

УДК 532.546:532.68

© 1998 г. М.Б. ПАНФИЛОВ, И.В. ПАНФИЛОВА

## ОСРЕДНЕННАЯ МОДЕЛЬ С КАПИЛЛЯРНОЙ НЕРАВНОВЕСНОСТЬЮ ДЛЯ ДВУХФАЗНОГО ТЕЧЕНИЯ В СИЛЬНО НЕОДНОРОДНОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Исследуется двухфазное течение через среду с двойной пористостью, когда абсолютная проницаемость и функция капиллярного давления составляющих элементов различаются порядком величин. Предложена классификация и диаграмма элементарных течений на уровне одной ячейки. Осредненная модель разработана для одного класса систем, в которых на блоках доминирует капиллярно-дисперсионное течение источникового типа. Она содержит нелинейное кинетическое соотношение для средних значений функций капиллярного давления. Предложено разложение эффективного тензора фазовых проницаемостей, допускающие эффективные способы его вычисления. Время капиллярной релаксации явно определено. Приводятся примеры расчетов тензора осредненных фазовых проницаемостей и времени капиллярной релаксации.

Проблема усреднения двухфазного течения в пористой среде тесно связана с практической потребностью инженеров-нефтяников вычислять псевдофазовые проницаемости. Решение этой проблемы для умеренно неоднородной среды в настоящее время достаточно разработано. В случае, когда функции фазовых проницаемостей и капиллярного давления идентичны во всех частях среды, показано, что осредненная модель имеет тот же тип, что и исходная [1–3]. Случай, когда упомянутые функции неодинаковы на разных частях среды, исследовался методом крупномасштабного усреднения [4, 5], асимптотических разложений [6], двухмасштабной сходимости [7]. Показано, что осредненная модель соответствует процессу после установления капиллярного равновесия. Поле насыщенности имеет разрывы. При малых временах, на неравновесной стадии, решение проблемы получено в [4, 7] в форме с нерасщепляющимися быстрыми и медленными переменными.

Двухфазное течение через сильно неоднородную среду в рамках теории осреднения не исследовано. В данной статье сильно неоднородной называется среда, чьи компоненты сильно различаются по проницаемости, а также по порядку величин функций капиллярного давления.

Проблема сильно неоднородной среды тесно связана с проблемой неравновесных явлений в многофазном фильтрационном потоке. В [8] было предложено учитывать эффекты неравновесности с помощью кинетических соотношений для фазовых проницаемостей, а в [9] – для капиллярного давления. Однако для времен релаксации оценки не были получены. Более того, в теории осреднения подобные кинетические соотношения до сих пор не были подтверждены. Оценки для времен перераспределения потоков при однофазном течении показали [10], что время установления равновесия пропорционально квадрату масштаба неоднородности и отношению проницаемостей блоков и трещин. Это означает, что в среде с умеренной неоднородностью релаксация происходит очень быстро и не может быть уловлена. С другой стороны, ясно, что время релаксации становится значительным в сильно неоднородной среде.

В настоящей статье показано методом асимптотических разложений, что в осред-

ненной модели двухфазного течения в сильно неоднородной среде действительно возникают эффекты неравновесности. Они могут быть описаны нелинейными релаксационными соотношениями. Время капиллярной релаксации полностью определено как функция насыщенности.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим двухфазный поток в среде, имеющей форму связанной высоко проницаемой системы  $\Omega_2$  ("трещины") и плотных периодически расположенных отдельных блоков  $\Omega_1$ . Каждая из подобластей  $\Omega_i$  характеризуется глобальной проницаемостью  $K^i$ , пористостью  $m^i$ , функцией относительной фазовой проницаемости  $\alpha$ -й фазы  $k_\alpha^i(s)$ , а также функцией капиллярного давления  $P_c^i(s)$ . Объемные доли блоков и трещин одного порядка. Таким образом, исследуются среды с двойной пористостью.

Уравнения двухфазной фильтрации относительно водонасыщенности  $s$  и давления воды  $P$  запишем в форме

$$L^2 m \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial s}{\partial t} = \operatorname{div} \left( K \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{k_1(s; x/\varepsilon)}{\mu_1} \operatorname{grad} P \right), \quad t > 0 \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} \left( K \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \left( \frac{k_1(s; x/\varepsilon)}{\mu_1} + \frac{k_2(s; x/\varepsilon)}{\mu_2} \right) \operatorname{grad} P \right) + \operatorname{div} \left( K \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{k_2(s; x/\varepsilon)}{\mu_2} \operatorname{grad} P_c \left( s; \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) = 0$$

$$x \in \Omega / \Gamma, \quad \Omega \in R^N, \quad N \geq 2 \quad (1.2)$$

$$[P]_\Gamma = 0, \quad [P_c]_\Gamma = 0 \quad (1.3)$$

$$\left[ \frac{Kk_1}{\mu_1} \frac{\partial P}{\partial n} \right]_\Gamma = 0, \quad \left[ \left( \frac{Kk_1}{\mu_1} + \frac{Kk_2}{\mu_2} \right) \frac{\partial P}{\partial n} + \frac{Kk_2}{\mu_2} \frac{\partial P_c}{\partial n} \right]_\Gamma = 0 \quad (1.4)$$

$$P(x, 0) = P^0(x), \quad s(x, 0) = s^0(x) \quad (1.5)$$

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2; \quad \Omega_1 = \cup \partial \Omega_1^{(i)}; \quad \Omega_1^{(i)} \cap \Omega_1^{(j)} = \emptyset, \quad i \neq j; \quad \Gamma = \cup \partial \Omega_1^{(i)}; \quad K = K^i; \quad m = m^i;$$

$$P_c = P_c^i; \quad k_\alpha = k_\alpha^i, \quad \alpha = 1, 2; \quad x \in \Omega_i, \quad i = I, II; \quad K^I = \operatorname{const}; \quad K^{II} = \operatorname{const}$$

$$m^I = \operatorname{const}; \quad m^{II} = \operatorname{const}$$

где  $n$  – вектор внешней нормали к границе;  $\varepsilon$  – период функций  $K, m, P_c, k_\alpha$  по пространственным переменным  $x$ .

Переменная  $x$  безразмерная и ее величина порядка единицы соответствует характерной макродлине  $L$ .

Условия (1.3) означают, что обе фазы предполагаются непрерывными в каждой точке  $x$  в любой момент времени  $t$ . Это предположение требует равенства областей определения функций  $k_\alpha^I(s)$  и  $k_\alpha^{II}(s)$ , а также  $P_c^I(s)$  и  $P_c^{II}(s)$ . Таким образом, принимается, что  $s_* \leq s \leq s^*$  и величины  $s_*, s^*$  не зависят от среды для всех этих функций.

Наряду с областью  $\Omega$  рассмотрим отображение  $y = x/\varepsilon$  ее отдельного периодического элемента на ячейку  $Y = \{-1/2 < y_i < 1/2, i = 1, \dots, N\}$ . Поверхность  $\Gamma = \partial Y_1$  разбивает ее на две подобласти:  $Y_1$  (блок) и  $Y_2$  (трещина), и  $\Gamma \cup \partial Y = \emptyset$ . Показатели  $K(y), m(y), k_\alpha(s, y), P_c(s, y)$  претерпевают скачок первого рода на  $\Gamma$ .

Коэффициенты  $K, m > 0$ ; производные  $dP_c^i / ds < 0$  для любых  $s, i$ . Обозначим:  $\omega_K \equiv K^I / K^{II}$ ,  $\omega_m \equiv m^I / m^{II}$ ,  $\omega_c \equiv P_c^{I,0} / P_c^{II,0}$ . Параметры  $P_c^{I,0}, P_c^{II,0}$  являются характерными

величинами капиллярного давления в соответствующей среде. Примем следующие ограничения:

$$\varepsilon \ll 1, \quad \omega_K \ll 1, \quad \omega_c \gg 1, \quad \omega_m \sim 1 \quad (1.6)$$

Второе и третье соотношения в (1.6) – условия сильной неоднородности, последнее соответствует реальным ситуациям, имеющим место для естественных пористых сред в подземных пластах.

Будем рассматривать поведение этой модели при  $\varepsilon, \omega_K, \omega_c^{-1} \rightarrow 0$ . Из-за последнего условия в (1.6) на  $\omega_m$  имеем три независимых параметра

$$\varepsilon, \quad \text{Pe} \equiv \frac{1}{\omega_c} \equiv \frac{P_c^{I,0}}{P_c^{II,0}} \equiv \frac{P_c^I}{\Delta P}, \quad \varepsilon_p \equiv \frac{\varepsilon^2 \omega_m}{\omega_K}$$

Параметр  $\varepsilon_p$  имеет смысл отношения времен распространения конвективной волны насыщенности через блок и через всю систему трещин;  $\text{Pe}$  – число Пекле (или "капиллярное число") в блоках.

**2. Расширение задачи.** Применим технику неравномерного осреднения [10], которая требует введения расширенной задачи для расширенных переменных:  $p' = p(x, y, t)$ ,  $s' = s(x, y, t)$ ,  $y = x/\varepsilon$ . Штрих будет опущен везде.

После перенормировки переменных и некоторых преобразований расширенная задача примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \text{Pe} \varepsilon_p \partial_\tau s &= (\text{Pe} \lambda \nabla_i^\varepsilon p + \lambda_2 \nabla_i^\varepsilon p_c) \nabla_i^\varepsilon F + L_{\lambda_2 F}^I p_c + \varepsilon L_{\lambda_2 F}^{*I} p_c \\ \text{Pe} (L_\lambda^I p + \varepsilon L_\lambda^{*I} p) &= L_{\lambda_2}^I p_c + \varepsilon L_{\lambda_2}^{*I} p_c, \quad y \in Y_1 \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \partial_\tau s &= (\lambda \nabla_i^\varepsilon p + \lambda_2 \nabla_i^\varepsilon p_c) \nabla_i^\varepsilon F + L_{\lambda_2 F}^{II} p_c + \varepsilon L_{\lambda_2 F}^{*II} p_c \\ L_\lambda^{II} p + \varepsilon L_\lambda^{*II} p &= L_{\lambda_2}^{II} p_c + \varepsilon L_{\lambda_2}^{*II} p_c, \quad y \in Y_2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$[p] = 0, \quad p_c^I = \text{Pe} p_c^{II}, \quad y \in \Gamma \quad (2.3)$$

$$\frac{\varepsilon_2 \omega_m}{\varepsilon_p} \lambda_1^I \nabla_i^\varepsilon p^I n_i = \lambda_1^{II} \nabla_i^\varepsilon p^{II} n_i, \quad y \in \Gamma \quad (2.4)$$

$$\frac{\varepsilon_2 \omega_m}{\varepsilon_p} (\lambda^I \nabla_i^\varepsilon p^I + \text{Pe}^{-1} \lambda_2^I \nabla_i^\varepsilon p_c^I) n_i = (\lambda^{II} \nabla_i^\varepsilon p^{II} + \lambda_2^{II} \nabla_i^\varepsilon p_c^{II}) n_i, \quad y \in \Gamma \quad (2.5)$$

$$p(x, y, 0) = p^0(x) = P^0(x) / \Delta P, \quad s(x, y, 0) = s^0(x) \quad (2.6)$$

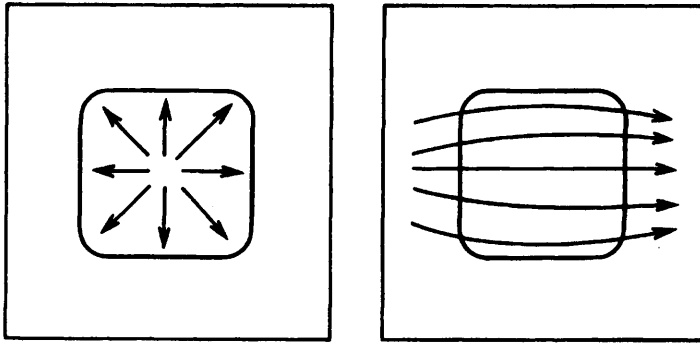
$$L_\gamma^i \equiv \partial_k (\gamma^i \partial_k), \quad L_\gamma^{*i} \equiv \partial_k (\gamma^i \partial_{xk}) + \partial_{xk} (\gamma^i (\partial_k + \varepsilon \partial_{xk}))$$

$$\nabla_k^\varepsilon \equiv \partial_k + \varepsilon \partial_{xk}, \quad \partial_k \equiv \frac{\partial}{\partial y_k}, \quad \partial_{xk} \equiv \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad \partial_\tau \equiv \frac{\partial}{\partial \tau}$$

Интегральные соотношения, играющие роль условий существования периодического решения для задачи (2.1), (2.2), могут быть получены интегрированием уравнений (2.1), (2.2) по всей ячейке  $Y$

$$\varepsilon [\omega_m \langle \partial_\tau s \rangle_1 + \langle \partial_\tau s \rangle_2] = (\varepsilon^2 \omega_m / \varepsilon_p) \langle \partial_{xi} (\lambda_1^I (\nabla_i^\varepsilon p)) \rangle_1 + \langle \partial_{xi} (\lambda_1^{II} (\nabla_i^\varepsilon p)) \rangle_2 \quad (2.7)$$

$$\frac{\varepsilon^2 \omega_m}{\varepsilon_p} \langle \partial_{xi} (\lambda^I (\nabla_i^\varepsilon p)) \rangle_1 + \langle \partial_{xi} (\lambda^{II} (\nabla_i^\varepsilon p)) \rangle_2 = \frac{\varepsilon^2 \omega_m}{\varepsilon_p \text{Pe}} \langle \partial_{xi} (\lambda_2^I (\nabla_i^\varepsilon p_c)) \rangle_1 + \langle \partial_{xi} (\lambda_2^{II} (\nabla_i^\varepsilon p_c)) \rangle_2 \quad (2.8)$$



Фиг. 1. Источниковое (а) и трансляционное (б) течения в ячейке

$$P^i \equiv \frac{P^i}{\Delta P}, \quad P_c^i(s) \equiv -\frac{P_c^i(s)}{P_c^{i,0}}, \quad \tau \equiv \frac{t}{t_*}, \quad t_* \equiv \frac{m^{\text{II}} \mu_2 L^2}{K^{\text{II}} \Delta P}, \quad \mu \equiv \frac{\mu_1}{\mu_2}, \quad \Delta P \equiv P_c^{\text{II},0}$$

$$\lambda_{\alpha}^{\text{I}}(s) \equiv \frac{k_{\alpha}^{\text{I}}(s)}{\mu}, \quad \lambda_{\alpha}^{\text{II}}(s) \equiv k_{\alpha}^{\text{II}}(s), \quad \lambda^i(s) \equiv \lambda_1^i(s) + \lambda_2^i(s), \quad F^i(s) \equiv \frac{\lambda_1^i(s)}{\lambda^i(s)}$$

где символ  $\langle \rangle_i$  означает интеграл по  $Y_i$ .

Из-за принятого способа перенормировки переменных безразмерное капиллярное давление становится разрывным и имеем (2.3) вместо (1.3).

Характерный перепад давления  $\Delta P$  выбран равным характерному капиллярному давлению в среде II, что означает равновесие между гидродинамическими и капиллярными силами в высокопроницаемой подобласти. В связи с этим все члены в уравнениях (2.2) для трещин будут порядка единицы.

**3. Элементарные течения в ячейке.** Исследуем картину течений на микроуровне в среде I. Полный анализ на физическом уровне возможен на базе первого уравнения переноса насыщенности в (2.1).

Три слагаемых в правой части соответствуют трем типам элементарных течений, которые различаются между собой по физической природе и по геометрии потоков. По физической природе возможны два типа течений: конвективное (С) и диффузионное (D), которое в исследуемом процессе связано с капиллярной дисперсией. По геометрии потоков возможны также два типа течений (фиг. 1): источниковое (S), направленное равномерно во все стороны от центра блока к периферии или, наоборот, при любой ориентации течения в трещинах, и трансляционное (Т), направленное через блок вдоль течения в окружающих трещинах.

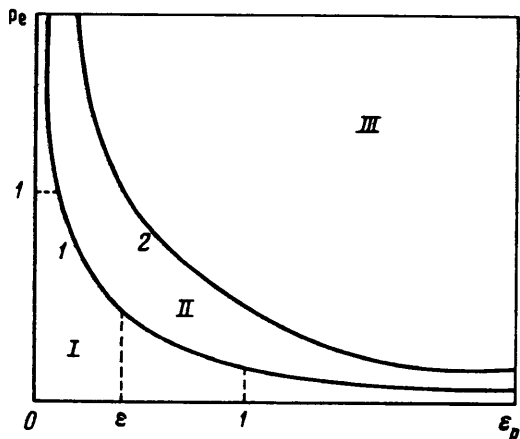
Четыре возможные комбинации дают четыре элементарных типа течений в ячейке, лишь три из которых реализуются в исследуемом процессе. Последовательным слагаемым в правой части первого уравнения (2.1) соответствуют следующие типы течений.

С–Т-Течение, представляющее собой трансляцию через систему изолированных блоков конвективных потоков насыщенности, вызываемую макроскопическим градиентом давления в трещинах.

D–S-Течение, представляющее собой капиллярную дисперсию источникового типа, вызываемую различием между средними насыщенностями блока и трещины.

D–Т-Течение, представляющее собой трансляцию через блоки диффузионных потоков, происходящую в направлении осредненного градиента насыщенности в трещине и связанную с капиллярной дисперсией.

Еще один тип течения – С–S (конвективное источниковое), вызванный разницей в средних давлениях блока и трещины, в данной модели оказывается невозможным из-



Фиг. 2. Диаграмма преобладания элементарных течений: I – D–T–течение, II – D–S–течение, III – D–T–течение

за несжимаемости жидкостей. В более общем случае, когда поле давлений нестационарно, этот тип течений также имеет место, как показано в работе [11], где рассмотрен линейный случай.

Различные соотношения параметров обуславливают преобладание того или иного типа элементарных течений. Асимптотический анализ уравнений (2.1) позволяет до решения задачи построить полную классификацию возможных систем по преобладающему типу элементарного течения (фиг. 2). Кривые 1 и 2 – функции  $Pe = \epsilon/\epsilon_p$  и  $Pe = 1/\epsilon_p$ . Параметр  $\epsilon_p$  – мера нестационарности: чем больше  $\epsilon_p$ , тем больше нестационарные эффекты. Границы зон на диаграмме соответствуют сосуществованию двух типов течений эквивалентной интенсивности. Нет ни одной точки сосуществования трех типов течений.

Преобладание дисперсии, когда  $Pe \rightarrow \infty$  в области II, можно легко объяснить, если учесть, что величины  $\epsilon_p, \epsilon_p Pe$  соответствуют характерному времени распространения конвективной и диффузионной волн. Верхняя часть области II соответствует состоянию, когда конвективная волна уже прошла. При этом характерное время пробегания диффузионной волны очень велико.

В данной статье исследуются только D–S–системы.

**4. Асимптотические разложения.** Выберем D–S–систему, положив  $\epsilon/\epsilon_p < Pe < 1/\epsilon_p$ . Допустим также, что  $\epsilon_p < 1$ , так что  $\epsilon_p Pe < 1$ .

Решение задачи (2.1)–(2.3), (1.3) ищем в виде

$$\begin{aligned}
 s &= s_0^I(x, \tau) + \epsilon_p Pe s_{01}^I(x, y, \tau) + \epsilon s_{10}^I(x, y, \tau) + \dots \\
 p &= p_0(x, \tau) + \epsilon_p Pe p_{01}^I(x, y, \tau) + \epsilon p_{10}^I(x, y, \tau) + \epsilon \epsilon_p p_{11}^I(x, y, \tau) + \dots \\
 p_c &= Pe p_{c0}(x, \tau) + \epsilon_p Pe p_{c01}^I(x, y, \tau) + \epsilon p_{c10}^I(x, y, \tau) + \dots, \quad y \in Y_1
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}
 s &= s_0^{II}(x, \tau) + \epsilon_p s_{01}^{II}(x, \tau) + \epsilon s_{10}^{II}(x, y, \tau) + \dots \\
 p &= p_0(x, \tau) + \epsilon_p p_{01}^{II}(x, \tau) + \epsilon p_{10}^{II}(x, y, \tau) + \epsilon \epsilon_p p_{11}^{II}(x, y, \tau) + \dots \\
 p_c &= p_{c0}(x, \tau) + \epsilon_p p_{c01}^{II}(x, \tau) + \epsilon p_{c10}^{II}(x, y, \tau) + \epsilon \epsilon_p p_{c11}^{II}(x, y, \tau) + \dots, \quad y \in Y_2
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Чтобы определить решение порядка  $O(\epsilon + \epsilon_p Pe)$ , достаточно найти члены  $s_0^I(x, \tau)$ ,

$s_{01}^I(x, y, \tau)$ ,  $s_{10}^I(x, y, \tau)$  в  $Y_1$ ;  $s_0^II(x, \tau)$ ,  $s_{01}^II(x, \tau)$ ,  $s_{10}^II(x, y, \tau)$  в  $Y_2$  для насыщенности;  $p_0(x, \tau)$ ,  $p_{01}^I(x, y, \tau)$ ,  $p_{10}^I(x, y, \tau)$ ,  $p_{11}^I(x, y, \tau)$  в  $Y_1$ ;  $p_{01}^II(x, \tau)$ ,  $p_{10}^II(x, y, \tau)$ ,  $p_{11}^II(x, y, \tau)$  в  $Y_2$  для давления.

После подстановки этих разложений в (2.1)–(2.8) получим

$$p_{01}^I = \frac{1}{\lambda_{10}^I} \frac{\partial s_0^I}{\partial \tau} \varphi(y) + p_{01}^II(x, \tau), \quad p_{c01}^I = \frac{\lambda_0^I}{\lambda_{10}^I \lambda_{20}^I} \frac{\partial s_0^I}{\partial \tau} \varphi(y) + p_{c01}^II(x, \tau)$$

$$p_{10}^II = \Psi_k^II(y) \partial_{xk} p_c + p_{10}^*(x, \tau), \quad p_{11}^II = \Psi_k^II(y) \partial_{xk} p_{01}^II + p_{11}^*(x, \tau)$$

$$p_{c10}^II = \Psi_k^II(y) \partial_{xk} p_{c0} + p_{c10}^*(x, \tau), \quad p_{c11}^II = \Psi_k^II(y) \partial_{xk} p_{c01}^II + p_{c11}^*(x, \tau)$$

$$p_{10}^I = \Psi_k^I(y) \partial_{xk} p_0 + p_{10}^*(x, \tau), \quad p_{11}^I = \Psi_k^I(y) \partial_{xk} p_{01}^I + p_{11}^*(x, \tau)$$

$$p_{c10}^I = \Psi_k^I(y) \partial_{xk} p_{c0} + p_{c10}^*(x, \tau), \quad p_{c11}^I = \Psi_k^I(y) \partial_{xk} p_{c01}^I + p_{c11}^*(x, \tau)$$

Здесь функции на ячейке определены следующим образом:

$$\partial_i(\partial_i \varphi) = 1, \quad y \in Y_1; \quad \varphi|_{\Gamma} = 0 \quad (4.3)$$

$$\partial_i(\partial_i \Psi_k^II + \delta_{ki}) = 0, \quad y \in Y_2; \quad (\partial_i \Psi_k^II + \delta_{ki}) n_i|_{\Gamma} = 0; \quad \langle \Psi_k^II \rangle_2 = 0 \quad (4.4)$$

$$\partial_i(\partial_i \Psi_k^I + \delta_{ki}) = 0, \quad y \in Y_1; \quad \Psi_k^I|_{\Gamma} = \Psi_k^II|_{\Gamma}$$

где  $\Psi_k^II$  – одно-периодическая функция.

Интегральные соотношения (2.7), (2.8) дают следующие уравнения для членов нулевого порядка:

$$\partial_{\tau} S_0 = \partial_{xi} (\lambda_{10}^II \langle \partial_i \Psi_k^II + \delta_{ik} \rangle_2 \partial_{xk} p_0), \quad S_0 = \omega_m \alpha s_0^I + (1 - \alpha) s_0^II \quad (4.5)$$

$$\partial_{\tau} (\alpha \omega_m \langle s_{01}^I \rangle_1 + (1 - \alpha) s_{01}^II) = \partial_{xi} ((\lambda_{10}^II)' s_{01}^II \langle \partial_i \Psi_k^II + \delta_{ki} \rangle_2 \partial_{xk} p_0) \quad (4.6)$$

$$\partial_{xi} (\lambda_0^II \langle \partial_i \Psi_k^II + \delta_{ki} \rangle_2 \partial_{xk} p_0) = \partial_{xi} (\lambda_{20}^II \langle \partial_i \Psi_k^II + \delta_{ki} \rangle_2 \partial_{xk} p_{c0}) \quad (4.7)$$

$$\partial_{xi} (\lambda_0^II \langle \partial_i \Psi_k^II + \delta_{ki} \rangle_2 \partial_{xk} p_{01}^II) = \partial_{xi} (\lambda_{20}^II \langle \partial_i \Psi_k^II + \delta_{ki} \rangle_2 \partial_{xk} p_{c01}^II) \quad (4.8)$$

$$\partial_{xi} ((\lambda_0^II)' \langle s_{01}^II \rangle_2 \langle \partial_i \Psi_k^II + \delta_{ki} \rangle_2 \partial_{xk} p_0) = \partial_{xi} ((\lambda_{20}^II)' \langle s_{01}^II \rangle_2 \langle \partial_i \Psi_k^II + \delta_{ki} \rangle_2 \partial_{xk} p_{c0}) \quad (4.9)$$

Кроме того, имеются соотношения для функций капиллярного давления в форме рядов Тейлора

$$p_c^I = p_c^I(s_0^I) + \varepsilon_p \text{Pe} (p_c^I(s_0^I))' s_{01}^I + \varepsilon (p_c^I(s_0^I))' s_{10}^I + \dots \quad (4.10)$$

$$p_c^II = p_c^II(s_0^II) + \varepsilon_p \text{Pe} (p_c^II(s_0^II))' s_{01}^II + \varepsilon (p_c^II(s_0^II))' s_{10}^II + \dots \quad (4.11)$$

Соотношения для членов нулевого порядка  $p_{c0}$  вытекают из условий на границе для капиллярного давления (3.3) и представлений (4.2), (4.10)

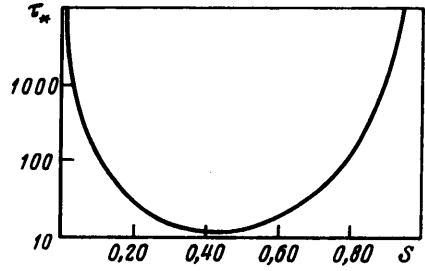
$$p_c^I(s_0^I) = \text{Pe} p_c^II(s_0^II), \quad p_{c0} = p_c^II(s_0^II)$$

Нетрудно определить разложения для насыщенности (4.1), (4.2), используя связь между (4.10), (4.11) и (4.2).

**5. Осредненная модель.** Введем усредненные давления и насыщенность

$$S^I \equiv s_0^I + \frac{1}{\alpha} \varepsilon_p \text{Pe} \langle s_{01}^I \rangle_1, \quad S^II \equiv s_0^II + \varepsilon_p \text{Pe} s_{01}^II, \quad P \equiv p_0 + \varepsilon_p p_{01}^II, \quad P_c \equiv p_{c0} + \varepsilon_p p_{c01}^II$$

где  $\alpha$  – объемная доля блоков.



Фиг. 3. Зависимость времени капиллярной релаксации от насыщенности

Умножим (4.6) на  $\epsilon_p \text{Pe}$  и сложим его с (4.5). Умножим (4.9), (4.10) на  $\epsilon_p$  и сложим их с (4.7). После долгих преобразований получим осредненные уравнения с точностью  $O(\epsilon_p \text{Pe} + \epsilon_p)$

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \Lambda_1^{ki}(S^{\text{II}}) \frac{\partial P}{\partial x_k} \right), \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \Lambda^{ki}(S^{\text{II}}) \frac{\partial P}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \Lambda_2^{ki}(S^{\text{II}}) \frac{\partial P_c}{\partial x_k} \right) \quad (5.1)$$

$$p_c^{\text{I}}(S^{\text{I}}) - \text{Pe} p_c^{\text{II}}(S^{\text{II}}) = -\tau_*(S^{\text{I}}) \frac{\partial S^{\text{I}}}{\partial \tau} \quad (5.2)$$

$$S = \omega_m \alpha S^{\text{I}} + (1 - \alpha) S^{\text{II}}, \quad P_c = p_c^{\text{II}}(S^{\text{II}}) \quad (5.3)$$

$$S^{\text{I}}(x, 0) = s^0(x), \quad S^{\text{II}}(x, 0) = s^0(x)$$

Время капиллярной релаксации определено как

$$\tau_*(S^{\text{I}}) \equiv \epsilon_p \text{Pe} \langle \varphi \rangle_1 \frac{\lambda^{\text{I}}(S^{\text{I}})}{\lambda_1^{\text{I}}(S^{\text{I}}) \lambda_2^{\text{I}}(S^{\text{I}})} \quad (5.4)$$

Если блок – сфера радиуса  $\xi$ , то задача (4.3) имеет аналитическое решение  $\varphi(r) = (r^2 - \xi^2)/6$ . Тогда получаем

$$\tau_*(S^{\text{I}}) \equiv \frac{2\xi^2}{15} \frac{[k_1^{\text{I}}(S^{\text{I}}) + k_2^{\text{I}}(S^{\text{I}})] \mu}{k_1^{\text{I}}(S^{\text{I}}) k_2^{\text{I}}(S^{\text{I}})}, \quad \xi = \left( \frac{3\alpha}{4\pi} \right)^{1/3}$$

Зависимость  $\tau_*(S)$  показана на фиг. 3. Относительные проницаемости брались в форме  $k_1(S) = S^2$ ,  $k_2(S) = (1 - S)^3$ ,  $\mu = 1$ .

Тензор нормированных осредненных фазовых проницаемостей определен следующим образом:

$$\Lambda_1^{ki}(S) = v_{ki} \lambda_1^{\text{II}}(S), \quad \Lambda_2^{ki}(S) = v_{ki} \lambda_2^{\text{II}}(S), \quad \Lambda^{ki}(S) = \Lambda_1^{ki}(S) + \Lambda_2^{ki}(S) \\ v_{ki} = \langle \partial \Psi_k^{\text{II}} + \delta_{ki} \rangle_2, \quad i, k = 1, \dots, N \quad (5.5)$$

В структуре осредненных фазовых проницаемостей выделим эффективный тензор абсолютной проницаемости среды  $K^{kj}$  и эффективные тензоры относительных фазовых проницаемостей  $k_\alpha^{ji}(S)$ , где  $\alpha$  – номер фазы

$$K_\alpha^{ki}(S) = K^{kj} k_\alpha^{ji}(S) \quad (5.6)$$

Тогда из (5.5), (5.6) следуют окончательные результаты для эффективных тензоров

$$K^{ki} / K^{\text{II}} = v_{ki}, \quad k_\alpha^{ki} \equiv k_\alpha \delta_{ki}, \quad \forall k, i, \quad k_\alpha(s) = k_\alpha^{\text{II}}(s), \quad \alpha = 1, 2 \quad (5.7)$$

Для задач на ячейке (4.4), определяющих вспомогательные функции  $\psi_k^{\text{II}}(y)$ ,  $k = 1, 2, 3$ , несложно получить приближенные аналитические решения.

Для тонких трещин ( $\alpha \rightarrow 1$ ) можно использовать обобщение принципа расщепления осредненного оператора [12], введенного для каркасных конструкций. В плоском случае его смысл в том, что если подобласть  $Y_2$  состоит из узких полос  $Y_2^{(j)}$ , то операция усреднения по  $Y_2$  при толщине полос, стремящейся к нулю, асимптотически представляется в виде

$$\left\langle \frac{\partial \psi}{\partial y_i} \right\rangle_2 \approx \int_{Y_2^{(j)}} \frac{\partial \psi}{\partial y_i} dy$$

Форма области, по которой производится интегрирование, есть параллелепипед с "дыркой". На каждом сегменте такой области основная задача на ячейке для  $\psi$  имеет точное решение:  $\psi(y) = y_1$ .

Тогда в изотропном случае  $\nu = (1 - \alpha^{2/3})$ ,  $\alpha \rightarrow 1$ .

Для блоков малого объема ( $\alpha \rightarrow 0$ ) их форма становится несущественной, поэтому ее можно считать шаровой. Для изотропного случая приближенное решение строится следующим образом. По физическому смыслу функция  $\Psi(y) \equiv \psi(y) + y_1$  является потенциалом поля скоростей при обтекании твердого непроницаемого тела (блока) с поверхностью  $S$ , помещенного внутрь куба  $Y$  с непроницаемыми гранями  $y_2 = \pm 1/2$ ,  $y_3 = \pm 1/2$  и постоянными значениями потенциала на оставшихся противоположных гранях:  $\Psi = 1/2$  при  $y_1 = 1/2$ ,  $\Psi = -1/2$  при  $y_1 = -1/2$ . Используем функцию, являющуюся решением задачи потенциального обтекания твердой сферы безграничным потоком несжимаемой жидкости

$$\Psi(y) = \frac{C_0 Y_1}{r^3} + C_1 Y_1, \quad r \equiv \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}$$

где  $\xi$  – радиус сферы  $S$ . Она точно удовлетворяет уравнению Лапласа, необходимым условиям симметрии и условию на сфере  $S$ , если  $C_1 = 2C_0/\xi^3$ . Оставшаяся константа  $C_0$  выбирается так, чтобы условие первого рода на внешних гранях выполнялось в среднем. Тогда имеет место  $C_0 = \xi^3/(2 + \alpha)$ . Окончательно получим

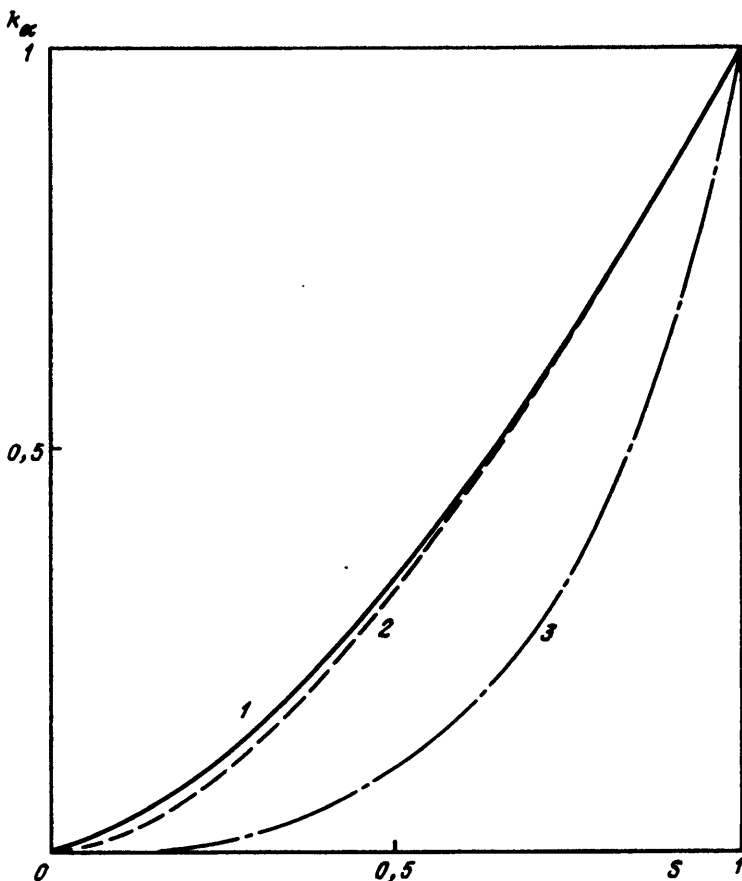
$$\nu = \left\langle \frac{\partial \Psi}{\partial y_1} \right\rangle_2 = \frac{(1 - \alpha)}{(1 + \alpha/2)} \sim (1 - 3\alpha/2), \quad \alpha \rightarrow 0$$

Для промежуточных значений  $\alpha$  можно использовать приближение, получаемое методом квазиодномерных решений, предложенным в [13]. Нетрудно видеть, что задача (4.4) для номера  $i$  допускает точное решение, зависящее лишь от одной координаты  $y_i$ , являющееся линейной функцией от  $y_i$  в классе непрерывных функций, допускающих разрыв производной на одной из внутренних поверхностей ячейки. При этом в задачах (4.4) все граничные условия удовлетворяются точно, а сами уравнения не удовлетворяются только на поверхности разрыва производной. Таким образом, можно говорить о близости решения к точному лишь в интегральном смысле. Тогда  $\nu = 1 - 2\alpha^{1/3}$ . Это соотношение оказывается пригодным для любых значений  $\alpha$ .

Сопоставление с точными решениями, полученными численно, показывает, что полученные асимптотики практически совпадают с точными решениями, если  $\omega \leq 0,2$ .

**6. Анализ результатов.** Физический смысл модели (5.1)–(5.4) в следующем. Макроскопическая насыщенность трещин  $S^{\text{II}}$  соответствует капиллярно-равновесному состоянию. Наоборот, распределение насыщенности в блоках  $S^{\text{I}}$  соответствует процессам с неравновесными капиллярными эффектами. Капиллярная релаксация в блоках





Фиг. 4. Точные результаты по эффективной относительной проницаемости сильно неоднородной среды: 1 – трещины, 2 – расчетная кривая эффективной относительной проницаемости, 3 – блоки

описана нелинейным кинетическим соотношением (5.3). Впервые релаксационное соотношение близкого типа для макроскопического капиллярного давления было получено в рамках феноменологического подхода в [9], но только для среды, неоднородной на уровне отдельных пор, время релаксации в которой являлось неопределенной константой.

Наличие капиллярной релаксации указывает, что в системе происходят процессы перераспределения фаз, стремящиеся привести ее к состоянию капиллярного равновесия. Анализ соотношения (5.3) показывает, что время релаксации для различных величин насыщенности существенно различается. Для средних насыщенностей перераспределение фаз происходит наиболее быстро. Для насыщенности, стремящейся к  $s_*$  или  $s^*$ , время релаксации бесконечно велико, неравновесное состояние заморожено, так как при этом одна из фаз неподвижна, а поэтому перераспределение фаз невозможно.

Существенно, что аналогичная кинетическая связь для фазовых проницаемостей не имеет места. Это связано с тем, что осредненные фазовые проницаемости связаны прежде всего с трансляционными типами элементарных течений на ячейке и в рамках системы с доминирующим источниковым течением не ощущают какого-либо вклада от плотных блоков. В С-Т- и D-Т-системах естественно ожидать неравновесного поведения и эффективных функций фазовых проницаемостей также.

В связи с этим эффективный тензор фазовых проницаемостей для всей среды соответствует системе трещин. Эффективные относительные проницаемости при этом просто совпадают с исходными относительными проницаемостями для трещин (5.7). Этот факт хорошо согласуется с численными результатами, полученными в [7] (фиг. 4).

Определение макроscopicого тензора фазовых проницаемостей связано с решением только одной задачи на ячейке (4.4), которая к тому же является линейной. Это обстоятельство обеспечивает значительное упрощение вычисления эффективного тензора фазовых проницаемостей.

Фактически все упирается в вычисление эффективного тензора абсолютной проницаемости  $\nu$ , который совпадает с эффективной проводимостью системы трещин.

Несмотря на формально малый порядок коэффициента в структуре времени капиллярной релаксации, в силу нелинейности и наличия точек вырождения двухфазного процесса (пороговые насыщенности, при которых прекращается течение одной из фаз) реальная величина времени релаксации может быть очень большой, особенно вблизи точек вырождения. Это согласуется с многочисленными экспериментальными данными, свидетельствующими о том, что времена стабилизации поля насыщенности при двухфазном течении в пористой среде неизмеримо больше, чем время стабилизации поля давлений.

**Заключение.** С помощью формальной техники осреднения получено разбиение всего множества двухфазных течений в сильно неоднородной среде на четыре класса, характеризующиеся разными структурами потоков на уровне отдельной ячейки неоднородности и, как следствие, разными осредненными моделями. Для одного класса построены замкнутые макроscopicические уравнения фильтрации, позволяющие в том числе описать неравновесные процессы перераспределения фаз между элементами среды. Такое описание оказывается возможным в терминах динамического капиллярного давления. Проблема динамических кривых капиллярного давления и фазовых проницаемостей активно исследуется сегодня экспериментально; в настоящей работе получены теоретические замкнутые уравнения, позволяющие их рассчитывать.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95-01-01179а). Авторы благодарны профессору университета г. Сент-Этьенн Alain Bourgeat за творческие дискуссии.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bourgeat A. Homogenized behaviour of 2-phase flows in naturally fractured reservoirs with uniform fracture distributions // *Comput. Methods in Appl. Mech. and Eng.* 1984. V. 47. № 1/2. P. 205–216.
2. Amaziane B., Bourgeat A., Koebe J.V. Numerical simulation and homogenization of diphasic flow in heterogeneous reservoir // *Proc. 2nd ECMOR*, 1990. P. 75–81.
3. Mikelić A. A convergence theorem for the homogenization of two-phase miscible flow through fractured reservoirs with uniform fracture distribution // *Appl. Analysis*. 1989. V. 33. № 3/4. P. 203–214.
4. Quintard M.S., Whitaker S. Two phase flow in heterogeneous porous media: the method of large-scale averaging // *Transport in Porous Media*. 1988. V. 3. № 4. P. 357–413.
5. Ahmadi A. Utilisation de propriétés équivalentes dans les modèles de réservoir: cas des écoulements diphasiques incompressibles. Thèse, Univ. Bordeaux I, 1992.
6. Saez A.E., Otero C.J., Rusinek I. The effective homogeneous behaviour of heterogeneous porous media // *Transport in Porous Media*. 1989. V. 4. № 3. P. 213–238.
7. Hidani A. Modélisation des écoulements diphasiques en milieu poreux à plusieurs types de roches // Thèse, Univ. Saint-Etienne. 1993. 247 p.
8. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972. 288 с.

9. Движение углеводородных смесей в пористой среде / В.Н. Николаевский, Э.А. Бондарев, М.И. Миркин и др. М.: Недра, 1968. 192 с.
10. *Панфилов М.Б.* Структурное осреднение процессов фильтрации в неоднородных средах // Изв. РАН СССР. МЖГ. 1992. № 6. С. 103–116.
11. *Panfilov M.* Averaged models of convection-diffusion transfer through highly heterogeneous porous media // Proc. Intern. Congr. Math. Modelling of Flow Through Porous Media. 1995. P. 276–300.
12. *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.
13. *Панфилов М.Б., Панфилова И.В.* Осредненные модели фильтрационных процессов с неоднородной внутренней структурой. М.: Наука, 1996. 383 с.

Москва

Поступила в редакцию  
17.XI.1995