ранее, индекс плюс отвечает верхней, а минус – нижней образующей. Тогда для коэффициентов давления C_p в линейном приближении будем иметь

$$C_{p\pm} \equiv \frac{p - p_\infty}{\rho_\infty V_\infty^2} = \pm \frac{\dot{y}_\pm}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$

Здесь p – давление, ρ – плотность, $V = |\mathbf{V}|$, а $\dot{y}_\pm = dy_\pm / dx$. В соответствии



Фиг. 1. Контуры профилей с задним торцом и с остrokонечной задней кромкой

с этим C_x и C_y равны

$$\sqrt{M_\infty^2 - 1} C_x = \int_0^1 (\dot{y}_+^2 + \dot{y}_-^2) dx + \frac{\sqrt{M_\infty^2 - 1} (p^+ - p_\infty)}{\rho_\infty V_\infty^2} (y_{f-} - y_{f+}) \quad (1)$$

$$\sqrt{M_\infty^2 - 1} C_y = - \int_0^1 (\dot{y}_+ + \dot{y}_-) dx = -(y_{f+} + y_{f-})$$

где p^+ – давление, действующее на торец, которое предполагается известным и не зависящим от формы образующих if_+ и if_- и от ординаты y . Если торца нет, то $y_{f+} = y_{f-} = y_f$ и в выражении для C_x исчезает второе слагаемое. Как видно из второй формулы (1), в линейном приближении задание C_y однозначно определяет угол атаки профиля вне зависимости от того, имеет он острую заднюю кромку или торец. При наличии торца угол атаки определяется по ординате его средней точки $(y_{f+} + y_{f-})/2$. Площадь продольного сечения профиля F дается формулой

$$F = \int_0^1 (y_+ - y_-) dx + \int_{y_{f-}}^{y_{f+}} (x - 1) dy \quad (2)$$

Здесь F отнесена к квадрату хорды i , как и в [2, 3], второе слагаемое записано для того, чтобы учесть изменение F при варьировании торца.

Для решения сформулированной вариационной задачи составим функционал Лагранжа

$$J = \sqrt{M_\infty^2 - 1} C_x + \mu F + \lambda \sqrt{M_\infty^2 - 1} C_y$$

в котором μ и λ – постоянные множители Лагранжа, а C_x , C_y и F берутся из (1) и (2).

Так как вторая формула для C_y из (1) не содержит интегрального слагаемого, то уравнения экстремалей, дающие форму верхней и нижней образующих, оказываются такими же, как и в случае симметричного профиля, получающегося при $\alpha = 0$

$$\ddot{y}_\pm = \pm \mu / 2, \quad \mu \leq 0 \quad (3)$$

В (3) разные знаки правых частей для \ddot{y}_\pm есть результат того, что в (2) y_+ и y_- входят с разными знаками. При наличии торца, на котором допустимые $\delta x \leq 0$, неравенство $\mu \leq 0$, как и в [2, 3], есть необходимое условие краевого экстремума. При отсутствии торца μ неизбежно отрицательно, ибо в противном случае в силу (3) невозможно построить телесный профиль с острой задней кромкой. Согласно (3), верхняя и нижняя образующие профиля, как на фиг. 1, выпуклы.

Интегрируя (3), получим

$$\dot{y}_\pm = \dot{y}_{i\pm} \pm \frac{\mu}{2} x = \dot{y}_{f\pm} \pm \frac{\mu}{2} (x - 1), \quad y_\pm = \left(\dot{y}_{f\pm} \mp \frac{\mu}{2} \right) x \pm \frac{\mu}{4} x^2 \quad (4)$$

Отсюда и из формулы для C_y из (1) найдем, что

$$\sqrt{M_\infty^2 - 1} C_y = -(y_{f+} + y_{f-}) = -(\dot{y}_{f+} + \dot{y}_{f-}) \quad (5)$$

При отсутствии торца второе представление для C_y , как и первое, дает 2α .

Если уравнения образующих из (4) подставить в формулу (2) для F и выполнить интегрирование, то это даст

$$F = \frac{\dot{y}_{f+} - \dot{y}_{f-}}{2} - \frac{\mu}{3} \quad (6)$$

Наконец, при отсутствии торца условие замкнутости профиля $y_{f+} = y_{f-}$ вместе со второй парой уравнений из (4) определит μ

$$\mu = 2(\dot{y}_{f+} - \dot{y}_{f-}) \quad (7)$$

Для профиля без заднего торца формулы (5)–(7) позволяют по заданным C_y и F определить μ и $\dot{y}_{f\pm}$, а затем с помощью (4) построить его образующие. После этого по формуле

$$\sqrt{M_\infty^2 - 1} C_x = \dot{y}_{f+} (2\dot{y}_{f+} - \mu) + \frac{\mu^2}{6} \quad (8)$$

полученной из (1) и (4), можно найти C_x оптимального профиля. В действительности, как установлено в [2, 3], линейная теория хорошо работает только при построении оптимальных образующих, но не при определении распределения давления по ним и как следствие этого – не при расчете их силовых характеристик. По этой причине формула (8) далее не используется вообще, а (5) применяется только при определении $\dot{y}_{f\pm}$ и μ , т.е. при построении профиля. Коэффициенты C_x и C_y находятся затем с помощью метода [3], что позволяет при фиксированных F и C_y сравнивать сопротивление оптимальных и неоптимальных профилей.

Условие оптимальности профиля с остроконечной задней кромкой получается из выражения для $\delta C_x = \delta J / \sqrt{M_\infty^2 - 1}$, если учесть, что при отсутствии торца допустимые $\Delta y_{f+} \geq 0$, а $\Delta y_{f-} \leq 0$. Опуская промежуточные выкладки, приведем лишь окончательный результат. Для оптимальности профиля без торца необходимо выполнение неравенства

$$L \equiv \frac{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}{\rho_\infty V_\infty^2} (p_\infty - p^+) = \frac{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}{\kappa M_\infty^2} \left(1 - \frac{p^+}{p_\infty} \right) \geq \dot{y}_{f-} - \dot{y}_{f+} = 6F \quad (9)$$

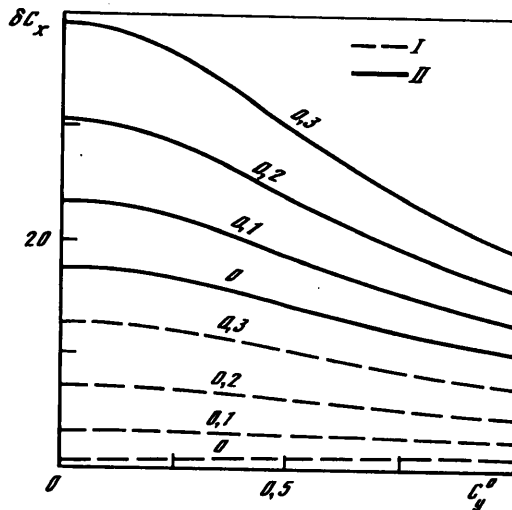
в котором разность $(\dot{y}_{f-} - \dot{y}_{f+})$ выражена через F из (6) и (7), а второе выражение для L записано для совершенного газа с постоянным показателем адиабаты κ . Если даже заведомо положительную величину p^+/p_∞ заменить нулем, то и в этом случае с ростом F неизбежно наступит момент, когда неравенство (9) нарушится и оптимальными станут профили с задним торцом. Для таких профилей условие их замкнутости заменится равенством

$$L = \dot{y}_{f-} - \dot{y}_{f+} \quad (10)$$

которое определит оптимальный размер торца.

Согласно (9), оптимальный профиль имеет задний торец, если

$$F \geq F^* = \frac{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}{6\kappa M_\infty^2} \left(1 - \frac{p^+}{p_\infty} \right) \quad (11)$$



Фиг. 2. Относительные проигрыши в процентах по коэффициентам волнового сопротивления псевдооптимальных профилей с острой задней кромкой при $M_\infty = 3$ (кривые I) и 5 (кривые II)

Данное условие, полученное в рамках линейной теории, несколько завышает величину F^* , т.е. в силу (11) торец у оптимального тела появляется при меньших F , чем по точному "условию Буземана" [2, 3]. Это, однако, как и в случае существенно более толстых тел из [3], лишь незначительно увеличивает C_x построенных профилей.

Равенства (5), (6) и (10) позволяют найти μ и $\dot{y}_{f\pm}$, а затем по второй паре уравнений из (4) построить образующие оптимального профиля с торцом и с помощью метода [3] найти его C_x и C_y . Необходимые для этого выражения для μ и $\dot{y}_{f\pm}$ имеют вид

$$\mu = -3\left(F + \frac{L}{2}\right), \quad \dot{y}_{f\pm} = -\frac{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}{2} C_y \mp \frac{L}{2}$$

На фиг. 2 для $F = 0,047$, $\kappa = 1,4$, двух значений чисел Маха $M_\infty = 3$ и 5 и разных ρ^+/ρ_∞ приведены результаты сравнения оптимальных профилей с торцом и псевдооптимальных профилей без торца. Образующие не имеющих торца псевдооптимальных профилей строились по тем же формулам (4), что и образующие оптимальных профилей. При этом входящие в (4) $\dot{y}_{f\pm}$ и μ , несмотря на нарушение условия (9), определялись равенствами (5)–(7), в силу которых

$$\dot{y}_{f\pm} = \mp 3F - 0,5\sqrt{M_\infty^2 - 1}C_y, \quad \mu = -12F$$

Выбранное значение продольной площади $F = 0,047$ отвечает достаточно тонким профилям. Их безразмерная (отнесенная к хорде) толщина и при наличии, и при отсутствии торца равна 0,07.

На фиг. 2 кривые I отвечают $M_\infty = 3$, а II – $M_\infty = 5$. Цифры около кривых – значения ρ^+/ρ_∞ . По оси абсцисс отложено отношение $C_y^0 = C_y / C_{y5}$, где C_{y5} – коэффициент подъемной силы пластинки при $\alpha = 5^\circ$. С ростом угла атаки или величины C_y влияние формы образующих тонкого профиля на его C_x уменьшается. Малым C_y^0 отвечают малые α и как результат этого – сильное влияние правильного профилирования, которое определяется величиной $\delta C_x = (C_x - C_{xm}) / C_{xm}$. Здесь C_{xm} – коэффициент волнового сопротивления оптимального профиля с торцом, а C_x – аналогичный коэффициент

для псевдооптимального тела без торца. Проигрыши, связанные с неправильным профилированием, растут с уменьшением C_y^0 , а также с увеличением M_∞ и p^+/p_∞ . Напомним, что при $M_\infty = 3$ по простейшему варианту теории донного давления [4] $p^+/p_\infty \approx 0,2$, а при гиперзвуковых скоростях, согласно [5], p^+ может превышать p_∞ . Однако, как видно из фиг. 2, даже при $p^+ = 0$ введение торца заметно уменьшает C_x , особенно для больших M_∞ .

Заключение. Представленные выше результаты показывают, что при построении несущих профилей минимального сопротивления, как и в случае рассмотренных в [1–3] оптимальных симметричных тел с $C_y = 0$, особую роль играет задний торец. Торце является участком краевого экстремума по координате, отсчитываемой вдоль хорды профиля. Своим появлением он обязан заданию не только длины хорды, но и площади F , однако условие на хорду играет главную роль. Из-за него торец будет столь же важным элементом оптимальных профилей если, как и [6, 7], вместо F задать положение сечения максимальной толщины профиля и саму эту толщину.

Задний торец не менее важен при оптимизации не по волновому, а по полному сопротивлению, включающему сопротивление трения. Хотя для тонких профилей полное сопротивление заметно больше волнового, сила трения, действующая на них, почти не зависит от формы образующей, а в основном определяется ее длиной, близкой к двум хордам. С другой стороны, согласно [4], пограничные слои, нарастающие на обеих сторонах профиля, увеличивают p^+ , а это ведет к росту оптимального размера торца.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01825).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chapman D.R.* Airfoil profiles for minimum pressure drag at supersonic velocities – general analysis with application to linearised supersonic flow // *NACA Rep.* 1952. N 1063. 14 p.
2. *Крайко А.Н., Пудовиков Д.Е.* О роли ограничения на длину при построении тел минимального сопротивления // *ПММ.* 1997. Т. 61. Вып. 5. С. 822–837.
3. *Крайко А.Н., Пудовиков Д.Е.* О построении симметричных профилей, оптимальных в сверх- и гиперзвуковом потоке при произвольных изопериметрических условиях // *ПММ.* 1997. Т. 61. Вып. 6. С. 931–946.
4. *Korst H.H.* A theory for base pressures in transonic and supersonic flow // *J. Appl. Mech.* 1956. V. 23. N 4. P. 593–600.
5. *Елькин Ю.Г., Нейланд В.Я., Соколов Л.А.* О донном давлении за клином в сверхзвуковом потоке // *Инж. журн.* 1963. Т. 3. Вып. 2. С. 362–366.
6. *Зубов В.И.* Об оптимальном сверхзвуковом профиле заданного утолщения // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1976. № 1. С. 89–96.
7. *Зубов В.И.* Об оптимальных профилях под малыми углами атаки в сверхзвуковом потоке // *ПММ.* 1997. Т. 61. Вып. 1. С. 88–96.

Москва

Поступила в редакцию
27.I.1997