

УДК 532.517.4:532.527

© 1998 г. Е.В. БУЛДАКОВ, И.В. ЕГОРОВ, В.В. СЫЧЕВ<sup>1</sup>

## НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ТЕЧЕНИЙ В ТУРБУЛЕНТНЫХ ВИХРЕВЫХ ЯДРАХ

Рассмотрен класс стационарных автомодельных решений уравнений для турбулентных вихревых ядер, сращиваемых с внешним автомодельным невязким течением со степенным законом изменения окружной скорости вблизи оси вращения  $v \sim r^{-m}$  и постоянной функцией Бернулли. Установлено, что решения существуют лишь в определенном диапазоне изменения показателя степени  $m$ . При этом каждому значению  $m$  соответствуют два решения.

В [1] рассмотрен класс стационарных автомодельных решений уравнений для вязких ламинарных вихревых ядер, соответствующих внешним автомодельным невязким решениям со степенным законом изменения окружной скорости вблизи оси вращения  $v \sim r^{-m}$ . Эти решения применимы для моделирования вихревых ядер разнообразных течений жидкости с интенсивной закруткой. К их числу относятся, например, течения в атмосферных вихрях, технических устройствах типа вихревых камер, вихрях, сходящих с передних кромок треугольных и стреловидных крыльев. Однако, как правило, такие течения являются турбулентными. В данном случае следует говорить о так называемой свободной турбулентности, так как в поле течения отсутствуют какие-либо твердые поверхности. Такие турбулентные течения моделируются при помощи теории пути смещения Прандтля в ее различных модификациях [2]. Настоящая работа является дальнейшим развитием [1] и посвящена исследованию свойств турбулентных вихревых ядер.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим вращательно-симметричное турбулентное движение несжимаемой жидкости. Введем цилиндрическую систему координат  $r, \theta, z$  с осью  $r = 0$ , совпадающей с осью симметрии течения. Обозначим через  $u, v, w$  соответственно радиальную, азимутальную и осевую осредненные компоненты скорости, а через  $p, \rho$  – осредненные давление и плотность.

Предполагая ядро вихря тонким, запишем осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье – Стокса для турбулентного осесимметричного течения в квазицилиндрическом приближении, пренебрегая ламинарной вязкостью по сравнению с турбулентной

$$\begin{aligned} \frac{v^2}{r} &= \frac{\partial p}{\partial r} \\ u \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \langle u'v' \rangle), \quad u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \langle u'w' \rangle) \\ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Для замыкания системы (1.1) воспользуемся теорией пути смещения Прандтля и

<sup>1</sup> По вине авторов фигуры, приведенные в данной статье, должны относиться к работе [1], а фигуры работы [1] соответствуют данной статье.

представим турбулентные напряжения в виде

$$-\langle u'v' \rangle = \nu_t r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v}{r} \right), \quad -\langle u'w' \rangle = \nu_t \frac{\partial w}{\partial r} \quad (1.2)$$

Турбулентную вязкость  $\nu_t$  запишем в виде [3]

$$\nu_t = 2(\kappa r_c)^2 \sqrt{r^2 \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v}{r} \right) \right]^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2} \quad (1.3)$$

где  $r_c$  – толщина ядра, а  $\kappa$  – некоторая безразмерная константа.

Рассмотрим течение в ядре вихря [4], для которого азимутальная скорость  $v$  при  $r \rightarrow \infty$  ведет себя как

$$v \sim Kr^{-m} \quad (1.4)$$

Такое течение будет определяться единственным размерным параметром – постоянной  $K$ . Поскольку в задаче отсутствует параметр, имеющий размерность длины, то решение должно зависеть от безразмерной комбинации координат  $\eta \sim r/z$ . Очевидно, что в этом случае толщина ядра должна представляться в виде  $r_c = \delta z$ . Так как ядро предполагается тонким, то безразмерная константа  $\delta$  должна быть малой величиной. Кроме того,  $\kappa$  также мало по сравнению с единицей, например, в [3] приводится значение  $\kappa = 0,0693$ . Таким образом, турбулентная вязкость пропорциональна некоторой малой безразмерной величине  $\nu_t \sim \varepsilon = 2(\kappa \delta)^2$ . Далее будем полагать  $\varepsilon \rightarrow 0$  и рассмотрим соответствующее асимптотическое решение.

Введем в рассмотрение безразмерную независимую переменную

$$\eta = \varepsilon^{-1/3} z^{-1} r \quad (1.5)$$

а искомые функции представим в виде

$$w = \frac{K}{\varepsilon^{m/3} z^m} W(\eta), \quad v = \frac{K}{\varepsilon^{m/3} z^m} V(\eta) \quad (1.6)$$

$$u = \frac{K}{\varepsilon^{(m-1)/3} z^m} U(\eta), \quad \frac{p - p_\infty}{\rho} = -\frac{K^2}{\varepsilon^{2m/3} z^{2m}} P(\eta)$$

Эти представления получены на основе требования равенства по порядку величины при  $\varepsilon \rightarrow 0$  всех членов, сохраненных при написании системы (1.1). Подставляя (1.2)–(1.6) в (1.1), получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

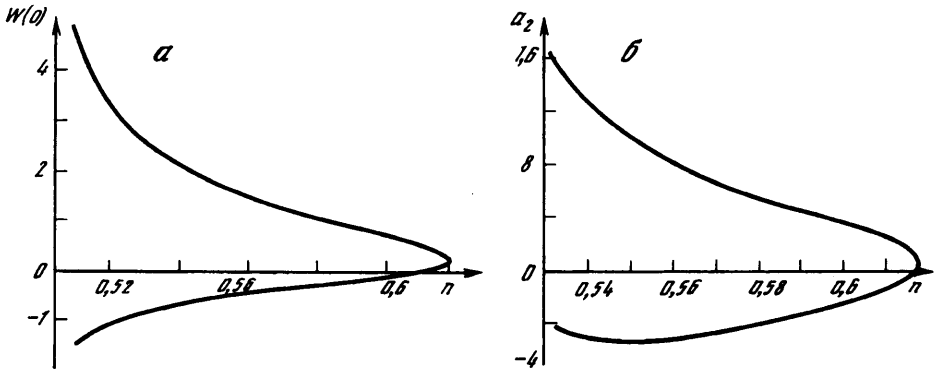
$$V^2 + \eta P' = 0 \quad (1.7)$$

$$UV' - W(\eta V' + mV) + \frac{UV}{\eta} = C \left( V'' + \frac{V'}{\eta} - \frac{V}{\eta^2} \right) +$$

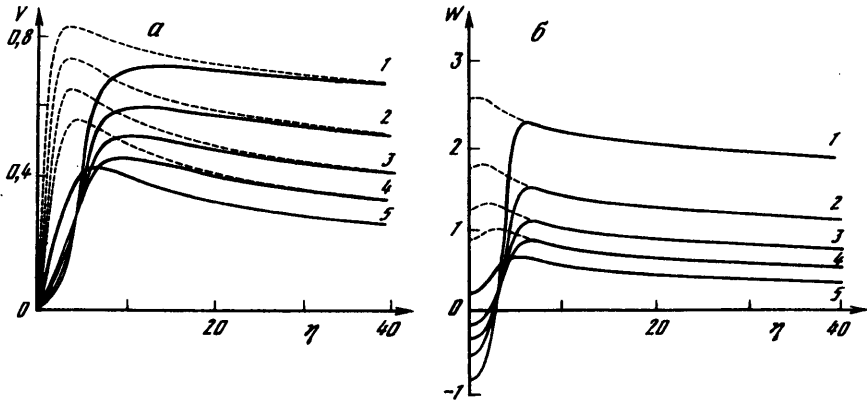
$$+ \frac{1}{C} \left( V' - \frac{V}{\eta} \right) \left[ \left( V' - \frac{V}{\eta} \right) \left( V'' - \frac{V'}{\eta} + \frac{V}{\eta^2} \right) + W''W' \right]$$

$$UW' - W(\eta W' + mW) + 2mP + \eta P' = C \left( W'' + \frac{W'}{\eta} \right) + \frac{W'}{C} \left[ \left( V' - \frac{V}{\eta} \right) \left( V'' - \frac{V'}{\eta} + \frac{V}{\eta^2} \right) + W''W' \right]$$

$$\eta U' + U - \eta^2 W' - mW = 0, \quad C = \sqrt{\left( V' - \frac{V}{\eta} \right)^2 + W'^2}$$



Фиг. 1. Зависимость осевой скорости на оси ( $\eta = 0$ ) от  $n$



Фиг. 2. Профили окружной  $V$  (а) и осевой  $W$  (б) составляющих вектора скорости: 1 -  $n = 0,57$ , 2 -  $0,59$ , 3 -  $0,61$ , 4 -  $n = n^*$ ; штриховые кривые - первое семейство, сплошные кривые - второе семейство

На оси вращения  $r = 0$  для (1.1) граничные условия имеют вид  $u = v = \partial w / \partial r = 0$ . Для автомодельных переменных системы (1.7) это приводит к следующим граничным условиям:

$$\eta = 0: \quad U = V = W' = 0 \quad (1.8)$$

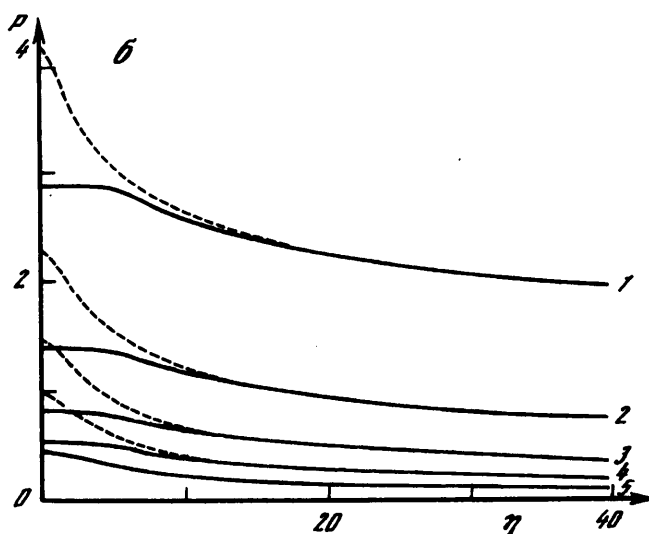
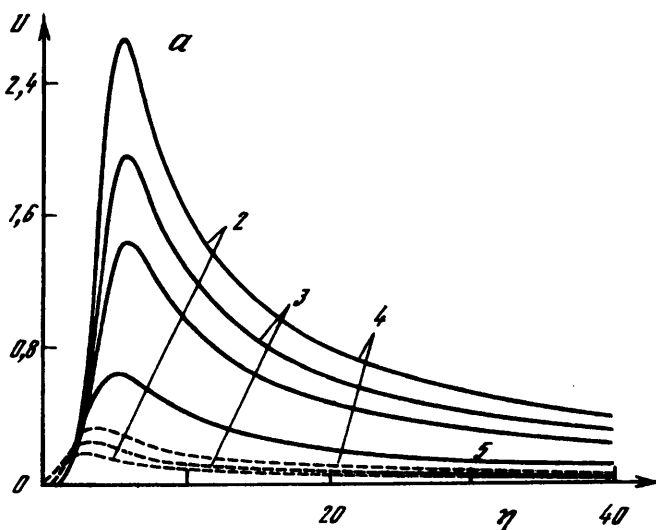
Условия при  $r \rightarrow \infty$  должны определяться возможностью сращивания с внешним невязким течением. При постоянстве функции Бернулли во внешнем течении для системы (1.1) должно асимптотически выполняться равенство

$$r \rightarrow \infty: \quad \frac{p - p_\infty}{\rho} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) = 0 \quad (1.9)$$

Используя (1.4), (1.9), первое уравнение из (1.1), а также учитывая, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$   $u \ll v$ ,  $w \sim v$  и  $p \sim v^2$ , получаем асимптотические граничные условия для автомодельных функций

$$\eta \rightarrow \infty: \quad V \rightarrow \frac{1}{\eta^m}, \quad W \rightarrow \sqrt{\frac{1-m}{m}} \frac{1}{\eta^m}, \quad P \rightarrow \frac{1}{2m} \frac{1}{\eta^{2m}} \quad (1.10)$$

Отметим, что эта асимптотика совпадает с первыми (невязкими) членами асимптотики с соответствующими  $n(n = 1/(2-m))$ , выписанной в [1,4] в случае ламинарного течения.



Фиг. 3. Профили радиальной  $U$  составляющей вектора скорости (а) и давления  $P$  (б). Обозначения те же, что на фиг. 2

Таким образом, задача в окончательной постановке представляет собой систему (1.7) с граничными условиями (1.8) при  $\eta = 0$  и асимптотикой (1.10) при  $\eta \rightarrow \infty$ .

**2. Численный метод.** При численном интегрировании рассматривалась краевая задача для системы из шести обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, полученных из (1.7) путем введения новых неизвестных функций  $W'$  и  $V'$ . Система решалась для различных  $m$  из интервала  $0 < m < 1$ , что соответствует интервалу  $1/2 < n < 1$  параметра  $n = 1/(2-m)$ , используемого в [1] для исследования ламинарного ядра. Интегрирование производилось на отрезке  $0 \leq \eta \leq \eta_m$ , при этом на левой границе ставились условия (1.8), а в качестве условий на правой брались значения соответствующих асимптотических выражений из (1.10) в точке  $\eta_m$ .

Численное решение полученной краевой задачи проводилось на основе неявного конечно-разностного метода с аппроксимацией дифференциальных уравнений по двухточечной схеме Келлера второго порядка точности. Решение системы нелинейных конечно-разностных уравне-

ний осуществлялось при помощи метода Ньютона – Рафсона с автоматическим выбором итерационного параметра. Для решения линеаризованной системы сеточных уравнений на итерации по нелинейности применялся метод монотонной трехточечной векторной прогонки. Для основной серии расчетов было выбрано значение  $\eta_m = 40$  и число узлов равномерной расчетной сетки  $N = 3001$ , шаг расчетной сетки  $\delta = 1,33 \cdot 10^{-2}$ .

В качестве начального приближения итерационного процесса бралось каждое из двух решений для соответствующих  $n$ , полученных ранее в [1] для ламинарного течения.

**3. Результаты.** В процессе численного интегрирования автомодельной задачи (1.7)–(1.9) для вязкого ядра получен класс решений для различных значений параметра  $n$  из интервала  $1/2 < n < 1$ . Как и в случае ламинарного течения, выявлена ограниченность области существования решений по  $n$ , а также их неединственность. Установлено, что существует  $n_*(n_* \approx 0,630)$ , такое, что для  $n < n_*$  задача имеет два решения, для  $n > n_*$  решений не существует, а для  $n = n_*$  решение единственно (фиг. 1). Для ламинарного течения в [1] получено значение  $n_* \approx 0,618$ .

Для наглядного представления характера течения в ядре вихря на фиг. 2, 3 приведены результаты расчетов различных компонент вектора скорости и давления при некоторых значениях  $n$ . Сплошные и штриховые кривые соответствуют разным семействам решения. Согласно фиг. 1, 2, одно из решений соответствует положительному значению осевой скорости в окрестности оси, а другое – отрицательному. В последнем случае в некоторой окрестности оси вращения имеет место медленное нисходящее течение. В целом решения близки по характеру к ламинарным с поправкой на другой вид автомодельного представления.

Отметим, что максимальный угол закрутки потока  $\varphi_m = \arctg \left[ \lim_{\eta \rightarrow \infty} (V(\eta) / W(\eta)) \right]$

реализуется при  $n = n_*$ . Значение  $\varphi_m$  увеличилось по сравнению с ламинарным течением на  $2^\circ$  и составило  $\sim 40^\circ$ . Это несколько лучше согласуется с известными оценками [5] для разрушения вихря, чем результат [1].

**Заключение.** Получены стационарные автомодельные решения уравнений для турбулентных вихревых ядер, соответствующие внешним автомодельным невязким решениям со степенным законом изменения окружной скорости вблизи оси вращения. Установлено, что такие решения при постоянстве функции Бернулли во внешнем течении существуют лишь в определенном диапазоне изменения параметра  $n$ . При этом существует  $n_*(n_* \approx 0,630)$ , такое, что для  $n < n_*$  задача имеет два решения, для  $n > n_*$  решений не существует, а для  $n = n_*$  решение единственно. В области существования решений  $n < n_*$  одно имеет положительное значение осевой скорости в окрестности оси, а другое – отрицательное, что соответствует медленному нисходящему течению в некоторой окрестности оси вращения.

Работа проведена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 97-01-00354).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булдаков Е.В., Егоров И.В., Сычев В.В. Некоторые свойства автомодельных решений для течений в вязких вихревых ядрах // Изв. РАН. МЖГ. 1997. № 1. С. 38–43.
2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.
3. Delery J.M. Aspects of vortex breakdown // Prog. Aerospace Sci. 1994. V. 30. P. 1–59.
4. Сычев В.В. Об одном классе автомодельных решений для течений типа торнадо // Изв. РАН. МЖГ. 1997. № 3. С. 112–124.
5. Hall M.G. Vortex breakdown // Annu. Rev. Fluid Mech. 1972. V. 4. P. 195–218.