

УДК 532.517.2.013.4:533.6.011.34

© 1998 г. А.В. КАЗАКОВ

УСТОЙЧИВОСТЬ ЗАКРУЧЕННОГО ДОЗВУКОВОГО ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА

Представлены результаты расчетов устойчивости трехмерного закрученного течения вязкого теплопроводного газа. Для определения характеристик устойчивости используется линейная теория устойчивости плоскопараллельных течений во временной постановке. Основное невозмущенное осесимметричное завихренное течение находилось численно с использованием квазицилиндрического приближения для полной системы уравнений Навье – Стокса. Предполагалось, что циркуляция окружной составляющей скорости в спутном, окружающем вязкое ядро вихря, потоке постоянна. При анализе устойчивости рассмотрены неосесимметричные возмущения в виде волн, распространяющихся вдоль оси вихря как с положительными, так и с отрицательными значениями азимутального волнового числа, когда вращение возмущения соответствует вращению невозмущенного потока или противоположно вращению в ядре вихря. Приведены нейтральные кривые устойчивости для различных значений параметра закрутки и чисел Маха спутного потока.

Математическое моделирование формирования и динамики закрученных течений, их устойчивости, процессов распада и разрушения завихренных течений, впервые обнаруженных экспериментально в [1, 2], являются одними из важных задач динамики жидкости и газа. С практической точки зрения наиболее интересны исследования устойчивости различных типов завихренных течений (например, торнадо в атмосфере или концевые вихри, сходящие с крыльев самолетов), их взаимодействие с окружающей средой и разрушение.

Устойчивость вихревого течения зависит не только от распределения окружной составляющей скорости, но и от осевой составляющей, распределение которой вблизи оси вихря может иметь вид струйного или следового типа. В большинстве работ по исследованию устойчивости закрученных течений [3–10], выполненных в рамках модели несжимаемой жидкости, в качестве невозмущенного течения использовались профили скоростей, задаваемых известной моделью q -вихря, представляющую собой упрощенную модель вихря Бетчелора в несжимаемой жидкости [5, 6].

В действительности динамика вихревого течения и характеристики его устойчивости могут существенно измениться при учете сжимаемости и теплопроводности среды [11, 13]. Настоящая работа посвящена исследованию влияния теплопроводности газа и числа Маха спутного потока на характеристики линейной устойчивости вязкого закрученного течения в вязком ядре вихря в спутном дозвуковом потоке с постоянной циркуляцией окружной составляющей скорости вне ядра вихря.

1. Постановка задачи. Рассматривается устойчивость стационарного осесимметричного закрученного течения вязкого теплопроводного газа в спутном дозвуковом потоке. Будем считать, что вне вязкого ядра вихря течение однородно и имеет постоянную циркуляцию окружной составляющей скорости. Будем использовать цилиндрические координаты (x^*, r^*, φ) и соответствующие им компоненты скорости $(v_x^*, v_r^*, v_\varphi^*)$, полагая, что продольная ось X совпадает с осью ядра вихря.

Для определения параметров основного невозмущенного течения воспользуемся

безразмерными координатами $x^* = l^*x$, $r^* = l^*r$, φ и соответственно компонентами скорости $v_x^* = u_0^*j_x$, $v_r^* = u_0^*j_r$, $v_\varphi^* = u_0^*j_\varphi$. Для плотности, коэффициента динамической вязкости, давления и энтальпии удобно использовать безразмерные переменные: $\rho^* = \rho_0^*\rho$, $\mu^* = \mu_0^*\mu$, $P^* = \rho_0^*u_0^{*2}P$, $h^* = u_0^{*2}h$. Здесь u_0^* , ρ_0^* , μ_0^* , h_0^* – продольная компонента скорости, плотность, коэффициент динамической вязкости и энтальпия соответственно. Продольная длина l^* характеризует масштаб, на котором происходит развитие течения в вязком ядре вихря. Для концевго вихря, сходящего с крыла конечного удлинения, этот масштаб определяется расстоянием, на котором сворачивается вихревая пелена, образующая внешний невязкий поток с постоянной циркуляцией окружной скорости, а вблизи оси вихревой нити формируется вязкое ядро вихря с соответствующими распределениями окружной и продольной составляющих скорости. Число Рейнольдса соответственно может быть представлено в виде $Re = \rho_0^*u_0^{*l^*} / \mu_0^*$.

Толщина вязкого ядра вихря при больших числах Рейнольдса $Re \gg 1$ мала и определяется, как правило, толщиной пограничного слоя на теле, образующем вихрь. Вне вязкого ядра в области $x \sim O(1)$, $r \sim O(1)$ течение можно считать слабо возмущенным. Для описания течения в вязком ядре введем новую переменную $V_\varphi = v_\varphi r$, которая представляет собой циркуляцию окружной составляющей скорости, деленную на 2π . В вязкой области течения при больших числах Рейнольдса Re удобно ввести новые переменные

$$x_1 = x, \quad r_1 = r Re^{1/2}, \quad V_r = Re^{1/2} v_r, \quad V_{\varphi 1} = V_\varphi Re^{1/2} \quad (1.1)$$

Система уравнений квазицилиндрического приближения, описывающая течение вязкого теплопроводного газа в ядре вихря, аналогична системе уравнений, используемой для описания закрученного течения в несжимаемой жидкости в [6–10]. Совместно с граничными условиями эта система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \rho V_x \frac{\partial V_x}{\partial x_1} + \rho V_r \frac{\partial V_x}{\partial r_1} &= -\frac{\partial P}{\partial x_1} + \left[\frac{\partial}{\partial r_1} \left(\mu \frac{\partial V_x}{\partial r_1} \right) + \frac{\mu}{r_1} \frac{\partial V_x}{\partial r_1} \right] \\ \frac{\rho V_{\varphi 1}^2}{r_1^3} &= \frac{\partial P}{\partial r_1}, \quad P = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \rho h \\ \rho V_x \frac{\partial V_{\varphi 1}}{\partial x_1} + \rho V_r \frac{\partial V_{\varphi 1}}{\partial r_1} &= \left[\frac{\partial}{\partial r_1} \left(\mu \frac{\partial V_{\varphi 1}}{\partial r_1} \right) - \frac{\mu}{r_1} \frac{\partial V_{\varphi 1}}{\partial r_1} - \frac{2V_{\varphi 1}}{r_1} \frac{\partial \mu}{\partial r_1} \right] \\ \rho V_x \frac{\partial h}{\partial x_1} + \rho V_r \frac{\partial h}{\partial r_1} &= V_x \frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\rho V_r V_{\varphi 1}^2}{r_1} + \left[\frac{1}{\sigma r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} \left(\mu r_1 \frac{\partial h}{\partial r_1} \right) \right] + \\ &+ \mu \left[\left(\frac{\partial V_x}{\partial r_1} \right)^2 + \left(\frac{1}{r_1} \frac{\partial V_{\varphi 1}}{\partial r_1} - \frac{2V_{\varphi 1}}{r_1} \right)^2 \right] + Q(x_1, r_1) \\ \frac{\partial \rho V_x}{\partial x_1} + \frac{\rho V_r}{r_1} + \frac{\partial \rho V_r}{\partial r_1} &= 0 \\ x_1 = 0: \quad V_x &= V_{x0}(r_1), \quad V_{\varphi 1} = V_{\varphi 10}(r_1), \quad h = h_0(r_1) \\ r_1 = 0: \quad V_r &= 0, \quad \frac{\partial V_x}{\partial r_1} = 0, \quad V_{\varphi 1} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial r_1} = 0 \\ r_1 \Rightarrow \infty: \quad V_x &= V_{xe}(x_1), \quad V_{\varphi 1} = V_{\varphi 1e} = \Gamma = \text{const}, \quad h = h_e(x_1) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Течение вне вязкой области предполагается изоэнтропическим и однородным или обладающим ненулевым продольным градиентом давления, когда продольная скорость, энтальпия, давление и число Маха являются функциями продольной координаты x : $V_x = V_{xe}(x_1)$, $h = h_e(x_1)$, $p = P_e(x_1)$, $M = M_e(x_1)$. Коэффициент динамической вязкости предполагается зависящим от температуры по степенному закону $\mu/\mu_0 = (h/h_0)^\omega$. Здесь M – число Маха, σ – число Прандтля, γ – показатель адиабаты. В расчетах принято $\sigma = 0,75$, $\omega = 0,7$, $\gamma = 1,4$.

Для интегрирования системы уравнений использовался конечно-разностный метод, подробно описанный в [12–13]. В начальном сечении $x_1 = 0$ задавались распределения скоростей, аналогичные [4–6, 9, 10]

$$V_{x0} = 1 + \Delta \exp(-\beta r_1^2), \quad V_{\phi 0} = \Gamma(1 - \exp(-\beta r_1^2)) \quad (1.3)$$

Начальное распределение скоростей соответствует распределению скорости в q -вихре [4, 9] в спутном потоке, а профиль скорости V_ϕ идентичен распределению окружной составляющей скорости в модели вихря Ламба – Озеена [16]. Параметр Δ позволяет получать различные распределения продольной составляющей скорости вблизи оси вихря: $\Delta = 0$ соответствует однородному потоку в начальном сечении; $\Delta > 0$ – закрученному течению струйного типа и $\Delta < 0$ – завихренному течению в следе. Параметр Γ задает величину циркуляции окружной составляющей скорости. Распределение энтальпии в начальном сечении предполагалось однородным: $h_0(x_1 = 0, r_1) = h_e(x_1 = 0)$. В расчетах принималось $Re = 300$. При исследовании устойчивости закрученного течения использовались параметры (профили скоростей и энтальпии) невозмущенного течения, полученные в результате численного интегрирования системы (1.2), которые в каждом сечении $x = \text{const}$ считались независимыми от продольной координаты.

Для формулировки линейной задачи устойчивости закрученного течения воспользуемся уравнениями Навье – Стокса для вязкого теплопроводного газа в цилиндрических координатах (x^*, r^*, ϕ) . Уравнения для возмущений бесконечно малой амплитуды запишем в безразмерной форме, для чего в качестве характерных величин скоростей будем использовать продольную составляющую скорости на внешней границе вязкого ядра вихря в рассматриваемом сечении v_{x0} , плотность и коэффициент динамической вязкости в той же точке пространства ρ_0^* , μ_0^* и характерную толщину вязкого ядра вихря в данном сечении $\delta^* = l^* \delta$. Представим безразмерные переменные в следующем виде:

$$v_x^* = v_{x0}^* v_x, \quad v_\phi^* = v_{x0}^* v_\phi, \quad v_r^* = v_{x0}^* v_r, \quad t^* = \frac{l^*}{v_{x0}^*} \delta t, \quad x^* = l^* \delta x, \quad r^* = l^* \delta r_1$$

$$\rho^* = \rho_0^* \rho, \quad \mu^* = \mu_0^* \mu, \quad h^* = v_{x0}^{*2} h, \quad p^* = \rho_0^* v_{x0}^{*2} p$$

Хотя невозмущенное закрученное течение в вязком ядре вихря является осесимметричным, возмущения малой амплитуды будем считать трехмерными. В этом случае для возмущенных функций завихренного течения можно использовать следующие представления:

$$v_x = V_{x0} + v_x', \quad v_\phi = V_{\phi 0} + v_\phi', \quad v_r = v_r'$$

$$h = H_0 + h', \quad p = P_0 + p', \quad \rho = R_0 + \rho'$$

где V_{x0} , $V_{\phi 0}$, H_0 , P_0 , R_0 – параметры невозмущенного течения в рассматриваемом сечении, зависящие только от r_1 , и v_x' , v_ϕ' , v_r' , h' , p' , ρ' – возмущенные функции течения, зависящие от координат (t, x, r_1, ϕ) . Функции возмущенного течения будем искать в виде волн, распространяющихся вдоль оси вихря и имеющих то или иное направление

вращения по отношению к закрученному невозмущенному течению

$$(\nu'_x, \nu'_\varphi, \nu'_r, h', p', \rho') = (\nu''_x, \nu''_\varphi, \nu''_r, h'', p'', \rho'') \exp[i(\alpha x + n\varphi - \omega t)]$$

где $\nu''_x, \nu''_\varphi, \nu''_r, h'', p'', \rho''$ – комплексные амплитуды возмущенных функций течения, зависящие только от поперечной координаты r_1 , α, n – действительные продольное и азимутальное волновые числа соответственно, а $\omega = \omega_r + i\omega_i$ – комплексная частота возмущения, мнимая часть $\omega_i > 0$ которой определяет скорость нарастания или затухания возмущения во времени, когда $\omega_i < 0$.

Подстановка в линеаризованную систему уравнений приводит к системе уравнений относительно комплексных амплитуд возмущенных функций течения (для простоты штрихи над величинами комплексных амплитуд опущены)

$$\begin{aligned} R_0 \left[\left(-i\omega + i\alpha V_{x0} + in \frac{V_{\varphi 0}}{r_1} \right) \nu_x + \nu_r \frac{dV_{x0}}{dr_1} \right] &= -i\alpha p + \frac{1}{\text{Re } \delta} \left\{ - \left(\frac{4}{3} \alpha^2 + \frac{n^2}{r_1^2} \right) \mu_0 \nu_x + \right. \\ &+ \mu_0 \frac{d^2 \nu_x}{dr_1^2} + \frac{d\nu_x}{dr_1} \left(\frac{\mu_0}{r_1} + \frac{d\mu_0}{dr_1} \frac{dH_0}{dr_1} \right) + \left(\frac{i\alpha \mu_0}{3r_1} + i\alpha \frac{d\mu_0}{dr_1} \frac{dH_0}{dr_1} \right) \nu_r + \frac{i\alpha \mu_0}{3} \left[\frac{d\nu_r}{dr_1} - \frac{n\nu_\varphi}{r_1} \right] + \\ &+ \left. \frac{dh}{dr_1} \frac{d\mu_0}{dH_0} \frac{dV_{x0}}{dr_1} + h \left[\frac{d\mu_0}{dH_0} \frac{d^2 V_{x0}}{dr_1^2} + \frac{d^2 \mu_0}{dH_0^2} \frac{dH_0}{dr_1} \frac{dV_{x0}}{dr_1} + \frac{1}{r_1} \frac{d\mu_0}{dH_0} \frac{dV_{x0}}{dr_1} \right] \right\} \\ R_0 \left[\left(-i\omega + i\alpha V_{x0} + in \frac{V_{\varphi 0}}{r_1} \right) \nu_\varphi + \left(\frac{dV_{\varphi 0}}{dr_1} + \frac{V_{\varphi 0}}{r_1} \right) \nu_r \right] &= -\frac{in}{r_1} p + \frac{1}{\text{Re } \delta} \left\{ - \left(\alpha^2 + \frac{4}{3} \frac{n^2}{r_1^2} \right) \mu_0 \nu_\varphi + \right. \\ &+ \mu_0 \frac{d^2 \nu_\varphi}{dr_1^2} - \frac{\mu_0 \alpha n}{3r_1} \nu_x + \frac{i\mu_0 n}{3r_1} \frac{d\nu_r}{dr_1} + \left[\frac{d\mu_0}{dH_0} \frac{dH_0}{dr_1} + \frac{\mu_0}{r_1} \right] \left(\frac{d\nu_\varphi}{dr_1} - \frac{\nu_\varphi}{r_1} \right) + \\ &+ \frac{in\nu_r}{r_1} \left[\frac{d\mu_0}{dH_0} \frac{dH_0}{dr_1} + \frac{7}{3} \frac{\mu_0}{r_1} \right] + \frac{dh}{dr_1} \frac{d\mu_0}{dH_0} \left(\frac{dV_{\varphi 0}}{dr_1} - \frac{V_{\varphi 0}}{r_1} \right) + h \left[\frac{d^2 \mu_0}{dH_0^2} \frac{dH_0}{dr_1} \left(\frac{dV_{\varphi 0}}{dr_1} - \frac{V_{\varphi 0}}{r_1} \right) + \right. \\ &+ \left. \left. \frac{d\mu_0}{dH_0} \left(\frac{d^2 V_{\varphi 0}}{dr_1^2} + \frac{1}{r_1} \frac{dV_{\varphi 0}}{dr_1} - \frac{V_{\varphi 0}}{r_1^2} \right) \right] \right\} \\ R_0 \left[\left(-i\omega + i\alpha V_{x0} + in \frac{V_{\varphi 0}}{r_1} \right) \nu_r - \frac{2V_{\varphi 0}}{r_1} \nu_\varphi \right] &= -\rho \frac{V_{\varphi 0}^2}{r_1} = -\frac{dp}{dr_1} + \frac{1}{\text{Re } \delta} \left\{ - \left(\alpha^2 + \frac{n^2}{r_1^2} \right) \mu_0 \nu_r + \right. \\ &+ \mu_0 \frac{4}{3} \frac{d^2 \nu_r}{dr_1^2} + \frac{i\alpha \mu_0}{3} \frac{d\nu_x}{dr_1} + \frac{i\mu_0 n}{3r_1} \frac{d\nu_\varphi}{dr_1} + \frac{4}{3} \left(\frac{\mu_0}{r_1} + \frac{d\mu_0}{dr_1} \frac{dH_0}{dr_1} \right) \frac{d\nu_r}{dr_1} - \\ &- in\nu_\varphi \left[\frac{7}{3} \frac{\mu_0}{r_1^2} + \frac{2}{3r_1} \frac{d\mu_0}{dH_0} \frac{dH_0}{dr_1} \right] - \frac{2}{3} \frac{d\mu_0}{dH_0} \frac{dH_0}{dr_1} i\alpha \nu_x - \nu_r \left[\frac{4}{3} \frac{\mu_0}{r_1^2} + \frac{2}{3r_1} \frac{d\mu_0}{dH_0} \frac{dH_0}{dr_1} \right] + \\ &+ i\alpha h \frac{d\mu_0}{dH_0} \frac{dV_{x0}}{dr_1} + inh \frac{1}{r_1} \left(\frac{dV_{\varphi 0}}{dr_1} - \frac{V_{\varphi 0}}{r_1} \right) \frac{d\mu_0}{dH_0} \left. \right\} \\ R_0 \left[\left(-i\omega + i\alpha V_{x0} + in \frac{V_{\varphi 0}}{r_1} \right) h + \nu_r \frac{dH_0}{dr_1} \right] &= \left(-i\omega + i\alpha V_{x0} + in \frac{V_{\varphi 0}}{r_1} \right) p + \nu_r \frac{dP_0}{dr_1} + \\ &+ \frac{1}{\text{Re } \delta \sigma} \left\{ - \left(\alpha^2 + \frac{n^2}{r_1^2} \right) \mu_0 h + \mu_0 \frac{d^2 h}{dr_1^2} + \frac{dh}{dr_1} \left(\frac{\mu_0}{r_1} + 2 \frac{d\mu_0}{dr_1} \frac{dH_0}{dr_1} \right) + \right. \end{aligned}$$

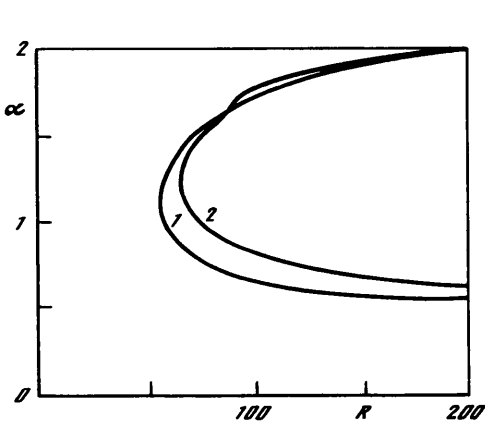
$$\begin{aligned}
& + h \left[\frac{1}{r_1} \frac{d\mu_0}{dH_0} \frac{dH_0}{dr_1} + \frac{d\mu_0}{dH_0} \frac{d^2 H_0}{dr_1^2} \right] + \frac{d^2 \mu_0}{dH_0^2} \left(\frac{dH_0}{dr_1} \right)^2 \left. \right\} + \frac{1}{\text{Re } \delta} \left\{ 2\mu_0 \frac{dV_{x0}}{dr_1} \left(\frac{dv_x}{dr_1} + i\alpha v_r \right) + \right. \\
& \left. + 2\mu_0 \left(\frac{dV_{\varphi 0}}{dr_1} - \frac{V_{\varphi 0}}{r_1} \right) \left(\frac{dv_\varphi}{dr_1} - \frac{v_\varphi}{r_1} + \frac{inv_r}{r_1} \right) + \frac{d\mu_0}{dH_0} h \left(\left[\frac{dV_{x0}}{dr_1} \right]^2 + \left[\frac{dV_{\varphi 0}}{dr_1} - \frac{V_{\varphi 0}}{r_1} \right]^2 \right) \right\} \\
p & = \frac{\gamma - 1}{\gamma} (R_0 h + H_0 p) \\
\frac{dv_r}{dr_1} & + \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{R_0} \frac{dR_0}{dr_1} \right) v_r + i\alpha v_x + \frac{in}{r_1} v_\varphi + \left(i\alpha V_{x0} + \frac{nV_{\varphi 0}}{r_1} \right) \left(\frac{p}{P_0} - \frac{h}{H_0} \right) = i\omega \left(\frac{p}{P_0} - \frac{h}{H_0} \right)
\end{aligned}$$

Здесь σ – число Прандтля, а γ – отношение удельных теплоемкостей. Для возмущенных функций в качестве граничных условий используется условие затухания всех возмущенных величин на больших расстояниях от оси вязкого ядра вихря и условия ограниченности и единственности значений всех функций течения на оси вихря при $(r_1 = 0)$. Эти последние условия в случае сжимаемого теплопроводного газа фактически сводятся к требованию, чтобы все возмущенные функции течения, исключая давление, принимали нулевые значения на оси вихря. Возмущенное давление на оси вихря при этом оказывается ограниченным и вычисляется в процессе решения краевой задачи. Такое поведение возмущенных величин аналогично поведению возмущенных функций течения в несжимаемой жидкости, которое подробно проанализировано в [14].

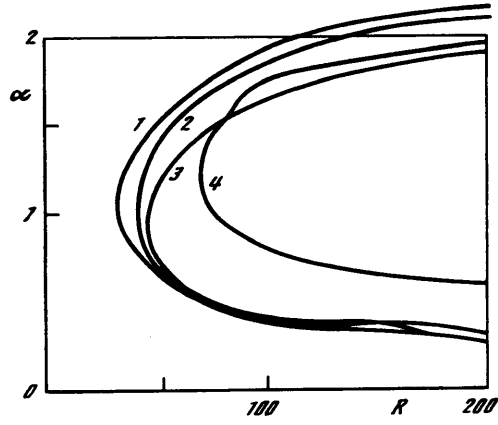
Система уравнений для возмущений совместно с граничными условиями представляет собой задачу на собственные значения. Для поиска собственных значений и векторов был использован метод, аналогичный конечно-разностному методу, предложенному в [11, 15].

Для этого полубесконечный интервал отображался на единичный отрезок $\eta \in [0, 1]$ с помощью дробно-линейного преобразования $\eta = g_e r_1 / (r_1 + L)$, $g_e = 1 + L/r_{1e}$, где r_{1e} – внешняя граница расчетной области, а параметр L использовался для оптимизации распределения расчетных узлов внутри вязкого ядра. Интервал $\eta \in [0, 1]$ делился на N равных отрезков. Система уравнений, записанная в новых переменных, заменялась соответствующим конечно-разностным аналогом с использованием центральных разностей второго порядка точности для производных. С учетом граничных условий для возмущенных функций течения описанная процедура приводит к системе из $5N-9$ алгебраических уравнений относительно $5N-9$ неизвестных. Таким образом, задача сводится к отысканию собственных значений комплексной матрицы общего вида $A\Phi = \omega B\Phi$, где ω – собственное значение системы, Φ – конечно-разностное представление собственной функции, соответствующей данному собственному значению, а A и B – комплексные блочно-трехдиагональные матрицы, имеющие ненулевые блоки с размерами 5×5 . Для определения собственных значений и векторов были использованы стандартные программы обращения матриц и вычисления их собственных значений и векторов.

2. Результаты. Были проведены расчеты устойчивости завихренного течения при малом числе Маха спутного потока $M_\infty < 0,1$, когда течение практически не отличается от течения несжимаемой жидкости. Для апробации метода расчета собственных значений было проведено сравнение с известными данными линейной теории устойчивости вязкого завихренного течения несжимаемой жидкости [16]. В качестве профилей основного невозмущенного течения было выбрано распределение скоростей, задаваемое в начальном сечении формулами (1.3), с параметрами $M_\infty = 0,05$, $\Delta = 1$, $\beta = 1$, $\Gamma = 0,95$, что соответствует одному из распределений параметров завихренного течения, рассмотренных в [16].



Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 1. Нейтральные кривые для профилей скоростей в вязком ядре с параметрами $M_\infty = 0,05$, $\Delta = 1$, $\beta = 1$, $\Gamma = 0,95$. Кривая 1 соответствует результатам работы [16], кривая 2 – данная работа

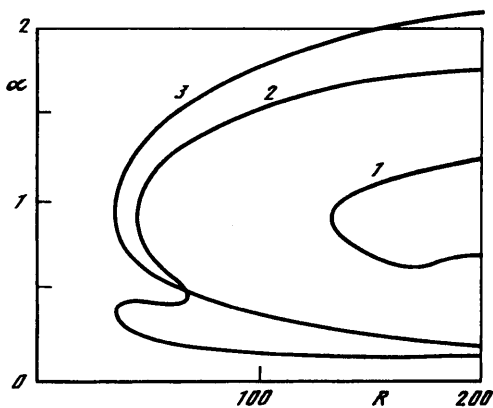
Фиг. 2. Нейтральные кривые 1–3 для азимутального волнового числа $n = -2$ и течений с параметрами $\Delta = 1$, $\beta = 1$, $\Gamma = 0,45$ и чисел Маха соответственно $M_\infty = 0,05$; $0,5$; $0,8$, кривая 4 соответствует $M_\infty = 0,05$ и $\Gamma = 0,95$

Сравнение нейтральных кривых, приведенных на фиг. 1 в плоскости $(\alpha, R = \text{Re } \delta)$ для азимутального волнового числа $n = -2$, показывает хорошее согласование результатов, кроме небольшого расхождения нижних ветвей кривых нейтральной устойчивости вблизи критического числа Рейнольдса.

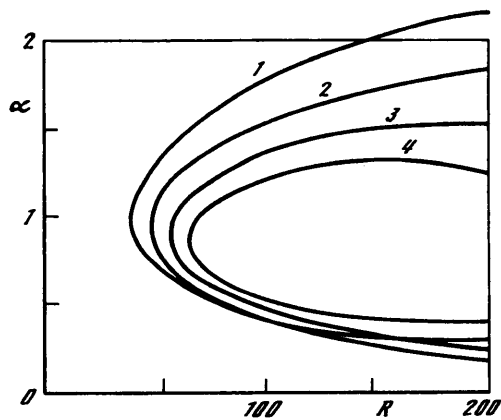
Фигура 2 иллюстрирует влияние M_∞ на характеристики нейтральных возмущений при фиксированном значении азимутального волнового числа $n = -2$ для профилей невозмущенного течения, соответствующих параметрам $\Delta = 1$, $\beta = 1$, $\Gamma = 0,45$. С ростом числа Маха изменяется в основном положение верхней ветви кривой нейтральной устойчивости, приводя при фиксированном значении числа Рейнольдса к уменьшению диапазона волновых чисел, соответствующих неустойчивым возмущениям. В то же время нижние ветви нейтральных кривых практически совпадают.

Для сравнения на фиг. 2 нанесена также кривая 4, соответствующая $M_\infty = 0,05$, $\Gamma = 0,95$, азимутальному волновому числу $n = -2$ и параметрам $\Delta = 1$, $\beta = 1$. Вид нейтральных кривых и характеристики устойчивости закрученного потока могут существенно зависеть не только от циркуляции окружной составляющей скорости Γ , как это показано в [16], но и от числа Маха спутного потока M_∞ . Другим важным параметром, определяющим величину критического числа Рейнольдса, а также вид и расположение кривой нейтральной устойчивости в плоскости (α, R) , является азимутальное волновое число n . В качестве иллюстрации, на фиг. 3 показаны кривые нейтральной устойчивости для азимутальных чисел $n = +1, -1, -2$, полученные для завихренного течения, соответствующего параметрам $M_\infty = 0,8$, $\Delta = 1$, $\beta = 1$, $\Gamma = 0,45$.

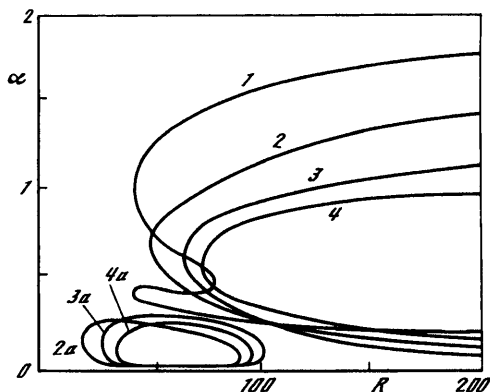
Как показывают расчеты, для определения критического числа Рейнольдса в рассмотренном диапазоне M_∞ и Γ наибольший интерес представляют возмущения, соответствующие азимутальным волновым числам $n = -1$ и -2 , так как именно для них величина критического числа Рейнольдса принимает наименьшие значения. Отрицательные значения n соответствуют возмущениям, которые обладают противоположным по отношению к невозмущенному закрученному потоку вращением.



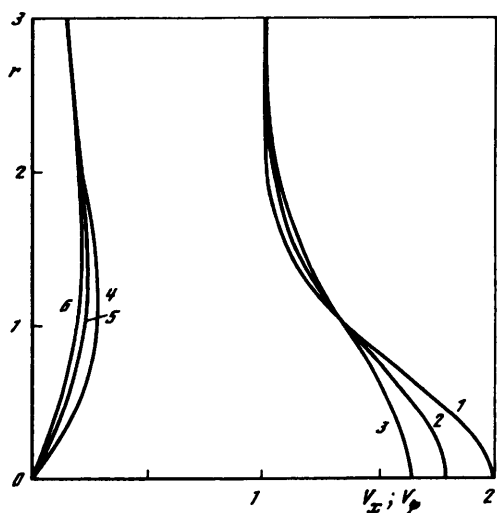
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

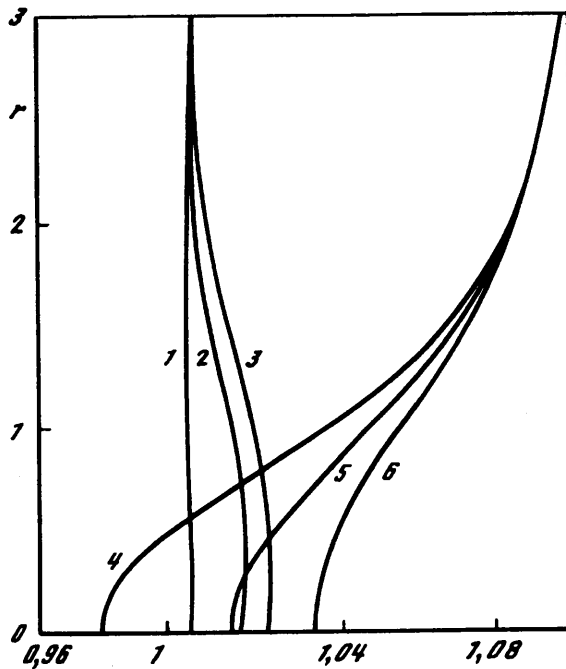
Фиг. 3. Нейтральные кривые 1–3 для течений с параметрами $\Delta = 1$, $\beta = 1$, $\Gamma = 0,45$, $M_\infty = 0,8$ соответствуют азимутальным волновым числам $n = +1; -1; -2$

Фиг. 4. Нейтральные кривые для течения с начальными параметрами $M_\infty = 0,8$, $\Delta = 1$, $\beta = 1$, $\Gamma = 0,45$, $n = -2$ соответствуют сечениям вихря с $x = 0; 0,1; 0,15; 0,2$

Фиг. 5. Нейтральные кривые соответствуют $n = -1$ и тем же параметрам основного течения, что и на фиг. 4

Фиг. 6. Профили продольной V_{x0} (кривые 1–3) и окружной (кривые 4–6) составляющих скорости в сечениях с $x = 0; 0,1; 0,2$ для закрученного течения с параметрами, указанными на фиг. 4

Ниже по течению вязкая диссипация приводит даже в безградиентном спутном потоке к значительной перестройке профилей скоростей невозмущенного течения в вязком ядре вихря и созданию значительного неблагоприятного продольного градиента давления вдоль оси вихря, интенсивность которого зависит от распределения окружной составляющей скорости. Рост давления на оси вязкого ядра вихря и в



Фиг. 7. Профили энтальпии H_0 (кривые 1–3) и давления P_0 (кривые 4–6) в сечениях с $x = 0; 0,1; 0,2$ для течения в вязком ядре вихря с параметрами, указанными на фиг. 4

области, примыкающей к ней, вызывает торможение потока и значительное уменьшение продольной составляющей скорости вблизи оси вихря. Перестройка профилей окружной и продольной составляющих скорости, давления и энтальпии может привести к изменению критического числа Рейнольдса и характеристик нейтральных возмущений.

В качестве иллюстрации сказанного выше на фиг. 4–5 приведены кривые нейтральной устойчивости для значений азимутального числа $n = -2$ и -1 в различных сечениях, полученные для закрученного течения с начальными профилями, соответствующими параметрам $M_\infty = 0,8$, $\Delta = 1$, $\beta = 1$, $\Gamma = 0,45$. На фиг. 6 показаны профили продольной (кривые 1–3) и окружной составляющих скорости (кривые 4–6) для $x = 0; 0,1; 0,2$ соответственно. Наличие неблагоприятного продольного градиента давления вдоль оси вихря приводит к существенному уменьшению продольной составляющей скорости вблизи оси вихря. Максимальные значения окружной составляющей скорости, достигаемые вблизи оси вихря, также уменьшаются, что приводит к некоторому уменьшению закрутки потока. На фиг. 7 показаны распределения энтальпии H_0 и распределения давления P_0 поперек вязкого ядра вихря в сечениях $x = 0; 0,1; 0,2$.

Расчеты, проведенные для азимутального волнового числа $n = -2$, показывают, что перестройка профилей продольной и окружной составляющих скорости ниже по потоку от начального сечения приводит к некоторому увеличению критического числа Рейнольдса, а нейтральные кривые, соответствующие более далеким сечениям вихря, смещаются при этом в сторону больших чисел Рейнольдса. Одновременно с увеличением критического числа Рейнольдса уменьшается диапазон неустойчивых волновых чисел α , что вызвано в основном смещением верхней ветви нейтральных кривых в сторону меньших значений α .

Для азимутального числа $n = -1$ нейтральные кривые имеют более сложный вид (фиг. 5). Кривая 1 – нейтральная кривая для начального сечения вихря $x = 0$ с параметрами $M_\infty = 0,8$, $\Delta = 1$, $\beta = 1$, $\Gamma = 0,45$. При $10 < R < 80$ область неустойчивости оказывается разбитой на две независимые части, которые при больших числах Рейнольдса сливаются друг с другом. Вид кривых нейтральной устойчивости для $n = -1$ и -2 при больших числах Рейнольдса оказывается аналогичным.

При смещении ниже по потоку в сечениях, соответствующих координатам $x = 0,1; 0,15; 0,2$, область неустойчивых возмущений оказывается разбитой на две части. Для азимутального числа $n = -1$ в сечениях вихря $x > 0,05$ при небольших числах Рейнольдса появляется замкнутая область неустойчивости. Эта область соответствует существенно меньшим значениям продольного волнового числа α и меньшим значениям критического числа Рейнольдса, чем основная область неустойчивости. Нейтральные кривые, соответствующие замкнутым областям неустойчивости, представлены кривыми 2,а–4,а на фиг. 5 для сечений $x = 0,1; 0,15; 0,2$ соответственно, в то время как основные области неустойчивости соответствуют кривым 2–4. Основная область неустойчивости и нейтральные кривые для азимутального волнового числа $n = -1$ по своему виду, величине критического числа Рейнольдса и диапазону неустойчивых значений продольного волнового числа α мало отличаются от соответствующих параметров нейтральных возмущений при $n = -2$.

Заключение. Представлены результаты численного анализа линейной задачи устойчивости закрученных течений вязкого теплопроводного газа. Показано, что число Маха спутного невязкого потока и циркуляция окружной составляющей скорости в спутном невязком потоке оказывают существенное влияние на характеристики устойчивости, критическое число Рейнольдса и поведение нейтральных возмущений. Наиболее неустойчивыми оказываются возмущения, соответствующие отрицательным значениям азимутального волнового числа, т.е. возмущения, имеющие вращение, противоположное по отношению к невозмущенному закрученному потоку.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-00586).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Werle H. Visualization en tunnel hydrodynamique // Rech. Aeronaut. 1953. № 33. P. 3–7.
2. Hall M.G. Vortex breakdown // Annu. Rev. Fluid Mech. 1972. V. 4. P. 195–218.
3. Leibovich S. Vortex stability and breakdown survey and extention // AIAA Journal. 1984. V. 22. № 9. P. 1192–1206.
4. Liu C., Menne S. Simulation of a three-dimansional vortex breakdown // AIAA Paper. 1989. № 89-1806. 5 p.
5. Lessen M.R., Singh P.J., Paillet F. The stability of the trailing line vortex. Pt 1. Invidic theory // J. Fluid Mech. 1974. V. 63. Pt 4. P. 753–763.
6. Batchelor G.K. Axial flow in trailing line vortices // J. Fluid Mech. 1964. V. 20. Pt 4. P. 645–658.
7. Menne S. Vortex Breakdown in Axisymmetric Flow // AIAA Paper. 1988. № 88-0506. 9 p.
8. Brown G.L., Lopez J.M. Axisymmetric vortex breakdown. Pt 2. Physical Mechanisms // J. Fluid Mech. 1990. V. 221. P. 553–576.
9. Reyna L.G., Menne S. Numerical prediction of flow in slender vortices // Intern. J. Comput. Fluids. 1988. V. 16. № 3. P. 239–256.
10. Benjamin T.B. Theory of the vortex breakdown phenomenon // J. Fluid Mech. 1962. V. 14. Pt 4. P. 593–629.
11. Казаков А.В. Влияние нагрева поверхности на устойчивость пограничного слоя на линии растекания скользящего крыла // Докл. IUTAM-симпоз. по нелинейной устойчивости и переходу в трехмерных пограничных слоях. Манчестер, 1995.

12. *Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р.* Вычислительная гидромеханика и теплообмен. М.: Мир, 1990. Т. 2. 726 с.
13. *Kazakov A.V.* Stability of the viscous subsonic vortex flow with volume energy supply // Abstr. Intern. Congr. Theoretical and Applied Mechanics. Kyoto, Japan, 1996. P. 194.
14. *Batchelor G.K., Gill A.E.* Analysis of the stability of axisymmetric jets // J. Fluid Mech. 1962. V. 14. Pt 4. P. 529–551.
15. *Malik M.R., Orszag S.A.* Efficient computation of the stability of three-dimensional compressible boundary layers // AIAA Paper. 1981. № 81-1227. 13 p.
16. *Lessen M., Paillet F.* The stability of a trailing line vortex. Pt 2. Viscous theory // J. Fluid Mech. 1974. V. 65. Pt 4. P. 769–779.

Москва

Поступила в редакцию
20.XI.1996