

УДК 532.516.5–3+519.683

© 1998 г. О.А. БЕССОНОВ, В.А. БРАЙЛОВСКАЯ, Б. РУ

### ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХМЕРНОГО СДВИГОВОГО ТЕЧЕНИЯ В ПОЛОСТИ С ДВИЖУЩИМИСЯ КРЫШКАМИ

Приводятся результаты расчетов нестационарного сдвигового течения вязкой несжимаемой жидкости в полости с движущимися крышками для различных геометрий и значений числа Рейнольдса. Описывается разработанный для численного исследования метод решения трехмерных нестационарных уравнений Навье–Стокса в регулярной области, а также прямой метод распараллеливания решения для многопроцессорной ЭВМ с распределенной памятью. Проводится сравнение тестовых расчетов с результатами других авторов.

Численное моделирование трехмерного течения несжимаемой вязкой жидкости в полости с подвижной границей является распространенной тестовой задачей для отработки точности и эффективности вычислительных алгоритмов. В материалах рабочей группы ГАММ [1] дан сравнительный анализ решений тестовой проблемы, полученных различными авторами. Данные исследования показали, что для больших значений числа Рейнольдса ( $Re \geq 3200$ ) течение приобретает существенно нестационарный характер, что было впервые продемонстрировано в экспериментальной работе [2].

Другое направление исследований посвящено изучению сдвигового течения в каналах и полостях с границами, движущимися в противоположных направлениях, главным образом для двумерного случая. Результаты моделирования двумерной гидродинамики в полостях различного удлинения приводятся в [3–5].

Проведенные ранее исследования устойчивости плоских течений жидкости в области с двумя движущимися в противоположные стороны границами [4, 5] позволили выявить три устойчивых режима течения в зависимости от числа  $Re$  и отношения сторон области. В широком диапазоне геометрических параметров и чисел  $Re \leq 3000$  колебательных режимов не обнаружено.

В настоящей работе исследуется нестационарное пространственное сдвиговое течение в полости с одной и двумя движущимися крышками с помощью разработанного эффективного трехмерного численного алгоритма. На этой основе оценивается адекватность численного моделирования в рамках двумерной модели.

**1. Постановка задачи.** Математическое моделирование течения основано на численном решении трехмерных нестационарных уравнений Навье–Стокса для несжимаемой вязкой жидкости в переменных завихренности – векторный потенциал. Уравнения записываются в консервативном виде

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \times (\omega \times V) = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega \quad (1.1)$$

$$\nabla^2 \psi = -\omega \quad (1.2)$$

Завихренность  $\omega$  и векторный потенциал  $\psi$  определяются через скорость  $V$

$$\omega = \nabla \times V \quad (1.3)$$

$$\mathbf{V} = \nabla \times \psi, \quad \nabla \cdot \psi = 0 \quad (1.4)$$

Использование определения векторного потенциала (1.4) позволяет тождественно удовлетворить уравнению неразрывности  $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ .

Для скорости  $\mathbf{V}$  на границах задаются условия прилипания и непротекания. На движущихся крышках значение скорости равно  $+1$  и  $-1$  соответственно. Граничные условия для касательных и нормальной компонент векторного потенциала ( $\psi_s$ ,  $\psi_t$  и  $\psi_n$  соответственно) задаются согласно [6]

$$\psi_s = 0, \quad \psi_t = 0, \quad \frac{\partial \psi_n}{\partial n} = 0 \quad (1.5)$$

Нормальные компоненты завихренности на границе полагаются равными нулю. Граничные условия для касательных компонент выводятся из следующего уравнения, удовлетворяемого в соседнем с границами слое узлов

$$\nabla^2 \mathbf{V} = -\nabla \times \omega \quad (1.6)$$

и обсуждаются подробнее в следующем разделе.

Уравнение (1.6) идентично (1.2) и представляет собой уравнение для скорости в переменных завихренность – скорость.

**2. Метод решения.** Для численного решения уравнений (1.1), (1.2) в области, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда (фиг. 1,а) применяется метод конечных разностей. Используется равномерная сетка в направлениях  $X$  и  $Y$  и неравномерная в направлении  $Z$  со сгущениями у верхней и нижней границ. Для аппроксимации конвективных членов используется схема 2-го порядка точности с разностями против потока (модифицированная схема QUICK [7, 8]). Уравнения для завихренности (1.1) и для векторного потенциала (1.2) решаются отдельно.

Для решения уравнения завихренности (1.1) применяется вариант неявного метода переменных направлений ADI [1], обеспечивающий 2-й порядок точности решения по времени. Решение для каждой компоненты завихренности разбивается на три прохода метода переменных направлений с прогонками вдоль осей  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  соответственно.

Вычисление значений касательных компонент завихренности иллюстрируется на примере расчета  $\omega_x$  на верхней границе  $Z = 1$  из уравнения

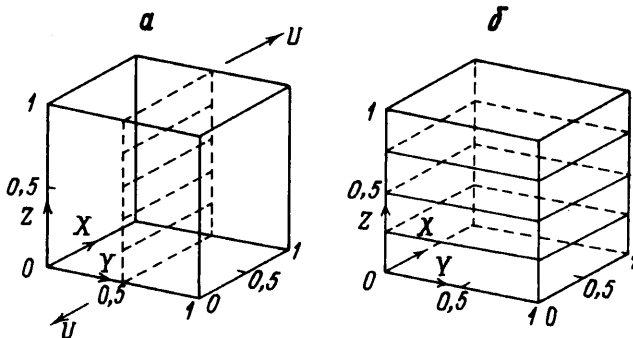
$$\nabla^2 V_y = -\frac{\partial \omega_x}{\partial z} + \frac{\partial \omega_z}{\partial x} \quad (2.1)$$

Расписывая это уравнение на соответствующих сеточных шаблонах для соседнего с границей узла сетки, получаем выражение для  $\omega_x$  на границе.

Уравнение Пуассона для векторного потенциала (1.2) решается методом разделения переменных с использованием быстрого преобразования Фурье [9]. Решение разбивается на следующие шаги: двумерное преобразование Фурье в плоскости  $X, Y$ ; прогонки вдоль оси  $Z$ ; обратное преобразование Фурье в плоскости  $X, Y$ . В зависимости от граничных условий применяется разложение в ряд по синусам либо по косинусам.

**3. Распараллеливание.** Настоящая работа выполнена на параллельной ЭВМ iPSC/860 фирмы "Intel" с использованием четырех процессоров. Данная машина относится к классу многопроцессорных ЭВМ с распределенной памятью, построенных на быстродействующих RISC-микропроцессорах. Такие компьютеры являются наиболее эффективным инструментом для решения ресурсоемких задач гидродинамики с точки зрения соотношения эффективность–стоимость.

Организация ЭВМ как множества независимых процессоров (узлов) с собственной памятью, объединенных относительно медленными коммуникационными каналами, требует специальных подходов к распараллеливанию решения задачи. Главным требованием является сведение задачи к такому виду, когда время, затрачиваемое на обмен данными между узлами, составляет небольшую долю от времени счета.



Фиг. 1. Вычислительная область задачи (а) и ее разбиение для распараллеливания (б)

С учетом этого требования вычислительная область задачи разбивается на несколько подобластей вдоль оси  $Z$  (фиг. 1, б) в соответствии с числом процессоров. Данные в подобластях обрабатываются независимо в соответствующих процессорах, и между процессорами передаются пограничные двумерные массивы. Благодаря этому объем передачи данных составляет  $O(N^2)$ , в то время как объем вычислений равен  $O(N^3)$ .

Для реализации данного подхода необходимо распараллелить каждый этап алгоритма. С точки зрения возможности распараллеливания все вычислительные этапы задачи делятся на две группы.

1. Шаги алгоритмов ADI и быстрого преобразования Фурье, направленные вдоль осей  $X$  и  $Y$ , не зависят от порядка вычислений вдоль оси  $Z$  и могут выполняться независимо в различных процессорах с последующим обменом пограничными двумерными массивами.

2. Прогонки вдоль оси  $Z$  существенно зависят от порядка вычислений по  $Z$ , так как представляют собой решение трехдиагональных линейных систем, каждая из которых разделена между всеми процессорами. Поэтому вместо метода исключений Гаусса используются различные параллельные методы, например метод Джонссона [10, 11]. В настоящей работе для двух и четырех процессоров используется эффективная модификация метода Джонссона (two-way parallel partition method [12]).

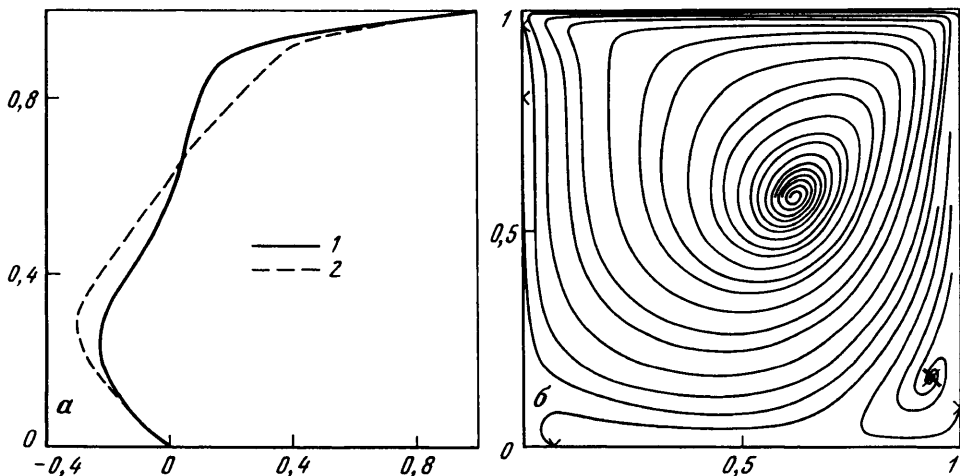
Для повышения эффективности работы процессора в связи с требованием обработки всех массивов в программе с единичным шагом выполнение этапов алгоритма, направленных вдоль осей  $Y$  и  $Z$ , реализуется в виде фронта вычислений и фронтальной плоскости вычислений.

Более подробно метод распараллеливания описан в [13]. Полученные данные об эффективности распараллеливания для двух и четырех процессоров для различных размерностей задачи приведены в таблице.

Результаты показывают достаточно высокую эффективность метода распараллеливания для распространенного класса параллельных ЭВМ с относительно быстрыми процессорами и относительно медленными коммуникационными каналами.

Сетка	Два процессора		Четыре процессора	
	Ускорение	Эффективность, %	Ускорение	Эффективность, %
33×33×42	1,98	98,8	3,22	80,4
65×54×50	2,08	104,2	3,49	87,1
65×65×98	—	—	3,48	87,0

Следует отметить, что примененный метод распараллеливания – прямой, параллельная реализация алгоритма алгебраически тождественна последовательной. Благодаря этому решение не зависит от свойств сходимости алгоритма, как в случае итерационных методов декомпозиции доменов.



Фиг. 2. Течение в полости с движущейся крышкой,  $Re = 400$ :  $a$  – профили  $V_x$  в вертикальном срединном сечении для трехмерного (1) и двумерного (2) случаев,  $b$  – траектории частиц жидкости в сечении  $Y = 0,5$

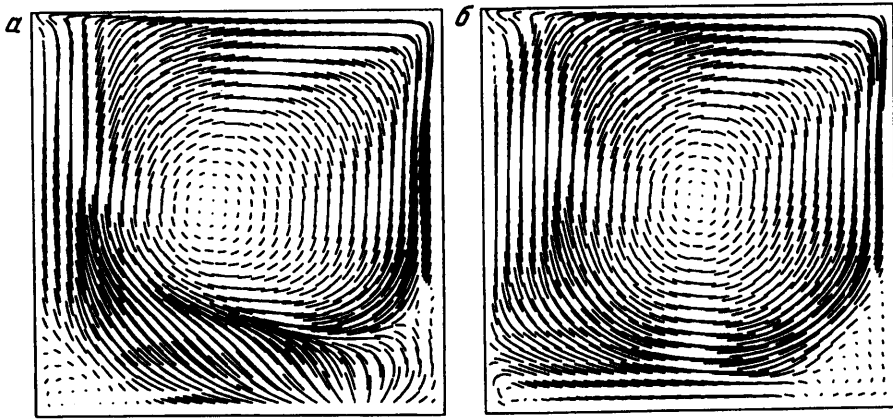
**4. Результаты. Течение в полости с одной движущейся крышкой.** Тестирование разработанного метода проводилось на моделировании течения в кубической полости с верхней движущейся крышкой для значений  $Re = 400, 1000$  и  $2000$ . Характеристики течения после достижения стационарного состояния сравнивались с результатами [14] и показали хорошее качественное и количественное согласие. Например, значения экстремумов профилей скорости в центральных сечениях совпадают с точностью 1–1,5% (0,004–0,005 по абсолютному значению скорости), а координаты центров основного вихря и нижних боковых продольно ориентированных вихрей – с точностью 3–5% (0,01–0,02 по абсолютному значению координаты).

Сопоставление профилей горизонтальной компоненты скорости в вертикальном срединном сечении (сплошная кривая) с результатами [4, 5] на фиг. 2,  $a$  показывает, что положения максимумов скорости и их значения близки к двумерному распределению горизонтальной скорости на вертикальной оси симметрии (штриховая кривая). Снижение величин этих максимумов в трехмерных расчетах объясняется энергетическими затратами на преодоление трения на боковых стенках полости, отсутствующих в двумерной постановке.

Фигура 2,  $b$  демонстрирует наличие трехмерных эффектов даже при числе  $Re = 400$ . Структура течения, представленная в виде траекторий частиц в плоскости симметрии ( $Y = 0,5$ ), похожа на известную картину изолиний функции тока в плоской каверне с движущейся верхней границей. Различия проявляются в нижних вторичных вихрях, где направление движения жидкости меняется на перпендикулярное к плоскости фигуры. На фиг. 2,  $b$  такие места помечены точками.

Для значения  $Re = 3200$  течение в кубической полости приобретает существенно нестационарный характер [13]. В нижней части поперечного сечения  $X = 0,766$  (вблизи задней стенки полости) наблюдается образование продольно ориентированных вихрей Тейлора–Гёртлера (Taylor–Görtler-like vortices), обнаруженных ранее экспериментально [2]. Эти вихри образуются парами, постоянно мигрируют и для данной конфигурации полости слабо развиты и неустойчивы. Полученная картина течения очень близка к представленной в [8].

Поведение течения при  $Re = 3200$  становится гораздо более интересным для полости с расширением 3 : 1 поперек потока (размер полости  $1 \times 3 \times 1$ ), поэтому представляет интерес подробнее описать структуру течения и условия ее формирования.



Фиг. 3. Картина течения в полости  $1 \times 3 \times 1$ ,  $Re = 3200$ , сечения  $Y = 1,5$  (а) и  $Y = 0,4$  (б)

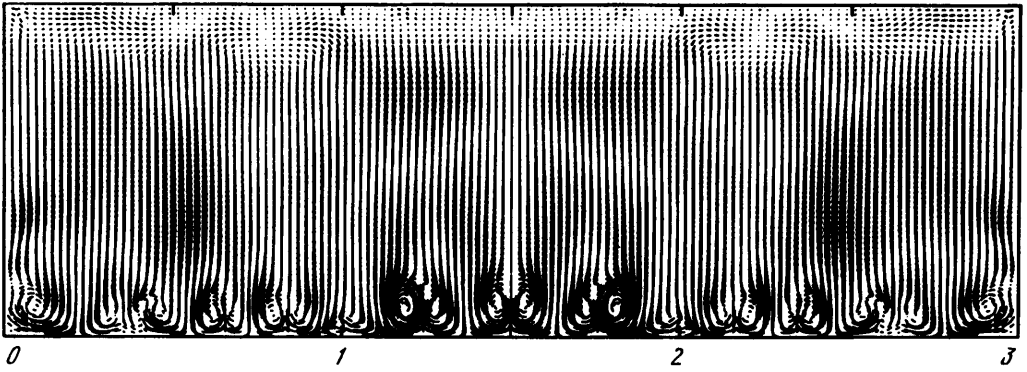
Картина течения в виде траекторий частиц в проекции на плоскость  $XZ$  в центральном сечении ( $Y = 1,5$ ) и ближе к боковой стенке ( $Y = 0,4$ ) показана на фиг. 3, а и б соответственно. Основной циркуляционный вихрь генерируется движением жидкости, увлекаемой крышкой. Результатом потери его энергии на преодоление трения на вертикальной стенке, вдоль которой жидкость опускается ко дну, является вторичный "опускной" вихрь в нижнем правом углу (отчетливее виден на фиг. 3, б). Продолжая движение в сторону второй вертикальной стенки, вдоль которой жидкость поднимается, основной вихрь генерирует другой вторичный "подъемный" вихрь в левом придонном углу (лучше виден на фиг. 3, а). Размер этих вторичных вихрей зависит от близости сечения к боковым стенкам. Условия прилипания на этих ограничивающих поверхности полости в поперечном направлении стенках приводят к поглощению энергии в поле течения и изменяют в конечном счете размер и положение основного и вторичных вихрей.

Формирование угловых вихрей у боковых стенок вызывает вращательное движение, которое постепенно распространяется от границ в глубь полости (фиг. 4). Этот эффект при наличии вогнутой поверхности границы между основным вихрем и вторичным опускным вихрем (фиг. 3) приводит к генерации вихрей Тейлора–Гёртлера. На фиг. 4 в поперечном сечении  $X = 0,766$  можно наблюдать около девяти пар хорошо развитых вихрей. С течением времени вихри Тейлора–Гёртлера рождаются, исчезают и эволюционируют непериодическим образом.

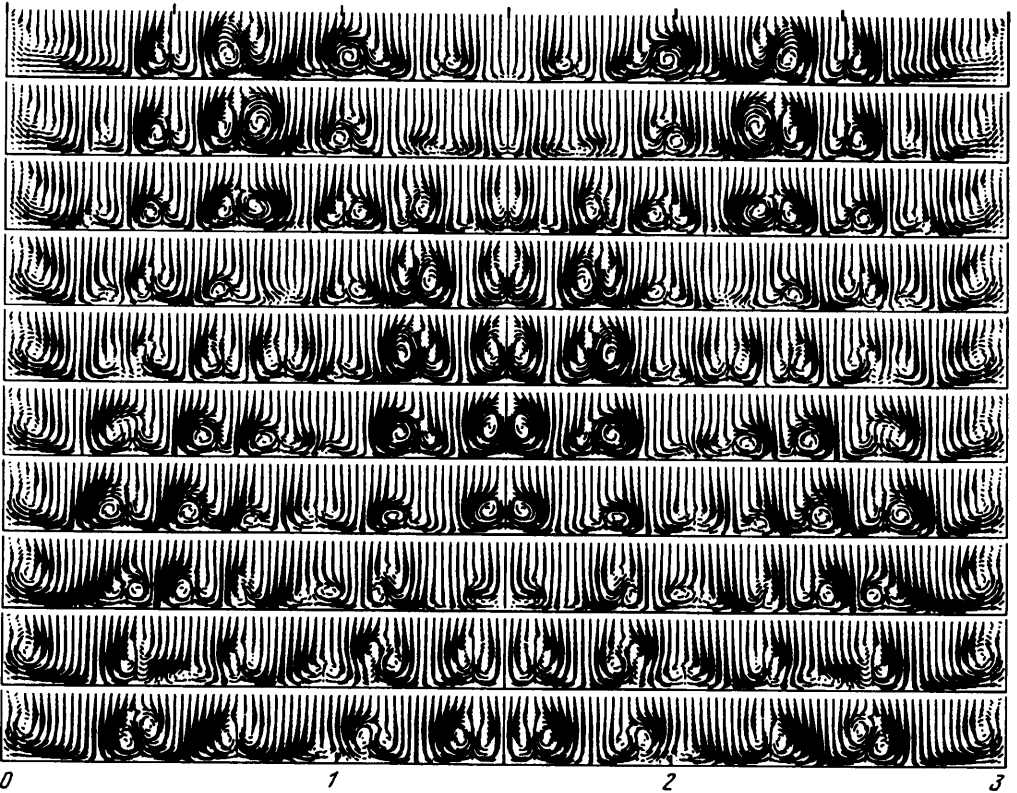
На фиг. 5 показана картина течения в динамике в виде последовательности кадров с интервалом  $\Delta T = 1$  (сверху вниз; в каждый момент времени показана только нижняя часть сечения, составляющая около 20% по высоте). Картина хорошо иллюстрирует эволюцию вихрей Тейлора–Гёртлера и показывает характерные временные масштабы их существования. Хотя в природе образования этих вихрей лежит влияние боковых стенок трехмерной полости, из фиг. 5 видно, что новые пары вихрей зарождаются в центре путем деления старой пары на две и затем происходит их движение в сторону боковых стенок. Картина течения исследовалась в интервале времени  $T = 0-200$ . Для расчетов использовалась сетка  $65 \times 129 \times 94$  со сгущениями у верхней и нижней границ.

Результаты, полученные для полости  $1 \times 3 \times 1$  при  $Re = 3200$ , хорошо согласуются с материалами рабочей группы GAMM [1] и значительно дополняют их в части мелкомасштабного (по времени) исследования динамики течения, а также имеют лучшее пространственное разрешение.

**5. Течение в полости с двумя движущимися крышками.** Сдвиговое течение, вызванное движением в противоположные стороны горизонтальных крышек полости,



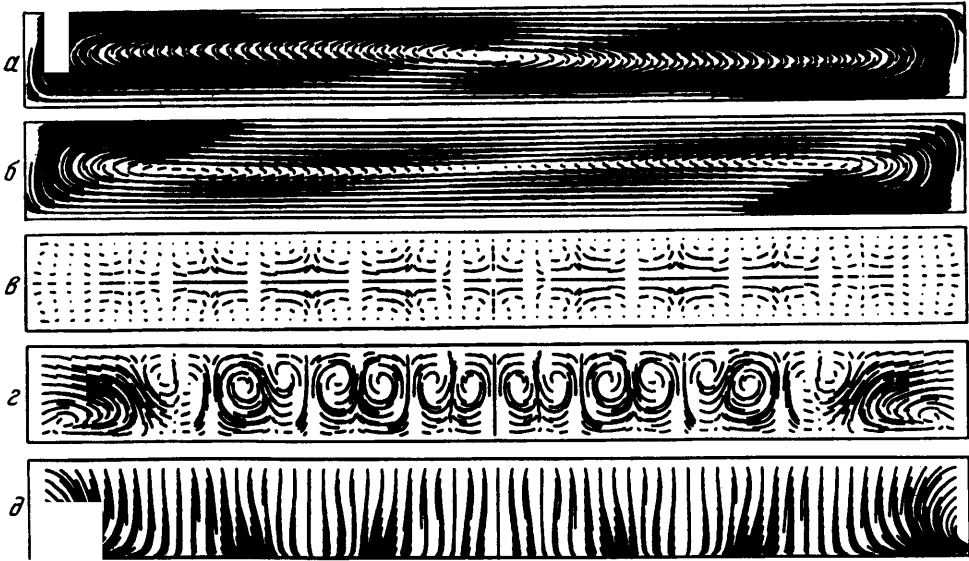
Фиг. 4. Картина течения в полости  $1 \times 3 \times 1$ ,  $Re = 3200$ , сечение  $X = 0,766$



Фиг. 5. Течение в полости  $1 \times 3 \times 1$ ,  $Re = 3200$ . Эволюция вихрей Тейлора–Гёртлера, сечение  $X = 0,766$  (сверху вниз,  $T = 46-55$ ,  $\Delta T = 1$ )

рассматривалось для трех различных геометрий: куб с соотношением сторон  $1 \times 1 \times 1$ ; параллелепипед, сплюснутый в вертикальном направлении  $1 \times 1 \times 0,1$ ; и параллелепипед, вытянутый в вертикальном направлении  $1 \times 1 \times 2$ . Варьировались также значения числа  $Re$  (400, 1000 и 5000).

Моделирование течения в уплощенной полости с отношением высоты к длине  $H/L = 0,1$  (размер полости  $1 \times 1 \times 0,1$ ) с двумя крышками, движущимися в противоположных направлениях, проводилось на равномерной сетке  $65 \times 65 \times 50$ .



Фиг. 6. Течение в полости с разнонаправленно движущимися крышками,  $H/L = 0,1$ ,  $Re = 1000$ : а -  $Y = 1/2$ , б -  $Y = 1/16$ , в -  $X = 1/2$ , г -  $X = 7/8$ , д -  $X = 15/16$



Фиг. 7. Течение в полости с разнонаправленно движущимися крышками,  $H/L = 0,1$ ,  $Re = 5000$ : а -  $Y = 1/2$ , б -  $Y = 1/16$ , в -  $X = 1/2$ , г -  $X = 7/8$ , д -  $X = 15/16$

Для значения  $Re = 1000$  состояние, близкое к стационарному, достигается в момент времени  $T = 20$  (фиг. 6). Картина течения в продольных сечениях (центральном  $Y = 1/2$  и боковом  $Y = 1/16$ ) качественно совпадает с двумерным случаем. В поперечных сечениях ( $X = 1/2, 7/8, 15/16$ ) видны слабо развитые структуры, подчеркивающие трехмерность течения (здесь для лучшей визуализации течения выбран масштаб скорости в 4 раза больший, чем для продольных сечений). Наиболее отчетливо продольно ориентированные вихри видны около задней стенки полости ( $X = 7/8$ ).

Для значения  $Re = 5000$  в отличие от двумерного случая [4, 5] картина существенно нестационарная и нерегулярная. В момент времени  $T = 10$  (фиг. 7) заметно нарушается центральная симметрия, поэтому продольные сечения не дают представления о картине в целом. В поперечных сечениях (также изображенных с учетверенным масштабом скорости) видно множество нерегулярных вихревых структур с элементами симметрии, однако с течением времени элементы симметрии теряются и картина становится хаотической.

В вытянутой вверх каверне  $1 \times 2$  картина течения носит регулярный характер вплоть до значений  $Re = 2000$  без возникновения сложных вторичных пространственных структур и с установлением стационарного состояния. При увеличении числа Рейнольдса до  $Re = 5000$  у движущихся верхней и нижней крышек появляются вторичные слабо сформировавшиеся вихри Тейлора–Гёртлера, которые с течением времени стохастизируются, что в конечном итоге приводит к образованию нерегулярной картины течения в целом.

**Заключение.** Разработан эффективный параллельный численный метод решения трехмерных нестационарных уравнений Навье–Стокса. Для известной тестовой задачи о течении вязкой жидкости в полости с движущейся верхней крышкой получены решения, качественно и количественно согласующиеся с данными других авторов. На параллельной многопроцессорной ЭВМ с распределенной памятью проведено численное исследование различных режимов сдвигового течения в параллелепипеде с движущимися в противоположные стороны границами при различных соотношениях сторон полости и значениях числа  $Re$ .

Выполненное исследование позволяет также на основе сопоставления с результатами двумерных расчетов, проведенных ранее [5] (картины течения, профили скоростей в различных сечениях, коэффициенты трения на движущихся границах, а также поведение кинетической энергии жидкости со временем), оценить область чисел  $Re$  и геометрию каверны, при которых можно проводить адекватное численное моделирование сдвиговых течений в рамках решения двумерных уравнений Навье–Стокса.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Numerical simulation of 3D incompressible unsteady viscous laminar flows: A GAMM workshop // Notes on Numerical Fluid Mechanics. / Ed. M. Deville et al. Braunschweig: Vieweg, 1992. V. 36. 149 p.
2. Koseff J.R., Street R.L. The lid-driven cavity flow: A synthesis of qualitative and quantitative observations // Trans. ASME. J. Fluids Engin. 1984. V. 106. N 4. P. 390–398.
3. Ryu H.W., Lee D.I. Numerical study of viscous flows in rectangular cavities with translating top and bottom walls // Proc. 3rd Pacific Chem. Eng. Cong. Korea Seoul. 1983. V. 1. P. 7–12.
4. Атабаев С.Ч., Брайловская В.А., Коган В.Р. и др. Течение вязкой жидкости в плоской каверне // Процессы переноса в вынужденных и свободноконвективных течениях. Новосибирск, 1987. С. 168–176.
5. Брайловская В.А., Коган В.Р., Полежаев В.И., Феоктистова Л.В. Структуры и режимы сдвигового течения жидкости в плоской области с движущимися границами // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 2. С. 53–56.
6. Roache P.J. Computational fluid dynamics. Albuquerque: Hermosa, 1976. 446 p. (Рус. перев.: Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 616 с.)
7. Freitas C.J., Street R.L., Findikakis A.N., Koseff J.R. Numerical simulation of three-dimensional flow in a cavity // Intern. J. Numer. Meth. Fluids. 1985. V. 5. N 6. P. 561–575.
8. Perng C.Y., Street R.L. Three-dimensional unsteady flow simulations: Alternative strategies for a volume-averaged calculation // Intern. J. Numer. Meth. Fluids. 1989. V. 9. N 3. P. 341–362.
9. Hockney R.W. A fast direct solution of Poisson's equation using Fourier analysis // J. Assoc. Comput. Math. 1965. V. 12. N 1. P. 95–113.
10. Ortega J.M. Introduction to parallel and vector solution of linear systems. N.Y.: Plenum Press, 1988.



305 p. (Рус. перев.: *Омега Дж.* Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем. М.: Мир, 1991. 365 с.)

11. *Johnsson S.L.* Solving narrow banded systems on ensemble architectures // ACM Trans. Math. Software. 1985. V. 11. N 3. P. 271–288.
12. *Walshaw C., Farr S.J.* A two-way parallel partition method for solving tridiagonal systems // University of Leeds, U.K., School of Computer Studies Research Report Series. 1993. Report 93.25.20 p.
13. *Bessonov O., Brailovskaya V., Polezhaev V., Roux B.* Parallelization of the solution of 3D Navier-Stokes equations for fluid flow in a cavity with moving covers // Lecture Notes in Comput. Sci. Berlin: Springer, 1995. V. 964. P. 385–399.
14. *Guj G., Stella F.* A vorticity-velocity method for the numerical solution of 3D incompressible flows // J. Comput. Phys. 1993. V. 106. N 2. P. 286–298.

Москва  
Нижний Новгород  
Марсель

Поступила в редакцию  
3.IV.1996