

УДК 532.526.013.4; 551.511.6

© 1998 г. А.Е. ОРДАНОВИЧ, Ю.В. ПАШКОВСКАЯ

## ВЛИЯНИЕ ТЕРМИЧЕСКОЙ СТРАТИФИКАЦИИ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ЭКМАНОВСКОГО ТЕЧЕНИЯ

Теоретически изучается устойчивость экмановского термически стратифицированного пограничного слоя, моделирующего пограничный слой атмосферы. Решается система уравнений термогидродинамики в приближении Буссинеска. Исследуется два механизма возникновения вихревых структур – термический и динамический, а также их взаимодействие. Показано, что между различными областями параметров, соответствующими термической и динамической неустойчивости, существует резкая граница, на которой качественно меняются характеристики течения.

Основная модель пограничного слоя атмосферы – экмановское течение, возникающее под действием постоянного градиента давления над однородной горизонтальной безграничной поверхностью при учете сил Кориолиса [1–3]. В таких моделях рассматривается потеря устойчивости и образование вторичных течений за счет изменчивости средней скорости ветра (экмановского профиля) с высотой. Существуют более сложные модели, которые учитывают и другие факторы, определяющие структуру слоя, в том числе термическую стратификацию (например, [4–7]). Однако такие работы исследуют определенную конкретную ситуацию и поэтому осложнены дополнительными предположениями и геофизическими подробностями, не позволяющими составить полную картину явлений. В данной статье проводится подробное исследование устойчивости экмановского течения при учете его термической стратификации.

В статье в качестве модели пограничного слоя атмосферы рассматривается горизонтальный слой температурно-стратифицированной жидкости толщины  $h$ , движущийся по безграничной горизонтальной поверхности под действием градиента давления. Учитываются силы Кориолиса. Считается, что на верхней границе пограничного слоя отсутствуют трение и вертикальное движение воздуха. Такие граничные условия подробно обсуждаются в [6, 8]. На нижней границе используются условия прилипания и непроницаемости для скорости воздуха и считаются заданными температура  $T_H$  и поток тепла  $Q_0$ . Вводится система координат  $xyz$ , ось  $x$  которой направлена противоположно градиенту давления, а ось  $z$  – вертикально вверх. Используется обычная модель температурно-стратифицированной жидкости, основанная на гипотезах Буссинеска [10]

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{V}}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \text{grad } p - 2[\boldsymbol{\Omega}_0 \mathbf{V}] + k\Delta\mathbf{V} + \mathbf{g}\beta T \\ \frac{DT}{Dt} &= \chi\Delta T, \quad \text{div } \mathbf{V} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{V} = (u, v, w)$  – вектор скорости ветра,  $t$  – время,  $p$  – давление,  $\rho$  – средняя плотность,  $\mathbf{g}$  – ускорение свободного падения,  $\boldsymbol{\Omega}_0$  – угловая скорость вращения Земли,  $k$  – коэффициент кинематической вязкости,  $T_0$  – температура,  $\chi$  – коэффициент температуропроводности,  $\beta$  – коэффициент теплового расширения.

В дальнейшем представим все параметры течения  $A$  в виде суммы основного (или среднего) и возмущенного движений:  $A = A_0 + a'$ . Будем считать, что среднее течение стационарно и однородно по горизонтальным направлениям,  $\partial p_0 / \partial x$  задано, а  $\partial p_0 / \partial y = 0$ . Тогда решение  $A_0$  системы (1), зависящее только от координаты  $z$ , находится из уравнений Экмана

$$k \frac{d^2 U_0}{dz^2} = -f V_0 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial x}, \quad k \frac{d^2 V_0}{dz^2} = f U_0$$

$$\chi \frac{d^2 T_0}{dz^2} = 0, \quad f = 2\Omega_0 \sin \phi \quad (2)$$

Здесь  $f$  – параметр Кориолиса,  $\phi$  – географическая широта места.

Введем новую переменную  $\Theta = T - T_H$  и перейдем в уравнениях для среднего течения к безразмерным переменным. Примем в качестве масштаба длины высоту пограничного слоя  $h$ , масштаба горизонтальных скоростей – геострофическую скорость  $G$  и масштаба температуры – величину  $\Delta T$ , равную перепаду температуры на границах пограничного слоя

$$G = \frac{1}{\rho f} \left| \frac{\partial p_0}{\partial x} \right|, \quad \Delta T = \frac{Q_0 h}{C_p \rho \chi}$$

где  $C_p$  – удельная теплоемкость воздуха при постоянном давлении.

В новых переменных система (2) имеет вид

$$E \frac{d^2 U_0}{dz^2} + V_0 = 1, \quad E \frac{d^2 V_0}{dz^2} - U_0 = 0, \quad \frac{d^2 \Theta_0}{dz^2} = 0, \quad E = \frac{k}{h^2 f}$$

$$U_0 = V_0 = \Theta_0 = 0 \quad (z = 0), \quad \frac{dU_0}{dz} = \frac{dV_0}{dz} = 0, \quad \Theta_0 = 1 \quad (z = 1) \quad (3)$$

Здесь  $E$  – параметр Экмана.

Система уравнений и граничные условия для возмущенного движения в безразмерной форме имеют вид

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \text{Re} \left( w' \frac{\partial U_0}{\partial z} + V_0 \frac{\partial u'}{\partial y} \right) - \frac{1}{E} u' - \Delta u' = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + \text{Re} \left( w' \frac{\partial V_0}{\partial z} + V_0 \frac{\partial v'}{\partial y} \right) + \frac{1}{E} u' - \Delta v' = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y}$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} + \text{Re} \left( V_0 \frac{\partial w'}{\partial z} \right) - \Delta w' = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} - \text{Gr} \vartheta'$$

$$\frac{\partial \vartheta'}{\partial t} + \text{Re} \left( V_0 \frac{\partial \vartheta'}{\partial y} \right) + w' - \alpha_t \Delta \vartheta' = 0$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0$$

$$u' = v' = w' = \vartheta' = 0 \quad (z = 0), \quad \frac{\partial u'}{\partial z} = \frac{\partial v'}{\partial z} = w' = \frac{\partial \vartheta'}{\partial z} = 0 \quad (z = 1)$$

$$\text{Re} = \frac{Gh}{k}, \quad \text{Gr} = \frac{g\beta\Delta T h^3}{k^2}, \quad \text{Pr} = \frac{K}{\chi} = \frac{1}{\alpha_t} \quad (4)$$

Здесь  $\text{Re}$  – число Рейнольдса,  $\text{Gr}$  – число Грассгофа,  $E$  – число Экмана и  $\text{Pr}$  – чис-

ло Прандтля. В качестве масштабов при обезразмеривании уравнений возмущенного движения приняты: для скорости  $k/h$ ; для температуры, как и ранее  $\Delta T$ ; для времени  $1/f$ .

В силу однородности в горизонтальных направлениях поля средних скоростей будем искать решение системы уравнений (4) в виде плоской волны вдоль направления  $y'$  в системе координат  $x'y'z'$ , повернутой вокруг оси  $z$  на угол  $\varphi$  относительно исходной  $xuz$ . Значение  $\varphi$  является параметром решения и будет определено в дальнейшем. В новой системе отсчета профили скорости стационарного решения  $U_{0\varphi}(z')$ ,  $V_{0\varphi}(z')$  уравнений (2) имеют вид

$$U_{0\varphi}(z') = U_0(z) \cos \varphi + V_0(z) \sin \varphi, \quad V_{0\varphi}(z') = -U_0(z) \sin \varphi + V_0(z) \cos \varphi$$

В системе координат  $x'y'z'$  решение  $a' = \{u', v', w', \vartheta'\}$  системы уравнений (4) будет однородным по координате  $x'$  ( $\partial/\partial x' = 0$ ) и иметь вид плоской волны с волновым вектором  $\alpha$  вдоль  $y'$

$$a'(y', z', t) = a'(z') \exp i(\alpha y' + \gamma t), \quad \alpha = \frac{2\pi}{l} \quad (5)$$

Здесь  $l = \lambda/h$  – безразмерная длина волны,  $\gamma = \gamma_r + i\gamma_i$ .

Введя функцию тока  $\psi (v' = -\partial\psi/\partial z', w' = \partial\psi/\partial y' = i\alpha\psi)$  и исключив давление, получим уравнения для исследования устойчивости (определения собственного числа  $\gamma$ ) стационарного решения (все штрихи в дальнейшем опущены)

$$\gamma u + i\alpha \operatorname{Re} \left( \psi \frac{\partial U_{0\varphi}}{\partial z} + u V_{0\varphi} \right) - Lu - \frac{1}{E} \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$$

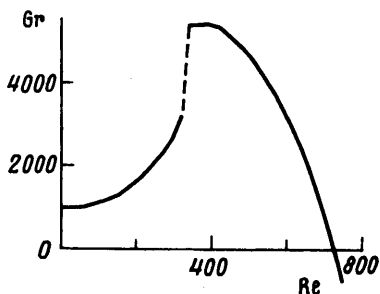
$$\gamma L\psi + i\alpha \operatorname{Re} \left( \psi \frac{\partial^2 V_{0\varphi}}{\partial z^2} + V_{0\varphi} L\psi \right) - L^2\psi - \frac{1}{E} \frac{\partial u}{\partial z} - i\alpha \operatorname{Gr} \vartheta = 0$$

$$\gamma \vartheta + i\alpha \operatorname{Re} V_{0\varphi} \vartheta - \alpha_r L\vartheta - i\alpha\psi = 0 \quad \left( L = \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \alpha^2 \right)$$

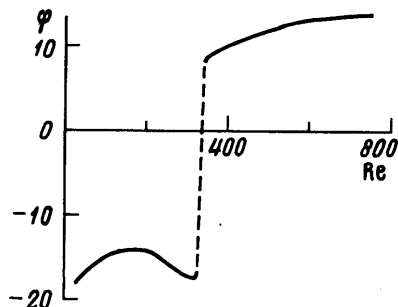
$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial z} = u = \vartheta = 0 \quad (z = 0), \quad \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = 0 \quad (z = 1) \quad (6)$$

Решение сформулированной задачи представляет систему параллельных вихрей с шагом  $\lambda = 2\pi/\alpha$ , ось которых направлена под углом  $\varphi$  к направлению оси  $x$ . Это решение определяют четыре внешних параметра:  $\operatorname{Re}$ ,  $\operatorname{Gr}$ ,  $E$ ,  $\operatorname{Pr}$ , и два внутренних –  $\alpha$  и  $\varphi$ . В соответствии с экспериментальными данными для турбулентной атмосферы в дальнейшем зафиксируем значение параметра Экмана  $E = 0,1$  и значение числа Прандтля  $\operatorname{Pr} = 1/\alpha = 1/1,35$  [11]. Рассматривается задача нейтральной устойчивости, т.е. задача определения таких значений чисел  $\operatorname{Gr}$  и  $\operatorname{Re}$ , при которых решения уравнений (6) не возрастают и не убывают (мнимая часть собственного значения  $\gamma_i = 0$ ). Значения волнового числа  $\alpha$  и угла  $\varphi$  определяются из условия минимума числа Грассгофа  $\operatorname{Gr}$  при заданном числе Рейнольдса  $\operatorname{Re}$ . Решением задачи являются, таким образом, минимальное (критическое) значение числа  $\operatorname{Gr}_*(\operatorname{Re})$ , соответствующие ему значения чисел  $\alpha_*(\operatorname{Re})$ ,  $\varphi_*(\operatorname{Re})$  и действительная часть собственного значения  $\gamma_r(\operatorname{Re})$ .

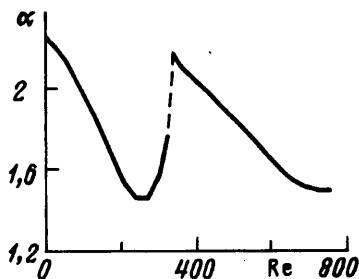
Перейдем к обсуждению результатов расчетов. На фиг. 1–3 изображены число Грассгофа  $\operatorname{Gr}_*$ , угол поворота  $\varphi_*$  и волновое число  $\alpha_*$  в зависимости от числа Рейнольдса  $\operatorname{Re}$ . На всех графиках отчетливо выделяются две качественно различные области неустойчивости – "термическая" ( $\operatorname{Re} < 340$ ) и "динамическая". Рассмотрим эти области подробно.



Фиг. 1. Зависимость значения критического числа Грассгофа  $Gr$  от числа Рейнольдса  $Re$



Фиг. 2. Зависимость направления оси вихрей  $\varphi_*$  от числа Рейнольдса  $Re$



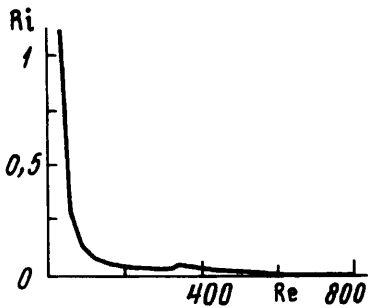
Фиг. 3. Зависимость критического значения волнового числа  $\alpha_*$  от числа Рейнольдса  $Re$

В динамической области неустойчивости ( $Re > 340$ ) реализуются вихревые образования с осью, направленной в сторону средней в пограничном слое скорости ветра (угол  $\varphi_*$  между осью вихрей и осью  $u$  равен углу поворота системы координат  $x'y'z'$  относительно исходной и составляет  $10-14^\circ$ ). Для этой области наблюдается нормальная зависимость характеристик устойчивости от скорости ветра ( $Re$ ) и перепада температур ( $Gr$ ): усиление ветра и нагрев нижней части пограничного слоя усиливают неустойчивость. При изменении параметров внутри динамической зоны угол  $\varphi_*$  меняется мало (фиг. 2). Наиболее сильно изменение параметров сказывается на изменении волнового числа  $\alpha_*$  (фиг. 3); с увеличением скорости ветра значение  $\alpha_*$  существенно (более чем на 25%) уменьшается.

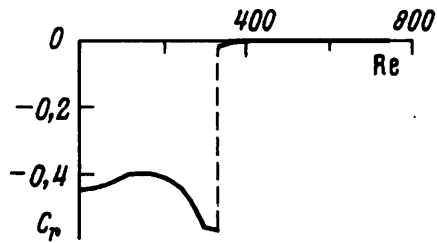
При  $Re \sim 340$  происходит резкая перестройка течения. Скачком меняется направление валов (изменение угла поворота  $\varphi_*$  оси вихрей составляет около  $30^\circ$  и значение угла меняет знак), существенно меняются волновое число  $\alpha_*$  и критическое число Грассгофа  $Gr_*$ . В термической зоне ( $Re < 340$ ) угол  $\varphi_*$  и волновое число  $\alpha_*$  ведут себя так же, как и в динамической; направление вихрей (угол  $\varphi_*$ ) мало зависит от  $Re$ , волновое число  $\alpha_*$  сильно изменяется (уменьшается более чем на 30%) с ростом  $Re$ .

На фиг. 4 представлена зависимость от числа Рейнольдса аналога числа Ричардсона  $Ri = gh\beta\Delta T/G^2 = Gr/Re^2$ , которое характеризует отношение вкладов термики и динамики в неустойчивость течения. Анализ графиков позволяет оценить тип неустойчивости в каждой из областей. В целом число  $Ri$  монотонно убывает с ростом числа Рейнольдса как в термической, так и в динамической областях. В зоне перестройки  $Ri \approx 0,04$ . Это значение можно считать критическим.

В термической зоне ( $Re < 340$ ) число  $Ri$  значительно превышает критическое. Поэтому можно считать, что в этой зоне все процессы определяются в основном



Фиг. 4. Зависимость числа Ричардсона  $Ri$  от числа Рейнольдса  $Re$



Фиг. 5. Зависимость скорости переноса вихревых структур  $c_r$  в направлении, поперечном их оси, от числа Рейнольдса  $Re$

термическими факторами и при малых  $Re$  близки к обычной конвекции в открытом слое. В этой области увеличение скорости ветра подавляет конвекцию и увеличивает устойчивость течения (эти результаты согласуются с полученными в работе [9]).

В динамической зоне число  $Ri$  меньше критического и с ростом числа Рейнольдса стремится к нулю. Как показывает анализ (в статье не приводится), структура решений близка к полученным при исследовании классического экмановского течения. Поэтому можно считать, что в этой зоне все процессы определяются в основном динамическими факторами.

В динамической и термической зонах сильно различаются скорости  $c_r = \gamma_r/\alpha$  поперечного движения вихревых систем в направлении, перпендикулярном оси  $x$ . Если в динамической области валы направлены вдоль среднего ветра в слое и практически неподвижны относительно Земли ( $c_r \approx 0$ ), то в термической направление валов отклоняется от направления ветра более чем на  $30^\circ$ , но сами валы перемещаются достаточно быстро ( $c_r \approx 0,4$ ) в сторону минимума градиента давления поперек направления ветра в слое. Зависимость  $c_r$  от числа Рейнольдса представлена на фиг. 5.

**Заключение.** При моделировании пограничного слоя атмосферы могут возникнуть два качественно различных типа вторичных течений. Оценки показывают, что в реальных условиях в пограничном слое атмосферы может реализоваться как термический, так и динамический режим. Действительно, при средних значениях параметров пограничного слоя атмосферы (см., например, [11]) области перестройки решений ( $Ri \approx 0,04$ ) соответствуют скорости ветра порядка 1 м/с. Заметим однако, что в статье рассматривалась очень грубая модель пограничного слоя атмосферы и критические значения параметров, характеризующих перестройку течения, должны уточняться.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01118).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ekman V.W. On the influence of the earth's rotation on ocean currents // Arkiv. Mat. Astr. Fys. 1905/1906. V. 2. P. 1–52.
2. Akerblom F.A. Recherches sur les courants les plus bas de l'atmosphère au-dessus de Paris // Nova Acta Reg. Soc. Sci. Upsaliensis. 1908. Ser. 4. V. 2. № 2. 45 p.
3. Браун П.А. Аналитические методы моделирования планетарного пограничного слоя. Л.: Гидрометеиздат, 1978. 150 с.

4. Lilly D.K. On the instability of Ekman boundary flow // J. Atmosph. Sci. 1966. V. 23. № 5. P. 481–494.
5. Вельтищев Н.Ф., Угрюмова Г.В. Механизм образования гряд конвективной облачности // Метеорология и гидрология. 1970. № 9. С. 10–21.
6. Михайлова Л.А., Орданович А.Е. Моделирование двумерных упорядоченных вихрей в пограничном слое атмосферы // Метеорология и гидрология. 1988. № 11. С. 29–42.
7. Орданович А.Е., Пашковская Ю.В. Исследование устойчивости неоднородного экмановского пограничного слоя // Вестн. МГУ. Сер. № 1. Математика, механика. 1995. № 3. С. 53–59.
8. Галушко В.В., Орданович А.Е. Двухслойная модель экмановского пограничного слоя атмосферы // Метеорология и гидрология. 1978. № 4. С. 33–44.
9. Gage K.S., Reid W.H. The stability of thermally stratified plane Poiseuille flow // J. Fluid. Mech. 1968. V. 33. Pt 1. P. 21–32.
10. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Т. 1. М.: Наука, 1965. 639 с.
11. Зилитинкевич С.С. Динамика пограничного слоя атмосферы. Л.: Гидрометеиздат, 1970. 292 с.

Москва

Поступила в редакцию  
26.X.1995