

УДК 532.59:517.958

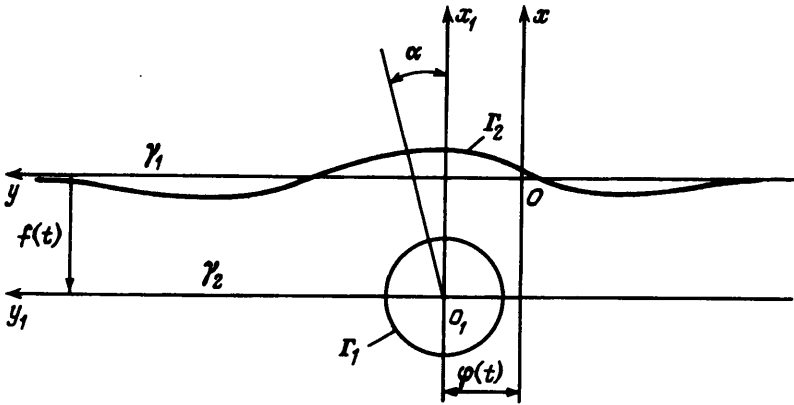
© 1998 г. О.А. ГИЛЬМАН, И.М. МИНДЛИН

ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ В ТЯЖЕЛОЙ ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ, ВОЗБУЖДАЕМЫЕ ЦИЛИНДРОМ, ДВИЖУЩИМСЯ ПОД УГЛОМ К ГОРИЗОНТУ

Исследуется решение начально-краевой задачи для системы интегродифференциальных уравнений, описывающих плоские волны, возбуждаемые в первоначально покоящейся тяжелой двухслойной идеальной жидкости цилиндром, движущимся под углом к горизонту. Предполагается, что однородные жидкие фракции различной плотности разделены эволюционирующей жидкой границей (горизонтальной плоскостью, если жидкость покоится). Аналитически строится приближенное решение двух задач, когда волны возбуждаются цилиндром, движущимся с постоянным ускорением, и колеблющимся цилиндром.

Основная проблема при решении рассматриваемых задач – обеспечить выполнение граничных условий на поверхности тела и на эволюционирующих границах раздела. В [1] содержится обзор результатов, которые относятся к случаям, когда цилиндр движется в однородной жидкости под свободной поверхностью (граница раздела именуется свободной поверхностью, когда одна из двух фракций, разделяемых границей, представляет собой фиктивную жидкость нулевой плотности). Относительно аналитических результатов в [1] отмечается, что даже в линейной постановке (т.е. когда граничные условия переносятся на неподвижную горизонтальную плоскость – равновесную границу раздела) решение сопряжено с большими трудностями, связанными с учетом точных граничных условий на теле. Эти трудности иногда обходятся введением дополнительных предположений. Так, например, получила большое распространение замена реального конечного тела системой точечных источников и стоков, заимствованная из теории "безграничной однородной жидкости". Задача о плавном горизонтальном разгоне цилиндра в работах [2–4] исследуется либо численно, либо в дипольном приближении. Применение дипольного приближения к исследованию волн, возбуждаемых погруженным цилиндром, колеблющимся в горизонтальной плоскости, приводит к отмечаемому в обзоре [1] противоречию с численно исследуемой задачей: в те моменты времени, когда скорость цилиндра обращается в нуль, момент диполя также равен нулю, что соответствует отсутствию в потоке каких-либо особенностей, тогда как при численном решении цилиндр остается в жидкости. Наличие аналитических результатов (вне рамок дипольного приближения) в обзоре [1] не отмечается. В обзоре [5] не приводится каких-либо других аналитических результатов, относящихся к обсуждаемому вопросу. В статье [6] задача решается численно. При этом граничные условия на твердой поверхности удовлетворяются только в те моменты времени, когда цилиндр оказывается в крайних положениях. Требуется также, чтобы отношение амплитуды колебаний к расстоянию от цилиндра до свободной поверхности было мало; при этом имеется в виду, что амплитуда может быть большой по сравнению с радиусом цилиндра. В [7] приводятся аналитические результаты, относящиеся к начальному этапу движения (найлены три члена степенных относительно времени рядов), но цилиндр моделируется диполем.

Предлагаемые в литературе аналитические методы более строгого учета гранич-



Фиг. 1. Системы отсчета и схема течения

ных условий на твердом теле описываются в книге [8]. Краткая характеристика этих методов, их сопоставление с применяемым ниже методом, сопоставление получаемых результатов содержатся в [9] и сохраняют силу применительно к цилиндру.

1. Постановка задачи. Рассматриваются плоские течения идеальной несжимаемой жидкости. Схема течения представлена на фиг. 1, где Γ_1 – граница поперечного сечения твердого цилиндра с горизонтальной образующей, Γ_2 – жидкая граница раздела между однородными жидкостями плотности γ_1 (верхняя) и γ_2 (нижняя) соответственно ($\gamma_1 < \gamma_2$). Оси x, y неподвижны (абсолютная система отсчета), оси x_1, y_1 связаны с цилиндром и движутся поступательно. Подвижный полюс o_1 – центр круга – поперечного сечения цилиндра; $f(t), \phi(t)$ – абсолютные координаты полюса o_1 ; $u = f'(t), v = \phi'(t)$ – составляющие скорости цилиндра; r, θ – полярные координаты в плоскости x_1, y_1 (фиг. 1). Безразмерный радиус цилиндра и безразмерное ускорение свободного падения равны единице. Сила тяжести направлена вдоль оси x .

Ниже рассматриваются волны, развивающиеся из начального равновесного состояния, в котором цилиндр и жидкость покоятся и граница есть горизонтальная плоскость $x = 0$. Источником возмущения жидкости является цилиндр, движение которого (т.е. функции $f(t), \phi(t)$) на интервале $t > 0$ считается заданным. Если, например,

$$u(t) = Q(t) \cos \alpha, \quad v(t) = Q(t) \sin \alpha, \quad Q(0) = 0, \quad \alpha = \text{const} \quad (1.1)$$

то цилиндр движется с заданной скоростью $Q(t)$ вдоль прямой, образующей угол α с вертикалью. Если цилиндр разгоняется с постоянным ускорением, то $Q(t) = at$; если гармонически колеблется с амплитудой a , то $Q(t) = a\omega \sin \omega t$, и т.п. При $\sin \alpha = 0$ течение является плоским аналогом осесимметричных кольцевых волн. При $\sin \alpha \neq 0$ вступает в "игру" угол между вертикалью и ускорением цилиндра, т.е. угол между силой тяжести и динамическими силами, создаваемыми возмущающим источником.

На твердой границе Γ_1 должно выполняться условие непротекания: соприкасающиеся точки цилиндра и жидкости имеют равные нормальные к поверхности цилиндра составляющие скорости. Граница Γ_2 является вихревой поверхностью, которая формируется в силу различия плотностей разделяемых границей жидкостей. На этой поверхности должны быть непрерывны нормальная к границе составляющая скорости жидкости и давление.

Пусть граница Γ_2 между жидкостями описывается уравнением $x = W(\theta, t)$; поверхности Γ_1 и Γ_2 разнесены в пространстве. Введем в плоскости xu криволинейные координаты (σ, θ) (в области $\sigma < 0$ – жидкость плотности γ_2) $x = \sigma + W(\theta, t), y - \phi(t) =$

$= (x - f(t)) \operatorname{tg} \theta$. Для любой функции F положим

$$F(r, \theta, t) = F^*(\sigma, \theta, t), \quad \sigma = r \cos \theta + f(t) - W(\theta, t)$$

$$F_+ = \lim_{r \rightarrow +0} F(r, \theta, t), \quad F_- = \lim_{\sigma \rightarrow -0} F^*(\sigma, \theta, t), \quad F_+^* = \lim_{\sigma \rightarrow +0} F^*(\sigma, \theta, t)$$

В начальный момент $t = 0$ завихренность покоящейся жидкости, естественно, равна нулю ($\operatorname{rot} \mathbf{q} = 0$). Течение обладает обобщенным потенциалом скорости Φ , который представится суммой двух интегралов типа потенциала двойного слоя источников

$$\Phi(M) = \Phi_1(M) + \Phi_2(M) \quad (1.2)$$

$$\Phi_j(M) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_j} g_j(Q_j) \frac{\partial}{\partial n} \ln R_j d\theta_j \quad (j = 1, 2)$$

Здесь Q_j – точки на Γ_j соответственно, M – точка, не принадлежащая поверхностям Γ_j , $R_j = |Q_j M|$.

Давление непрерывно на Γ_2 , если плотность $g_2(\theta, t)$ распределения источников удовлетворяет уравнению [10]

$$\frac{\partial}{\partial t} g_2 + \left[D_1 (f' \sin \theta - \phi' \cos \theta) + \frac{1}{2} D_1^2 \left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial \theta_+} + \frac{\partial \Phi^*}{\partial \theta_-} \right) - \frac{1}{2} D_3 \left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial \theta_+} + \frac{\partial \Phi^*}{\partial \theta_-} \right) \right] \frac{\partial}{\partial \theta} g_2 + \quad (1.3)$$

$$+ \varepsilon_1 \left[\frac{\partial \Phi^*}{\partial t_-} + (f' \sin \theta - \phi' \cos \theta) D_1 \frac{\partial \Phi^*}{\partial \theta_-} - \frac{1}{2} D_4 \left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial \sigma_-} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(D_1 \frac{\partial \Phi^*}{\partial \theta_-} \right)^2 + W(\theta, t) \right] = 0$$

$$D_1 = \frac{\cos \theta}{W - f}, \quad D_2 = \sin \theta D_1, \quad D_3 = D_2 + \frac{\partial W}{\partial \theta} D_1^2, \quad D_4 = 1 + (D_2 + D_3) \frac{\partial W}{\partial \theta}, \quad \varepsilon_1 = 1 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$$

Непрерывность нормальной к Γ_2 составляющей скорости обеспечивается свойствами потенциала двойного слоя.

Плотность $g_1(\theta, t)$ обеспечивает условие "непротекания" на поверхности цилиндра

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r_+} = f' \cos \theta + \phi' \sin \theta \quad (1.4)$$

Уравнение эволюции границы Γ_2 следует из условия неразрывности жидкости и запишется в форме

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial \Phi^*}{\partial \sigma_+} D_4 - \frac{\partial \Phi^*}{\partial \theta_+} D_3 - (f' \sin \theta - \phi' \cos \theta) D_1 \frac{\partial W}{\partial \theta} \quad (1.5)$$

Уравнения (1.3)–(1.5) полностью аналогичны по смыслу и происхождению содержащимся в [9] уравнениям (1.2)–(1.4).

Если функция $g_1(\theta, t)$ ограничена, то равенство (1.2) обеспечивает выполнение условий

$$r \rightarrow +\infty, \quad \frac{\partial}{\partial r} \Phi_1 \rightarrow 0, \quad \frac{\partial}{r \partial \theta} \Phi_1 \rightarrow 0$$

Функции $g_2(\theta, t)$ и $W(\theta, t)$ должны удовлетворять требованиям, чтобы производные $\partial \Phi_2^* / \partial \theta_{\pm}$ были ограниченными и обеспечивались условия $\partial \Phi_2^* / \partial \sigma_{\pm} \rightarrow 0$ при $\cos \theta \rightarrow 0$. Эти условия означают, что на бесконечности жидкость покоится.

Равенства (1.2)–(1.5) представляют собой систему интегродифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $g_1(\theta, t)$, $g_2(\theta, t)$, $W(\theta, t)$. Аргумент θ

изменяется в пределах от 0 до 2π на поверхности Γ_1 , на которой определена функция $g_1(\theta, t)$, и на вдвое меньшем интервале на поверхности Γ_2 ; при этом $f(t)\cos\theta < 0$ на Γ_2 .

Ниже изучаются задачи с начальными условиями

$$t = 0, \quad g_1 = g_2 = 0, \quad W = 0, \quad f = H, \quad \phi = 0, \quad u = v = 0 \quad (|H| > 1) \quad (1.6)$$

Сформулированные уравнения сохраняют силу на временном интервале $t > 0$, пока цилиндр не пересекает границы Γ_2 и пока каждый луч $\theta = \text{const}$ пересекает эту границу не более чем в одной точке.

В зависимости от свойств заданной скорости $Q(t)$ и относительной величины других параметров задачи (1.1)–(1.5) ее решение ищется в разных формах, пригодных в различных диапазонах времени и параметров.

Пусть, например, $Q(t) = Q_1 t + Q_2 t^2 + \dots$ ($Q_i = \text{const}$).

Решение задачи ищется в виде рядов по степеням t :

$$g_j(\theta, t) = g_{j1}(\theta)t + g_{j2}(\theta)t^2 \dots \quad (j = 1, 2), \quad W(\theta, t) = W_1(\theta)t + W_2(\theta)t^2 + \dots \quad (1.7)$$

Техника построения решения аналогична описанной в [9].

Первые члены рядов отыскиваются в виде

$$g_{11}(\theta) = 2Q_1 \left[a_0 \cos \alpha + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(k\theta - \alpha) \right],$$

$$g_{21}(\theta) = 2\varepsilon_* Q_1 \left[v_0 \cos \alpha + \sum_{k=1}^{+\infty} v_k \cos(2k\theta - \alpha) \right] \quad (1.8)$$

$$W_1(\theta) = 0, \quad W_2(\theta) = \frac{Q_1}{H} \left(1 - \varepsilon_* \frac{H}{|H|} \right) \cos^2 \theta \sum_{k=1}^{+\infty} k v_k \cos(2k\theta - \alpha)$$

$$v_0 = - \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k v_k, \quad a_0 = - \frac{1}{2} v_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{(-2H)^k}, \quad \varepsilon_* = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1}$$

Постоянные v_k, a_k являются решением счетной системы алгебраических уравнений

$$n \geq 1, \quad v_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{a_k}{(-H)^k} \frac{1}{2^k} \frac{k!}{n!(k-n)!} \quad (1.9)$$

$$a_1 = -1 - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_*}{|H|} v_1, \quad n \geq 2, \quad a_n = \frac{H}{|H|} \frac{1}{2^n} \frac{\varepsilon_*}{(-H)^n} \sum_{k=1}^n k v_k \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Система (1.9) решается итерационным методом типа $a^{(m)} = F_1(v^{(m)})$, $v^{(m+1)} = F_2(a^{(m)})$. Итерационный процесс сходится быстрее геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{1}{2} \varepsilon_* H^{-2} (1 - H^{-2})^{-3}$. Начиная с нулевого приближения $v_n^{(0)} = 0$, получим

$$a_1^{(0)} = -1, \quad n \geq 2, \quad a_n^{(0)} = 0; \quad v_1^{(1)} = \frac{1}{2H}, \quad n \geq 2, \quad v_n^{(1)} = 0$$

$$a_1^{(1)} = -1 - \frac{\varepsilon_*}{4H|H|}, \quad v_1^{(2)} = \frac{1}{2H} + \frac{\varepsilon_*}{2|H|} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{(4H^2)^k}$$

$$n \geq 2, \quad a_n^{(1)} = \frac{\varepsilon_*}{2|H|} \frac{n}{(-2H)^n}, \quad v_n^{(2)} = \frac{\varepsilon_*}{2|H|} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k}{(4H^2)^k} \frac{k!}{n!(k-n)!}$$

Первая итерация дает

$$W_2^{(1)}(\theta) = \frac{Q_1}{2H^2} \left(1 - \varepsilon_* \frac{H}{|H|} \right) \varphi(\theta), \quad \varphi(\theta) = \cos^2 \theta \cos(2\theta - \alpha)$$

Если в начальный момент цилиндр находится достаточно далеко от границы раздела ($|H| \gg 1$), то анализ функции $\varphi(\theta)$ позволяет сделать заключение о начальной эволюции этой границы. Когда цилиндр приближается к границе снизу ($H < 0, Q_1 > 0$) по лучу $\theta = \alpha$ ($0 < \alpha < \pi/2$), то на границе раздела формируется "холм", вершина которого находится на луче $\theta = \alpha/3$, и две "впадины", низшие точки которых находятся на лучах $\theta = \theta_1 = \alpha/3 + \pi/3$ (перед цилиндром) и $\theta = \theta_2 = \alpha/3 - \pi/3$ (сзади цилиндра) (фиг. 1). Если цилиндр движется горизонтально ($\alpha = \pi/2$), то вершина холма находится на луче $\theta = \pi/6$; при этом $\theta_1 = \pi/2$ и $\theta_2 = -\pi/6$, т.е. формируется холм перед цилиндром и одна впадина за цилиндром. Ряды (1.7) пригодны на весьма малом интервале времени, но они оказываются полезными при построении алгоритма численного решения задачи. Результаты, полученные в следующем пункте, позволяют проследить эволюцию границы раздела на большем временном интервале.

2. Волны, возбуждаемые медленно ускоряющимся цилиндром. Пусть в начальный момент цилиндр находится достаточно далеко от границы раздела ($|H| \gg 1$). Решение задачи строится в виде степенных рядов относительно параметра μ , который вводится следующим образом. Модифицируем равенства (1.2), положив

$$\Phi(r, \theta, t) = \Phi_1(r, \theta, t) + \mu \Phi_2(r, \theta, t), \quad \Phi^*(\sigma, \theta, t) = \mu \Phi_1^*(\sigma, \theta, t) + \Phi_2^*(\sigma, \theta, t)$$

Остальные уравнения задачи остаются без изменений. Тем самым параметр μ вводится в уравнения (1.2)–(1.5). Решение задачи строится в виде степенных рядов относительно параметра μ

$$g_j(\theta, t) = g_{j0}(\theta, t) + \mu g_{j1}(\theta, t) + \mu^2 g_{j2}(\theta, t) + \dots \quad (j = 1, 2) \quad (2.1)$$

$$W(\theta, t) = \mu W_1(\theta, t) + \mu^2 W_2(\theta, t) + \dots$$

Построив ряды, следует положить $\mu = 1$. Физический смысл параметра μ и техника построения рядов типа (2.1) обсуждаются в [11].

Для первых членов рядов (2.1) справедливы формулы

$$g_{10}(\theta, t) = -2Q(t) \cos(\theta - \alpha), \quad g_{11}(\theta, t) = 0,$$

$$g_{21}(\theta, t) = \varepsilon_* \sum_{k=0}^{+\infty} [c_k(t) \cos 2k\theta + v_k(t) \sin 2k\theta] \quad (2.2)$$

$$g_{12}(\theta, t) = \varepsilon_* \frac{f}{|f|} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(-f)^k} [A_k(t) \cos 2k\theta + B_k(t) \sin 2k\theta]$$

$$W_1(\theta, t) = \cos^2 \theta \sum_{k=1}^{+\infty} [a_k(t) \cos 2k\theta + b_k(t) \sin 2k\theta]$$

$$A_k = \sum_{j=1}^k c_j(t) \frac{1}{2^k} \frac{k!}{j!(k-j)!}, \quad B_k = \sum_{j=1}^k v_j(t) \frac{1}{2^k} \frac{k!}{j!(k-j)!}, \quad c_0(t) = - \sum_{j=1}^{+\infty} (-1)^j c_j(t)$$

Комплекснозначные функции $s_k = c_k(t) + iv_k(t)$, $z_k = a_k(t) + ib_k(t)$ ($i^2 = -1$) являются решением следующей задачи Коши для счетной системы линейных уравнений с переменными коэффициентами:

$$n = 1, 2, 3, \dots, \quad s'_n(t) = \frac{1}{2} z_{n-1} + z_n + \frac{1}{2} z_{n+1} + D_n$$

$$z'_n(t) = - \frac{\varepsilon_*}{|f|} n s_n + V_n, \quad h_1(t) = \frac{Q}{f}, \quad h_2 = \frac{Q}{f^2} \quad (2.3)$$

$$D_n = -\frac{1}{2}h_1[\cos\alpha((n+1)s_{n+1} - (n-1)s_{n-1}) - i\sin\alpha((n-1)s_{n-1} + 2ns_n + (n+1)s_{n+1})] + \\ + h_1'e^{i\alpha}\delta_{n,1} + \frac{1}{2}h_1^2\delta_{n,1} - \frac{1}{2}h_1^2e^{2i\alpha}(\delta_{n,1} + \delta_{n,2})$$

$$V_n = -\frac{1}{2}h_1[\cos\alpha(-nz_{n-1} + 2z_n + nz_{n+1}) - i\sin\alpha(z_{n-1} + 2z_n + z_{n+1})n] + h_2e^{i\alpha}\delta_{n,1}$$

$$\delta_{kk} = 1, \quad k \neq j, \quad \delta_{k,j} = 0; \quad s_n(0) = z_n(0) = 0$$

Решение задачи (2.3) представляет интерес на интервале времени, пока $|f(t)| \gg 1$, т.е. пока цилиндр находится достаточно далеко от границы раздела. Этот интервал времени, очевидно, ограничен, если цилиндр движется по направлению к границе.

Пусть $\tau = \varepsilon t$, $\varepsilon^2 \ll \varepsilon_*$, $f = f(\tau)$, $Q = \varepsilon Q_*(\tau)$, т.е. цилиндр движется достаточно медленно. Система (2.3) "усекается" ($s_{N+j} = 0$, $z_{N+j} = 0$, $j = 1, 2, 3, \dots$; $N > 0$ выбирается произвольно) и решение усеченной системы строится методом, примененным к аналогичной системе в [11]. Приведем приближенное решение усеченной системы в случае, когда $Q'_*(0) \neq 0$ (начальное ускорение цилиндра отлично от нуля).

Пусть $L_k^{(1)}(x)$ – полиномы Лагерра степени k [12]

$$L_0^{(1)}(x) = 1, \quad L_1^{(1)}(x) = 2 - x, \quad (k+1)L_{k+1}^{(1)}(x) = (2k+2-x)L_k^{(1)}(x) - (k+1)L_{k-1}^{(1)}(x)$$

Пусть $0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_N$ – нули полинома $L_N^{(1)}(x)$. Введем двумерные массивы постоянных

$$B_{kj} = (-1)^k L_{k-1}^{(1)}(x_j) e_j \quad (2.4)$$

$$k \neq j, \quad R_{kj} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N B_{pk}(B_{p+1,j} - B_{p-1,j}), \quad R_{kk} = 0, \quad R_{jk} = -R_{kj}$$

Здесь $e_j > 0$ – нормирующий множитель, определяется условием

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{k} B_{kj}^2 = 1$$

В случае медленно движущегося цилиндра приближенное решение задачи Коши для усеченной системы дается формулами

$$z_k(t) = \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon_*} h_* \sum_{p=1}^N B_{kp} \sigma_p(t), \quad h_* = \frac{H}{|H|} \left(1 - \varepsilon_* \frac{H}{|H|} \right) \quad (2.5)$$

$$\varepsilon_* s_k(t) = \varepsilon \frac{Q_*(\tau)}{|f(\tau)|} e^{i\alpha} \delta_{kl} + \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon_*} h_* \frac{1}{k} \sum_{p=1}^N B_{kp} F_p(t)$$

$$\sigma_p(t) = v_{p,0}(\tau) + v_{p,1}(\tau) \cos \beta_p(t) + \varepsilon v_{p,2}(\tau) + O(\varepsilon^2)$$

$$F_p(t) = v_{p,1}(\tau) \omega_p(\tau) \sin \beta_p(t) - \varepsilon \left[\frac{1}{f(\tau)} \frac{dv_{p,0}(\tau)}{d\tau} + \right.$$

$$\left. + Q_*(\tau) \cos \alpha \left(v_{p,0}(\tau) + \sum_{s=1}^N R_{ps} v_{s,0}(\tau) \right) - i Q_*(\tau) \sin \alpha \frac{1}{2} x_{p'} v_{p,0}(\tau) \right] -$$

$$- \varepsilon \sum_{s=1}^N \gamma_{ps}(\tau) \cos \beta_s(t) + O(\varepsilon^2) \quad (p = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, N)$$

$$j \neq p, \quad \gamma_{pj}(\tau) = Q_*(\tau) \cos \alpha R_{pj} \frac{x_p + x_j}{x_p - x_j} v_{j,1}(\tau),$$

$$\gamma_{pp} = \frac{1}{4} Q_*(\tau) \cos \alpha v_{p,1}(\tau) + f(\tau) v_{p,2}(\tau) \omega_p(\tau)$$

$$v_{p,0}(\tau) = 2 \frac{Q'_*(\tau)}{f(\tau)} \frac{B_{1p}}{x_p} \exp(i\alpha) - \left(\frac{Q_*(\tau)}{f(\tau)} \right)^2 \exp(i2\alpha) B_{1p}$$

$$v_{p,1}(\tau) = -2 \frac{Q'_*(0)}{f(0)} \left(\frac{f(0)}{f(\tau)} \right)^{3/4} \frac{B_{1p}}{x_p} \exp[i\lambda_p(\tau)]$$

$$v_{p,2}(\tau) = -2 \frac{Q'_*(0)}{f(0)} \left(\frac{f(0)}{f(\tau)} \right)^{3/4} \sum_{j=1}^N \alpha_{pj}(\tau) \sin \beta_j(t) \exp[i\lambda_j(\tau)]$$

$$\lambda_j(\tau) = \alpha + \frac{1}{2} x_j \operatorname{tg} \alpha \ln \frac{f(\tau)}{f(0)}$$

$$j \neq p, \quad \alpha_{pj}(\tau) = 4 \frac{Q_*(\tau)}{f(\tau)} \cos \alpha \frac{R_{pj} B_{1j}}{x_p - x_j} \frac{1}{\omega_j(\tau)}$$

$$\alpha_{pp}(\tau) = 2 m_p(\tau) \frac{B_{1p}}{x_p}, \quad m_p(0) = \frac{Q'_*(0)}{Q'_*(0)} \frac{1}{|f(0)|^{3/2}} \left(\frac{2}{\varepsilon_* x_p} \right)^{1/2}$$

$$2 \omega_p \frac{d}{d\tau} m_p(\tau) - \cos^2 \alpha N_p \left(\frac{Q_*(\tau)}{f(\tau)} \right)^2 + \frac{1}{4} \cos \alpha \frac{Q'_*(\tau)}{f(\tau)} = 0$$

$$N_p = \frac{3}{16} + \sum_{k=1, k \neq p}^N R_{pk}^2 \left(1 + \frac{4x_p}{x_k - x_p} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \beta_p(t) = \omega_p(\tau), \quad \beta_p(0) = 0, \quad \omega_p(\tau) = \left(\frac{\varepsilon_* x_p}{2|f(\tau)|} \right)^{1/2}$$

Если цилиндр движется к границе раздела с постоянным ускорением a , то

$$f = Hh(\tau), \quad h(\tau) = 1 - \tau^2 \cos \alpha \quad (\cos \alpha > 0), \quad \varepsilon^2 = \left| \frac{a}{2H} \right|, \quad Q_*(\tau) = -2H\tau$$

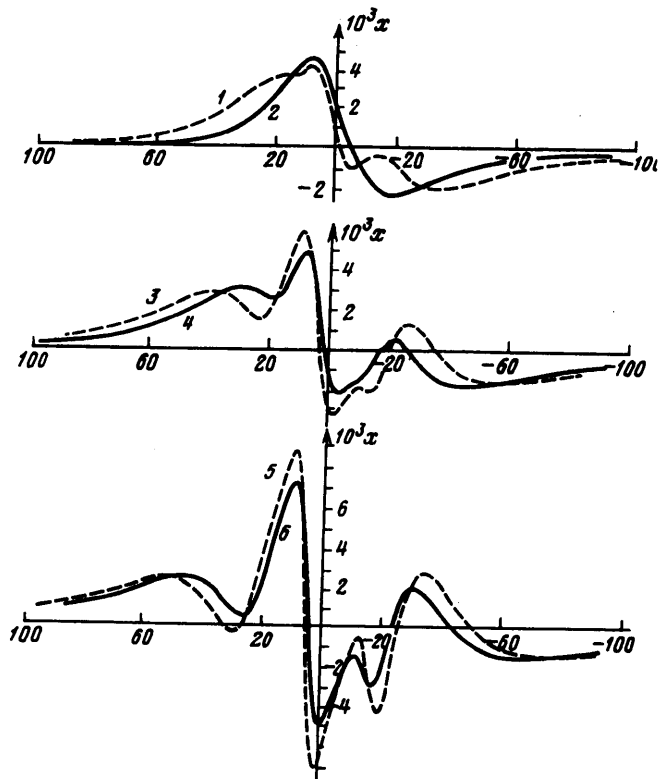
$$\omega_p(\tau) = \frac{\omega_p(0)}{\sqrt{h(\tau)}}, \quad \omega_p(0) = \sqrt{\frac{\varepsilon_* x_p}{2|H|}}, \quad \beta_p(t) = \omega_p(0) \frac{\arcsin(\varepsilon t \sqrt{\cos \alpha})}{\varepsilon \sqrt{\cos \alpha}} \quad (2.6)$$

$$m_p(\tau) = \frac{1}{\omega_p(0)} \left[2N_p \frac{\tau \cos \alpha}{\sqrt{h(\tau)}} + \left(\frac{1}{4} - 2N_p \right) \sqrt{\cos \alpha} \arcsin(\tau \sqrt{\cos \alpha}) \right]$$

На ограниченном интервале времени, пока цилиндр удален от границы раздела и применимы формулы (2.5), спектр волны на этой границе оценивается набором частот

$$\beta'_p(t) \pm \lambda'_p(\tau) = \omega_p(\tau) \pm \frac{Q_*(\tau)}{2f(\tau)} x_p \sin \alpha \varepsilon$$

Если цилиндр движется горизонтально, то $\cos \alpha = 0$, $\alpha_{ps} = 0$, $f(\tau) = f(0)$, $\omega_p(\tau) = \omega(0)$ и частоты остаются ограниченными на любом конечном интервале времени. Если цилиндр приближается к границе раздела ($f(\tau) \rightarrow 0$), то частоты неограниченно растут на конечном интервале времени. На границе раздела по курсу цилиндра формируется бурун, который "кипит" все интенсивнее по мере приближения цилиндра к границе. Фигуры 2 и 3 демонстрируют различия в эволюции границы раздела, возмущаемой



Фиг. 2. Эволюция границы раздела, возмущаемой ускоряющимся цилиндром; $\alpha = 1$, $\epsilon = 0,03$. Кривые 1–6 соответствуют значениям $s = \tau^2 = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

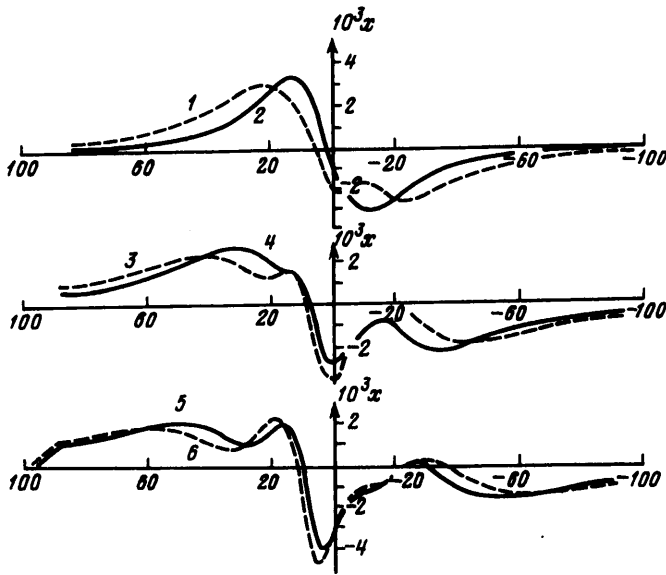
цилиндром, движущимся с постоянным ускорением, при $\cos\alpha > 0$ и $\cos\alpha = 0$. Фигура 2 показывает начальную стадию формирования буруна. Представленные на рисунках кривые описываются уравнениями $x = W_1(\theta, t)$, $y = (x - f(t))\text{tg}\theta + \phi(t)$, где функция $W_1(\theta, t)$ определяется формулами (2.2), (2.4)–(2.6). Фигуры 2, 3 отвечают углам наклона $\alpha = 1$ и $\pi/2$ соответственно. При $\alpha = 0$ цилиндр движется вертикально, при $\alpha = \pi/2$ – горизонтально. На рисунках указаны значения $s = \tau^2$, т.е. расстояние, пройденное цилиндром к моменту $t = \sqrt{s/\epsilon}$. К этому моменту вертикальная координата центра цилиндра равна $H + s\cos\alpha = -10 + s\cos\alpha$, горизонтальная – $ss\sin\alpha$. Формулы (2.2), (2.5) сохраняют силу на конечном интервале времени. Этот интервал ограничен, в частности, требованием, чтобы цилиндр находился достаточно далеко от границы раздела. Естественно, что большему значению угла α отвечает больший временной интервал, на котором эти формулы могут использоваться, и соответственно более развитая волновая картина. В [13] представлены аналогичные кривые для $\alpha = 0$ и $\alpha = 0,5$.

3. Волны, возбуждаемые колеблющимся цилиндром. Если цилиндр совершает почти периодические колебания, то

$$f(t) = H + ah(t)\cos\alpha, \quad \phi(t) = ah(t)\sin\alpha$$

$$h(t) = \sum_j (\alpha_j \cos\Omega_j t + \beta_j \sin\Omega_j t), \quad \sum_j (\alpha_j^2 + \beta_j^2)^{1/2} < \infty$$

Уравнения (1.2)–(1.5) и начальные условия (1.6) (с поправкой $f(0) = H + ah(0)\cos\alpha$, $\phi(0) = ah(0)\sin\alpha$) сохраняют силу; в (1.1) следует считать $Q(t) = ah'(t)$, $Q(0) = 0$.



Фиг. 3. То же, что на фиг. 2, для $\alpha = \pi/2$

Изучается движение жидкости, когда амплитуда колебаний цилиндра мала по сравнению с расстоянием до границы раздела. Решение задачи ищется в виде рядов по степеням малого параметра $\varepsilon = a/H$

$$g_j(\theta, t) = a[g_{j0} + \varepsilon g_{j1} + \varepsilon^2 g_{j2} + \dots] \quad (j = 1, 2),$$

$$W(\theta, t) = a[W_0(\theta, t) + \varepsilon W_1(\theta, t) + \varepsilon^2 W_2(\theta, t) + \dots]$$

Первые члены этих рядов представляются в свою очередь рядами

$$W_0(\theta, t) = \cos^2 \theta \sum_{k=1}^{+\infty} z_k(t) \cos(2k\theta - \alpha)$$

$$g_{1,0}(\theta, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta_k(t) \cos(k\theta - \alpha), \quad g_{2,0}(\theta, t) = \varepsilon_* \sum_{k=0}^{+\infty} v_k(t) \cos(2k\theta - \alpha) \quad (3.1)$$

$$\varepsilon_* = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1}, \quad v_0(t) = -\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k v_k(t)$$

$$\delta'_0(t) = -\frac{1}{2} v'_0(t) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\delta'_k(t)}{(-H)^k} \frac{1}{2^k} + \frac{1}{4} z_1, \quad \delta_0(0) = 0$$

$$\delta_1(t) = -2Q(t) - \frac{\varepsilon_*}{2|H|} v_1(t)$$

$$n \geq 2, \quad \delta_n(t) = \varepsilon_* \frac{H}{|H|} \frac{1}{(-H)^n} \sum_{k=1}^n v_k(t) \frac{1}{2^n} C_{k-1}^{n-1}, \quad C_k^n = \frac{k!}{n!(k-n)!}$$

Функции $z_n(t)$, $v_n(t)$ ($n = 1, 2, \dots$) являются решением следующей задачи Коши:

$$z'_n = \frac{\varepsilon_*}{|H|} \left[-n v_n + n m_n + \frac{1}{|H| \varepsilon_*} h' \delta_{n1} \right] \quad (3.2)$$

$$v'_n = \frac{1}{2} (z_{n-1} + 2z_n + z_{n+1}) + \varepsilon_* \frac{H}{|H|} m'_n + \frac{1}{H} h'' \delta_{n1}$$

$$m_n = \sum_{j=1}^{+\infty} \beta_{nj} v_j, \quad z_n(0) = v_n(0) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$j \leq n, \quad \beta_{nj} = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{H^{2k}} \frac{1}{2^k} C_k^n \frac{1}{2^k} C_{k-1}^{j-1}, \quad n\beta_{nj} = j\beta_{jn}$$

Здесь δ_{kj} – символ Кронекера.

Приближенное решение задачи (3.2) может быть получено двумя способами, описанными в [9] для аналогичной задачи.

Согласно одному способу, система (3.2) заменяется "усеченной" системой порядка $2N$ ($z_n(t) \equiv 0, v_n(t) \equiv 0$, если $n > N, N$ – натуральное число, выбирается произвольно). Решение задачи Коши для усеченной системы имеет вид

$$n = 1, 2, \dots, N, \quad z_n(t) = \frac{1}{H^2} \left(1 - \varepsilon_* \frac{H}{|H|} \right) \sum_{j=1}^N G_{nj} g_j \phi_j(t) \quad (3.3)$$

$$v_n(t) = \frac{1}{H} e h'(t) \delta_{n1} + \frac{1}{|H|} \left(1 - \varepsilon_* \frac{H}{|H|} \right) \sum_{j=1}^N Q_{nj} g_j F_j(t)$$

$$\phi_j(t) = \sum_p \frac{\Omega_p^2}{\Omega_p^2 - \omega_j^2} \left[\alpha_p (\cos \Omega_p t - \cos \omega_j t) + \beta_p \left(\sin \Omega_p t - \frac{\Omega_p}{\omega_j} \sin \omega_j t \right) \right]$$

$$F_j(t) = \sum_p \frac{\Omega_p^2}{\Omega_p^2 - \omega_j^2} \left[\alpha_p (\Omega_p \sin \Omega_p t - \omega_j \sin \omega_j t) - \beta_p \Omega_p (\cos \Omega_p t - \cos \omega_j t) \right]$$

Постоянные $e, G_{nj}, Q_{nj}, g_j, \omega_j$ представляются рядами, сходящимися быстрее геометрической прогрессии со знаменателем $1/H^2$. В частности

$$e = 1 + \frac{1}{4H^2} + O\left(\frac{1}{H^4}\right) \quad (k, j = 1, 2, \dots, N) \quad (3.4)$$

$$g_j = B_{1j} \left(1 + \frac{\varepsilon_*}{4H^2} \frac{H}{|H|} + O\left(\frac{1}{H^4}\right) \right), \quad k \neq j, \quad s_{kj} = \frac{B_{1k} B_{1j}}{x_k - x_j}, \quad s_{kk} = 0$$

$$G_{kj} = B_{kj} + \frac{1}{4H^2} \left(1 - \varepsilon_* \frac{H}{|H|} \right) x_j \sum_{p=1}^N B_{kp} s_{pj} + O\left(\frac{1}{H^4}\right)$$

$$Q_{kj} = \frac{1}{k} G_{kj} + \frac{1}{4H^2} G_{1j} \delta_{k1} + O\left(\frac{1}{H^4}\right)$$

$$\omega_j = \sqrt{\frac{\varepsilon_* u_j}{2|H|}}, \quad u_j = x_j \left[1 - \frac{1}{4H^2} \left(1 - \varepsilon_* \frac{H}{|H|} \right) B_{1j}^2 + O\left(\frac{1}{H^4}\right) \right]$$

Постоянные B_{kj}, x_j определены в (2.4).

Согласно второму способу решения, система дифференциальных уравнений (3.2) аппроксимируется счетной системой

$$z'_n(t) = -\frac{\varepsilon_*}{|H|} n v_n(t) + \frac{1}{H^2} h'(t) \delta_{n1} \quad (3.5)$$

$$v'_n(t) = \frac{1}{2} (z_{n-1} + 2z_n + z_{n+1}) + \frac{1}{H} h''(t) \delta_{n1}$$

$$z_n(0) = v_n(0) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Непосредственно проверяется, что решение задачи (3.5) отыскивается в форме

$$z_n(t) = (-1)^{n+1} \frac{1}{H^2} \left(1 - \varepsilon_* \frac{H}{|H|} \right) z_n^*(t) \quad (3.6)$$

$$\frac{\varepsilon_*}{|H|} v_n(t) = \frac{1}{nH^2} h'(t) \delta_{n1} + (-1)^n \frac{2}{H^2} \left(1 - \varepsilon_* \frac{H}{|H|} \right) \frac{dz_n^*}{dt}$$

$$z_n^*(t) = \sum_j \lambda_j^2 [\alpha_j F_{n-1}(\tau; \lambda_j) + \beta_j S_{n-1}(\tau; \lambda_j)]$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\varepsilon_*}{2|H|}}, \quad \tau = \sigma t, \quad \lambda_j \sigma = \Omega_j$$

$$F_n(\tau; \lambda) = \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} L_n^{(1)}(x^2) \frac{\cos(\lambda\tau) - \cos(x\tau)}{\lambda^2 - x^2} dx$$

$$S_n(\tau; \lambda) = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} L_n^{(1)}(x^2) \frac{x \sin(\lambda\tau) - \lambda \sin(x\tau)}{\lambda^2 - x^2} dx$$

Асимптотические свойства полиномов Лагерра [12] позволяют сделать вывод, что с ростом n функции F_n, S_n убывают по крайней мере как $n^{-1/4}$.

В заметке [14] введены и изучены функции

$$\mu_{nk}(\tau) = 2 \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} L_n(x^2) L_k(x^2) \cos(\tau x) dx$$

где полиномы Лагерра $L_n^{(1)}(u)$ и $L_n(u)$ связаны равенствами [12]

$$u L_n^{(1)}(u) = (n+1)[L_n(u) - L_{n+1}(u)], \quad L_0(u) = 1, \quad L_1(u) = 1 - u$$

Найдено [14]

$$\mu_{n+1,0}(\tau) - \mu_{n0}(\tau) = -2 \frac{d}{d\tau} \left[\frac{\mu_{n+1,0}(\tau)}{\tau} \right]$$

$$n \geq 1, \quad \mu_{n0}(\tau) = o(\tau), \quad \mu_{n0}(\tau) = -\frac{2}{\tau^2} + o\left(\frac{1}{\tau^2}\right)$$

Нетрудно видеть, что

$$\frac{\partial F_n(\tau; \lambda)}{\partial \tau} + \lambda S_n(\tau) = f_n(\tau), \quad \frac{\partial S_n(\tau; \lambda)}{\partial \tau} - \lambda F_n(\tau) = 0$$

$$f_n(\tau) = - \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} L_n^{(1)}(x^2) \sin(\tau x) dx = -(n+1) \frac{\mu_{n+1,0}(\tau)}{\tau}$$

$$F_n(0; \lambda) = 0, \quad S_n(0; \lambda) = 0$$

Интегрируя эту систему, приходим к формулам

$$F_n(\tau; \lambda) = H_n(\tau; \lambda) \cos(\lambda\tau) + G_n(\tau; \lambda) \sin(\lambda\tau), \quad (3.7)$$

$$S_n(\tau; \lambda) = -G_n(\tau; \lambda) \cos(\lambda\tau) + H_n(\tau; \lambda) \sin(\lambda\tau)$$

$$H_n(\tau; \lambda) = -(n+1) \int_0^\tau \frac{\mu_{n+1,0}(\tau_1)}{\tau_1} \cos(\lambda\tau_1) d\tau_1,$$

$$G_n(\tau; \lambda) = -(n+1) \int_0^\tau \frac{\mu_{n+1,0}(\tau_1)}{\tau_1} \sin(\lambda\tau_1) d\tau_1$$

Из свойств функций $\mu_{nk}(\tau)$ следует, что существуют пределы $H_n(+\infty, \lambda)$, $G_n(+\infty, \lambda)$, и если эти пределы подставить вместо $H_n(\tau, \lambda)$ и $G_n(\tau, \lambda)$ соответственно, то полученными соотношениями будет описываться установившийся режим (по крайней мере формальный). Справедливы формулы

$$G_n(+\infty, \lambda) = -\frac{1}{2} \pi \lambda^2 e^{-\lambda^2} L_n^{(1)}(\lambda^2) \quad (3.8)$$

$$H_n(+\infty, \lambda) = \frac{n+1}{\lambda} \int_0^{+\infty} V_n(u) h(u; \lambda) du, \quad V_n(u) = \sqrt{u} \frac{d}{du} (\sqrt{u} e^{-u} L_{n+1}(u))$$

$$h(u; \lambda) = (\lambda + \sqrt{u}) \ln(\lambda + \sqrt{u}) + (\lambda - \sqrt{u}) \ln|\lambda - \sqrt{u}| - 2\lambda \ln \lambda$$

4. Волновое сопротивление, испытываемое колеблющимся цилиндром. Давление жидкости на поверхность колеблющегося цилиндра дается формулой

$$P_+ = P(r, \theta, t)_{r=1+0} = -\gamma_+ \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t_+} - \frac{1}{2} a^2 (h'(t))^2 \cos(\theta - \alpha) + ah'(t) \sin(\theta - \alpha) \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_+} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta_+} \right)^2 + \cos \theta + f(t) \right] + P_0(t)$$

где γ_+ – плотность жидкости, соприкасающейся с цилиндром.

Предельное значение обобщенного потенциала скорости при $r \rightarrow 1 + 0$ равно

$$\Phi_+ = a \left[-\delta_0 \cos \alpha + \frac{1}{2} \varepsilon_* \frac{H}{|H|} v_0(t) \cos \alpha h'(t) \cos(\theta - \alpha) + \varepsilon_* \frac{H}{|H|} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(-H)^k} l_k(t) \cos(k\theta - \alpha) + O(\varepsilon) \right]$$

$$l_k(t) = \sum_{j=1}^k v_j(t) \frac{1}{2^k} C_k^j$$

Интегрируя давление по поверхности цилиндра, приходим к заключению, что вертикальная R_x и горизонтальная R_y составляющие силы, сила R волнового сопротивления, подъемная сила F , обусловленные существованием границы раздела, определяются формулами

$$R_x = -\gamma_+ \pi a \varepsilon_* \frac{1}{|H|} [\cos \alpha l_1'(t) + O(\varepsilon)], \quad R_y = -\gamma_+ \pi a \varepsilon_* \frac{1}{|H|} [\sin \alpha l_1'(t) + O(\varepsilon)]$$

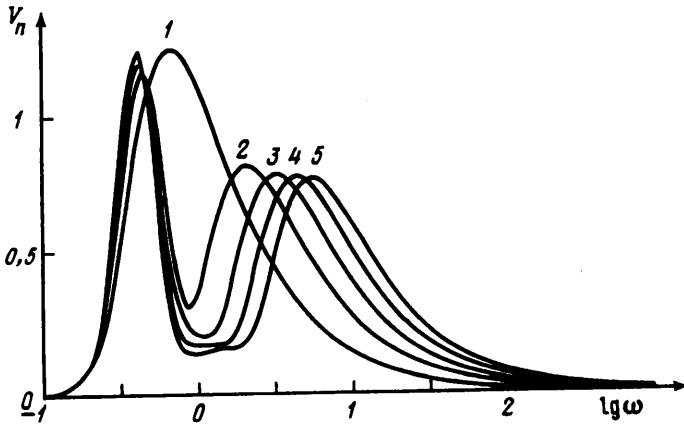
$$R = R_x \cos \alpha + R_y \sin \alpha = -\gamma_+ \pi a \varepsilon_* \frac{1}{|H|} [l_1'(t) + O(\varepsilon)]$$

$$F = R_x \sin \alpha - R_y \cos \alpha = (a/H) O(\varepsilon)$$

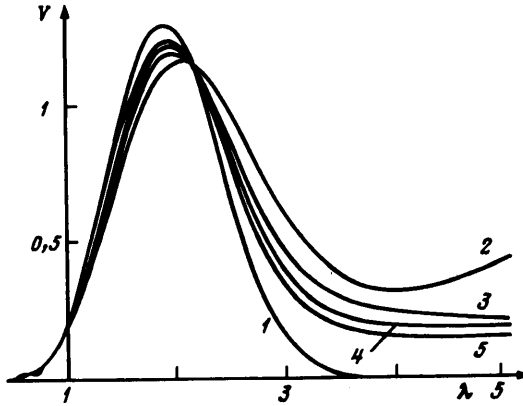
Пусть $h(t) = \cos \omega t$. Колебания цилиндра по заданному закону обеспечиваются соответствующей силой тяги, которую можно найти из уравнения Ньютона, как это сделано в [9] для шара. Как и для шара, введем обозначения $Q_n(\omega)$ для средней мощности силы тяги за первые n периодов и $Q(\omega)$ для средней (за период) мощности этой силы в установившемся режиме. Для достаточно больших значений $|H|$ из соотношений (3.3), (3.4) следует

$$Q_n(\omega) = -\gamma_+ \frac{a^2}{2|H|^3} \varepsilon_* \left(1 - \varepsilon_* \frac{H}{|H|} \right) V_n(\omega) < 0$$

$$V_n(\omega) = \frac{\omega}{2n} \sum_{j=1}^N x_j \left[B_{1j} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_j^2} \sin \left(\pi n \frac{\omega_j}{\omega} \right) \right]^2$$



Фиг. 4. Кривые $V_n(\omega)$, пропорциональные средней мощности $Q_n(\omega)$, поглощаемой двухслойной жидкостью за время nT , в зависимости от частоты ω колебаний цилиндра ($T\omega = 2\pi$, $n = 1, 2, 3, 4, 5$)



Фиг. 5. Кривая поглощения $V(\lambda)$ и графики $V_n(\lambda\sigma)$ ($n = 2, 3, 4, 5$) в зависимости от λ ($0,22\lambda = \omega$)

С другой стороны, из (3.6)–(3.8) следует

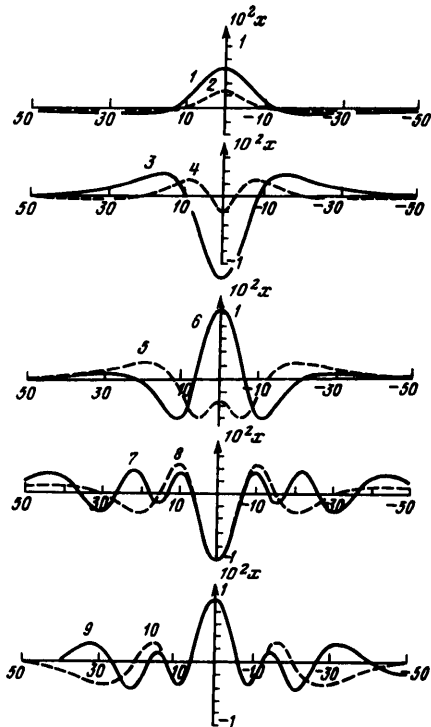
$$Q_n(\omega) = \frac{1}{4} \gamma_+ \frac{a^2}{|H|^3} \epsilon_* \left(1 - \epsilon_* \frac{H}{|H|} \right) \omega^4 I_n(\omega)$$

$$I_n(\omega) = \frac{1}{n} \int_0^{nT} \left[z_1^*(t) - \frac{1}{2} z_2^*(t) \right] \sin \omega t dt =$$

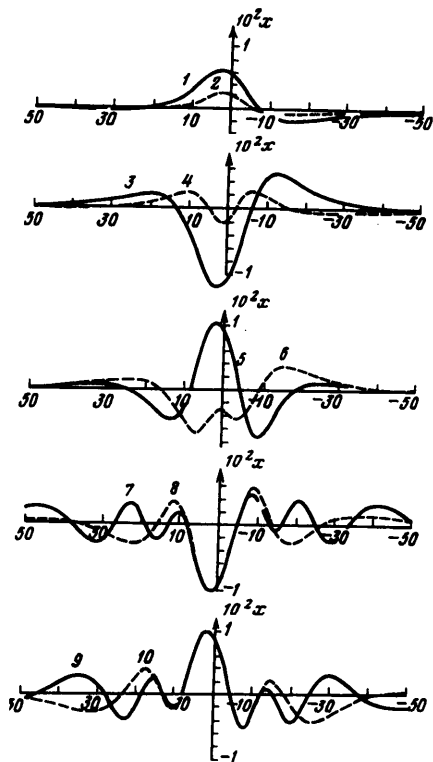
$$= -2 \frac{\omega}{n} \int_0^{+\infty} x^4 e^{-x^2} \left[\frac{1}{\omega^2 - \sigma^2 x^2} \sin \left(\frac{\sigma x}{\omega} - \pi n \right) \right]^2 dx < 0, \quad \sigma = \sqrt{\frac{\epsilon_*}{2|H|}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(\omega) = \frac{2\pi}{\sigma^3} \frac{1}{\lambda} g(\lambda), \quad \omega = \lambda\sigma, \quad g(\lambda) = G_0(+\infty; \lambda) - \frac{1}{2} G_1(+\infty; \lambda)$$

Если N достаточно велико, то с ростом n функция $V_n(\lambda\sigma)$ должна мало отличаться от $V(\lambda)$, где $V(\lambda) = \frac{1}{8} \pi^2 \sigma \lambda^7 e^{-\lambda^2}$.



Фиг. 6



Фиг. 7

Фиг. 6. Эволюция во времени границы раздела, возмущаемой гармонически колеблющимся цилиндром; $\omega = 0,5$, $\alpha = 0$. Кривые 1-10 отвечают значениям $s/\pi = \omega t/\pi = 1/3, 1, 4/3, 2, 7/3, 3, 4, 8, 5, 7$

Фиг. 7. Эволюция во времени границы раздела, возмущаемой гармонически колеблющимся цилиндром, $\alpha = 1$. Кривые 1-10 отвечают значениям $s/\pi = \omega t/\pi = 1/3, 1, 4/3, 2, 7/3, 3, 4, 8, 5, 7$

На фиг. 4 представлены (в логарифмической шкале) графики функций $V_n(\omega)$ для $n = 1, 2, 3, 4, 5$. На фиг. 5 представлены графики функций $V_n(\sigma\lambda)$ ($n = 2, 3, 4, 5$) и $V(\lambda)$ при $\sigma = 0,22$. Нетрудно видеть, что содержащийся в [9] комментарий к аналогичным фигурам сохраняет силу применительно к фиг. 4 и 5. Нетрудно выяснить, что с точностью до членов высшего порядка малости поглощаемая жидкостью мощность (в установившемся режиме) аддитивна относительно частотного спектра "входного" возмущения $ah(t)$. Другими словами, если цилиндр совершает почти периодические колебания, то поглощаемая жидкостью мощность равна сумме "парциальных" мощностей, соответствующих точкам частотного спектра возмущений $h(t)$. В этом отношении жидкость подобна осциллятору с кривой поглощения [15]

$$F = v\lambda^7 e^{-\lambda^2}, \quad v = \gamma_+ \frac{\pi^2 \epsilon_*}{16 |H|^3} \sqrt{\frac{\epsilon_*}{2|H|}} \left(1 - \epsilon_* \frac{H}{|H|}\right)$$

или

$$F(\omega) = \frac{1}{2} \pi^2 \gamma_+ \frac{1}{\epsilon_*^2} \left(1 - \epsilon_* \frac{H}{|H|}\right) \omega^7 \exp\left(-2 \frac{|H|}{\epsilon_*} \omega^2\right)$$

В размерных величинах парциальная мощность, поглощаемая жидкостью на частоте Ω , равна

$$F_*(\Omega)A^2 = \frac{1}{2} \pi^2 \gamma \frac{A^2}{\epsilon_*^2} \left(1 - \epsilon_* \frac{H}{|H|} \right) \frac{R_0^5}{g^2} \Omega^7 \exp\left(-\frac{2l}{g\epsilon_*} \Omega^2\right)$$

где R_0 – радиус цилиндра, A – амплитуда гармонической составляющей колебания цилиндра, Ω – частота (рад/с), $l = |H|R_0 \gg R_0$ – расстояние от равновесной границы раздела $x = 0$ до цилиндра, g – ускорение свободного падения, γ – плотность прилегающей к цилиндру жидкости. Если цилиндр колеблется под свободной поверхностью, то

$$F_*(\Omega)A^2 = \pi^2 \gamma A^2 \frac{R_0^5}{g^2} \Omega^7 \exp\left(-2\frac{l}{g} \Omega^2\right)$$

На фиг. 6, 7 представлена эволюция во времени границы раздела, возмущаемой гармонически колеблющимся цилиндром, движущимся под углом $\alpha = 0$ и 1 соответственно. Кривые описываются уравнениями

$$x = aW_0(\theta, t), \quad y = [x - f(t)] \operatorname{tg} \theta + \phi(t), \quad f(t) = H + a \cos \omega t \cos \alpha, \quad \phi(t) = a \cos \omega t \sin \alpha.$$

где $W_0(\theta, t)$ определяется формулами (3.1), (3.3), (3.4). Параметры: $a = 1$, $\epsilon_* = 0,95$, $H = -10$, $N = 30$. Частота $\omega = 0,5$ близка к значению, при котором достигается максимум кривой поглощения. В подписях к фигурам указаны значения $s = \omega t$, так что $s/(2\pi)$ – время в долях периода. Кривые 8 и 9 разделены временным интервалом в $1/2$ периода, кривые 9 и 10 разделены интервалом в 1 период. После восьми периодов часть границы раздела в области $y < 10$ колеблется практически в установившемся режиме. Видно, что волны уходят в бесконечность, причем высота гребней убывает с ростом y как $1/y^2$ (согласно формуле (3.1)). Отметим, что, согласно результатам, указанным в [8, с. 160, формулы (8), (9); с. 173], гармонически колеблющийся цилиндр возбуждает на свободной поверхности гармоническую бегущую волну постоянной амплитуды. Различие результатов, содержащихся в предлагаемой статье и в [8], объясняется различиями в постановке задачи и в методах ее решения. Эти различия обсуждаются в [9, 16].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стурова И.В. Численные расчеты в задачах генерации плоских поверхностных волн: Препринт № 5. Красноярск: ВЦ СО АН СССР, 1990. 48 с.
2. Haussling H.J., Coleman R.M. Finite-difference computations using boundary-fitted co-ordinates for free-surface potential flows generated by submerged bodies // Proc. 2nd Intern. Conf. Numerical Ship Hydrodyn. Berkley: Univ. California, 1977. P. 221–233.
3. Haussling H.J., Coleman R.M. Nonlinear water waves generated by an accelerated circular cylinder // J. Fluid Mech. 1979. V. 92. № 4. P. 767–781.
4. Liu P.L.-F., Liggett J.A. Boundary element formulation and solutions for some non-linear water wave problems // Developments Boundary Element Methods-3. London. N.Y.: Elsevier. 1984. V. 3. P. 171–189.
5. Степанянец Ю.А., Стурова И.В., Теодорович Э.В. Линейная теория генерации поверхностных и внутренних волн // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. М.: ВИНТИ, 1987. Т. 21. С. 93–179.
6. Wu G.X. Hydrodynamic forces on a submerged circular cylinder undergoing large-amplitude motion // J. Fluid Mech. 1993. V. 254. P. 41–58.
7. Туванд Педер А., Милох Товива. Free-surface flow generated by a small submerged circular cylinder starting from rest // J. Fluid Mech. 1995. V. 286. P. 103–116.
8. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 815 с.
9. Гильман О.А., Миндлин И.М. Волны в тяжелой двухслойной жидкости, возбуждаемые колеблющимся твердым телом // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 2. С. 120–133.

10. Миндлин И.М. Нелинейные волны в тяжелой двухслойной жидкости, порождаемые начальным возмущением горизонтальной границы раздела // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 135–143.
11. Миндлин И.М. Новый метод в нелинейных задачах о волнах в тяжелой слоистой жидкости, возбуждаемых вертикально движущимся твердым телом // Изв. АН ССР. МЖГ. 1991. № 5. С. 151–160.
12. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1976. 327 с.
13. Гильман О.А., Миндлин И.М. Нелинейные волны в тяжелой слоистой жидкости, возбуждаемые твердым телом, движущимся под углом к горизонту. Н. Новгород, Нижегород. техн. ун-т, 1995. – Деп. в ВИНТИ 26.12.95. № 3476-В95. 64 с.
14. Миндлин И.М. Нелинейные волны в тяжелой двухслойной жидкости, порождаемые протяженным начальным возмущением горизонтальной границы раздела: точное решение // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 6. С. 165–168.
15. Пейн Г. Физика колебаний и волн. М.: Мир, 1979. 389 с.
16. Миндлин И.М. Интегриродифференциальные уравнения в динамике слоистой жидкости. М.: Наука-Физматлит, 1996. 304 с.

Нижний Новгород

Поступила в редакцию
16.VII.1996