

УДК 532.5.013.4 : 534.1

© 1998 г. Д.В. ЛЮБИМОВ, М.В. ХЕННЕР, М.М. ШОЦ

## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА ЖИДКОСТЕЙ ПРИ КАСАТЕЛЬНЫХ ВИБРАЦИЯХ

Рассматривается устойчивость поверхности раздела двух несмешивающихся жидкостей разной плотности, заполняющих плоский горизонтальный слой, совершающий гармонические колебания в горизонтальном направлении. В рамках модели идеальной жидкости найдено преобразование, приводящее задачу о малых плоских возмущениях к уравнению Матье. Исследованы резонансные области неустойчивости, связанные с формированием капиллярно-гравитационных волн. Построена модель, учитывающая диссипативные процессы, обусловленные наличием вязкого трения. Обсуждается роль вязкой диссипации в подавлении резонансной неустойчивости.

Экспериментально было обнаружено возникновение неподвижного волнового рельефа на границе раздела двух несмешивающихся жидкостей при горизонтальных вибрациях, причем возникновение рельефа носит пороговый характер [1, 2]. Волновой рельеф наблюдается лишь тогда, когда плотности жидкостей сравнимы; во всяком случае на свободной поверхности он не возникает.

Теоретическое описание этих явлений было дано в [3, 4] в рамках высокочастотного приближения и осредненного подхода. При этом предполагалась асимптотическая малость одновременно двух параметров: относительной толщины вязких скин-слоев  $\delta = L^{-1} \sqrt{\nu/\omega}$  ( $\nu$  – кинематическая вязкость жидкости,  $\omega$  – частота вибраций,  $L$  – характерный размер гидродинамических структур) и безразмерной амплитуды вибраций  $\epsilon = a/L$ . В этом предельном случае исчезает возможность описания параметрического резонанса и остается лишь основная мода неустойчивости, связанная с развитием неустойчивости Кельвина – Гельмгольца на границе встречных потоков.

Возможность параметрического резонанса возникает при отказе от предельного перехода  $\epsilon \rightarrow 0$ . В настоящей работе исследуется именно этот случай при сохранении предельного перехода  $\delta \rightarrow 0$ . Таким образом, предполагается, что толщина скин-слоев много меньше всех характерных размеров задачи, а на остальные величины не накладывается никаких ограничений. Иными словами, период вибраций предполагается малым по сравнению с временем вязкого затухания, но сравнимым с капиллярно-гравитационными временами. Условие  $\delta \ll 1$  означает, что в уравнениях движения будет пренебрегаться вязкими слагаемыми, т.е. рассмотрение будет вестись в рамках модели идеальной жидкости.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрение задачи для ограниченной области наталкивается на технические трудности описания поведения поверхности раздела вблизи вертикальных стенок. Эти трудности не связаны с сущностью рассматриваемых физических явлений. По этой причине будет рассматриваться бесконечный в горизонтальных направлениях слой толщины  $h = h_1 + h_2$ , заполненный двумя несмешивающимися несжимаемыми жидкостями с плотностями  $\rho_1$  и  $\rho_2$  ( $\rho_1 > \rho_2$ ). Пусть слой совершает колебания в горизонтальном направлении с частотой  $\omega$  и амплитудой  $a$ . Направим ось  $z$  декартовой системы координат вертикально вверх. Начало координат выберем

таким образом, что в отсутствие вибраций тяжелая жидкость будет занимать область  $-h_1 < z < 0$ , а легкая  $0 < z < h_2$ . Ось  $x$  направим вдоль оси вибраций.

Уравнения движения в пренебрежении вязкой диссипацией в системе отсчета, связанной со слоем, запишутся в виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}_\beta}{\partial t} + (\mathbf{v}_\beta \nabla) \mathbf{v}_\beta = -\frac{1}{\rho_\beta} \nabla p_\beta - g\boldsymbol{\gamma} + a\omega^2 \mathbf{j} \cos \omega t, \quad \text{div } \mathbf{v}_\beta = 0 \quad (1.1)$$

Здесь индекс  $\beta = 1, 2$  нумерует жидкости,  $\boldsymbol{\gamma}$  – единичный вектор, направленный вертикально вверх,  $\mathbf{j}$  – единичный вектор вдоль оси  $x$ .

На твердых границах слоя ставятся условия непроницаемости

$$z = -h_1 : \mathbf{v}_1 \boldsymbol{\gamma} = 0; \quad z = h_2 : \mathbf{v}_2 \boldsymbol{\gamma} = 0 \quad (1.2)$$

На границе раздела  $z = \xi(x, y, t)$  выполняются условия баланса нормальных напряжений, непрерывности нормальной компоненты скорости и кинематическое условие

$$p_1 - p_2 = \alpha \text{div } \mathbf{n}, \quad \mathbf{v}_1 \mathbf{n} = \mathbf{v}_2 \mathbf{n}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} + (\mathbf{v}_1 \nabla) \xi = \mathbf{v}_1 \boldsymbol{\gamma} \quad (1.3)$$

Здесь  $\mathbf{n}$  – единичный вектор нормали к поверхности раздела, направленный из первой (нижней) жидкости во вторую,  $\alpha$  – коэффициент поверхностного натяжения.

Кроме того, будем предполагать выполненным условие замкнутости течения

$$\nabla x : \int_{-h_1}^{\xi} \mathbf{v}_1 \mathbf{j} dz + \int_{\xi}^{h_2} \mathbf{v}_2 \mathbf{j} dz = 0 \quad (1.4)$$

**2. Основное течение и задача устойчивости.** Задача (1.1) – (1.4) допускает простое решение, соответствующее плоской границе раздела  $\xi = 0$  и плоскопараллельному течению

$$\mathbf{V}_\beta = U_\beta \mathbf{j} \sin \omega t, \quad U_1 = a\omega \frac{h_2(\rho_1 - \rho_2)}{h_1\rho_2 + h_2\rho_1}, \quad U_2 = -a\omega \frac{h_1(\rho_1 - \rho_2)}{h_1\rho_2 + h_2\rho_1},$$

$$p_\beta = -\rho_\beta g z + a\omega^2 \rho_1 \rho_2 \frac{h_1 + h_2}{h_1\rho_2 + h_2\rho_1} x \cos \omega t \quad (2.1)$$

В случае равных плотностей  $\mathbf{V}_1$  и  $\mathbf{V}_2$  обращающихся в нуль, т.е. жидкости неподвижны относительно слоя. При  $\rho_2 \ll \rho_1$  нижняя жидкость неподвижна относительно лабораторной системы отсчета ( $U_1 = a\omega$ ).

Для исследования устойчивости основного состояния с плоской границей раздела сформулируем задачу для малых возмущений. Линеаризуя (1.1) – (1.4) около решения (2.1), получаем следующие уравнения и граничные условия:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_\beta}{\partial t} + (\mathbf{V}_\beta \nabla) \mathbf{v}_\beta = -\frac{1}{\rho_\beta} \nabla p_\beta, \quad \text{div } \mathbf{v}_\beta = 0 \quad (2.2)$$

$$z = -h_1 : \mathbf{v}_1 \boldsymbol{\gamma} = 0; \quad z = h_2 : \mathbf{v}_2 \boldsymbol{\gamma} = 0 \quad (2.3)$$

$$z = 0 : p_1 - p_2 - (\rho_1 - \rho_2) g \xi = -\alpha \Delta \xi \quad (2.4)$$

$$\mathbf{v}_1 \boldsymbol{\gamma} - (\mathbf{V}_1 \nabla) \xi = \mathbf{v}_2 \boldsymbol{\gamma} - (\mathbf{V}_2 \nabla) \xi, \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} + (\mathbf{V}_1 \nabla) \xi = \mathbf{v}_1 \boldsymbol{\gamma}$$

Рассмотрим нормальные возмущения, зависящие от горизонтальных координат как  $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$ , где  $\mathbf{k}$  – волновой вектор. Нетрудно убедиться, что амплитуда вибраций  $a$

и угол  $\phi$  между векторами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{j}$  входят в задачу лишь в виде комбинации  $a \cos \phi$ . Это означает, что имеет место аналог теоремы Сквайра – поведение возмущений с  $\phi \neq 0$  идентично поведению плоских возмущений, но при меньшей амплитуде вибраций. На этом основании в дальнейшем рассматриваются только плоские возмущения с волновым вектором, параллельным оси вибраций.

Задача (2.2) – (2.4) допускает (в том числе для плоских возмущений) полное разделение переменных. Полагая

$$v_1 \gamma \sim \text{sh}[k(z+h_1)], \quad v_1 \mathbf{j} \sim \text{ch}[k(z+h_1)], \quad p_1 \sim \text{ch}[k(z+h_1)]$$

$$v_2 \gamma \sim \text{sh}[k(z-h_2)], \quad v_2 \mathbf{j} \sim \text{ch}[k(z-h_2)], \quad p_2 \sim \text{ch}[k(z-h_2)]$$

получаем из (2.2) – (2.4) систему обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд возмущений. Исключая из нее амплитуды скорости и давления, после простых преобразований приходим к уравнению для  $\xi$

$$(F_1 + F_2) \frac{d^2 \xi}{dt^2} + 2ik \frac{d\xi}{dt} (F_1 U_1 + F_2 U_2) \sin \omega t + \\ + \xi (\alpha k^3 + (\rho_1 - \rho_2) g k + i(F_1 U_1 + F_2 U_2) k \omega \cos \omega t - k^2 (F_1 U_1^2 + F_2 U_2^2) \sin^2 \omega t) = 0 \quad (2.5)$$

$$F_1 = \rho_1 \text{cth}(kh_1), \quad F_2 = \rho_2 \text{cth}(kh_2)$$

**3. Сведение к уравнению Матье.** Удобно исключить слагаемое с первой производной, сделав замену переменных

$$\xi(t) = Y(t) e^{i\Phi(t)}, \quad \Phi = \frac{k}{\omega} \frac{F_1 U_1 + F_2 U_2}{F_1 + F_2} \cos \omega t \quad (3.1)$$

Поскольку  $\Phi$  чисто вещественно, то  $\xi$  и  $Y$  равны по модулю, т.е.  $\xi$  и  $Y$  эквивалентны с точки зрения устойчивости. Для  $Y$  в результате получаем стандартное уравнение Матье

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} + (A - Q \cos^2 t) Y = 0 \quad (3.2)$$

$$Q = \frac{4B_v k^2}{We} \frac{\rho \text{cth}(kH_1) \text{cth}(kH_2)}{(\rho \text{cth}(kH_1) + \text{cth}(kH_2))^2} \frac{(H_1 + H_2)^2 (\rho - 1)^2}{(H_1 + H_2 \rho)^2}$$

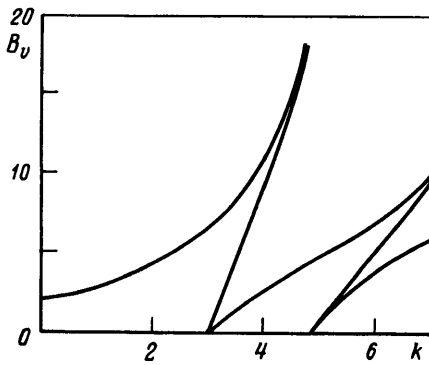
$$A = \frac{k(1+k^2)}{We} \frac{\rho - 1}{\rho \text{cth}(kH_1) + \text{cth}(kH_2)}$$

$$L = \left( \frac{\alpha}{g(\rho_1 - \rho_2)} \right)^{1/2}, \quad We = \omega^2 \frac{L}{g}, \quad \rho = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad H_1 = \frac{h_1}{L}$$

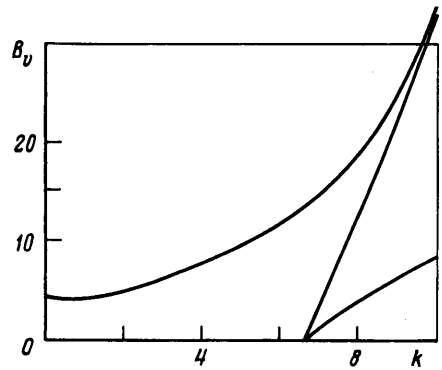
$$H_2 = \frac{h_2}{L}, \quad B_v = \frac{a^2 \omega^2}{4} \left( \frac{\rho_1 - \rho_2}{g\alpha} \right)^{1/2} = \frac{1}{4} \varepsilon^2 We$$

Здесь в качестве единицы времени использована обратная частота вибраций, в качестве единицы длины – капиллярная постоянная  $L$ ,  $We$  – число Вебера, параметр  $B_v$  характеризует интенсивность вибраций. Квадраты параметров  $H_1$  и  $H_2$  есть фактически числа Бонда, определенные по толщинам соответствующих слоев и разности плотностей.

Решения уравнения (3.2), соответствующие границе устойчивости, распадаются на два класса:  $Y_+$ , имеющие период  $\pi$  (так называемые "целые" возмущения), и  $Y_-$  с пе-



Фиг. 1. Области неустойчивости при  $We = 10$



Фиг. 2. Области неустойчивости при  $We = 100$

риодом  $2\pi$  ("полуцелые" возмущения) (см., например, [5]). Решения полуцелого типа являются антипериодическими (меняют знак при сдвиге на  $\pi$ ). Однако функция  $\xi_-(t)$ , как следует из (3.1), свойством антипериодичности не обладает. При сдвиге же на период вибраций оба типа решений остаются инвариантными и в этом смысле являются целыми. При сдвиге на  $\pi$  решения  $\xi_-(t)$  преобразуются по правилу  $\xi_-(t + \pi) = -\xi_+^*(t)$  (если  $Y$  выбрано вещественным, что всегда возможно), в то время как  $\xi_+(t + \pi) = \xi_+^*(t)$ . Существование двух классов критических возмущений связано с инвариантностью уравнения (2.5) относительно сдвига на половину периода вибраций и комплексного сопряжения.

Используя известные результаты исследования областей параметрического резонанса для уравнения (3.2) [5], можно легко построить границы областей неустойчивости в терминах параметров  $B_v, k$ . На фиг. 1, 2 приведены нейтральные кривые для задачи (3.2) и чисел Вебера 10 и 100. Области параметрической неустойчивости ("языки") узкими концами подходят к оси абсцисс, причем точка  $k_n$ , в которой  $n$ -я область неустойчивости выходит на ось  $k$ , определяется из уравнения  $A(k_n, We) = n^2$ . С ростом числа Вебера, т.е. с увеличением частоты вибраций, точки  $k_n$  сдвигаются в область коротковолновых возмущений.

Таким образом, уже при сколь угодно малой амплитуде вибраций имеет место параметрическая неустойчивость. С возрастанием частоты вибраций эта неустойчивость вытесняется в коротковолновую область, где она может эффективно подавляться вязкостью. На вид и положение границы неустойчивости Кельвина – Гельмгольца изменение частоты вибраций оказывает небольшое влияние. В частности, нетрудно убедиться, что длинноволновая асимптотика границы основной зоны неустойчивости вообще от числа Вебера не зависит. Действительно, при малых  $k$   $Q$  и  $A$  пропорциональны  $k^2$ , т.е. малы, и граница неустойчивости дается асимптотической формулой  $Q = 2A$ . В этом равенстве число Вебера сокращается и в результате для длинноволнового предела  $\lim_{k \rightarrow 0} B_v(k)$  получается результат, совпадающий с соответствующим результатом, полученным в [7] в рамках метода осреднения.

**4. Вязкое демпфирование.** Для приближенного учета диссипации введем затухание прямо в уравнение (2.5) для амплитуды отклонения поверхности раздела жидкостей от плоской

$$\begin{aligned} (F_1 + F_2) \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \frac{d\xi}{dt} (2ik(F_1 U_1 + F_2 U_2) \sin \omega t + \lambda_1 (F_1 + F_2)) + \\ + \xi (\alpha k^3 + (\rho_1 - \rho_2) g k + i(F_1 U_1 + F_2 U_2) k \omega \cos \omega t - k^2 (F_1 U_1^2 + F_2 U_2^2) \sin^2 \omega t) = 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

В качестве коэффициента затухания  $\lambda_1$  используем декремент затухания при малых вязких собственных колебаниях. Безразмерный декремент имеет вид (вычисления производятся стандартным образом [6], поэтому выкладки опущены)

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \text{We}^{-1/2} \sigma \frac{L_1 + L_2 + L_3 + L_4}{L_5 + L_6} L_7 \quad (4.2)$$

$$L_1 = -2k\rho(2 + v^{1/2}(t_1^2 - 1) + v^{-1/2}(t_2^2 - 1))t_1t_2$$

$$L_2 = -2k(\rho^2(t_2^2 - 2) + t_1^2 - 2)t_1t_2$$

$$L_3 = 2k\rho(t_1(t_2^2 - 2) + t_2v^{1/2}(t_1^2 - 1))(\rho t_2 + t_1)$$

$$L_4 = 2k(t_2(t_1^2 - 2) + t_1v^{-1/2}(t_2^2 - 1))(\rho t_2 + t_1)$$

$$L_5 = (\rho(t_1 + t_2v^{-1/2}) + \rho^2t_2 + t_1v^{-1/2})t_1t_2$$

$$L_6 = 3(\rho + v^{-1/2})(\rho t_2 + t_1)t_1t_2, \quad L_7 = \left( \frac{k(1+k^2)(\rho-1)t_1t_2}{\rho t_2 + t_1} \right)^{1/4}$$

$$v = v_1 / v_2, \quad \sigma = v^{1/2}(gL^3)^{-1/4}, \quad t_1 = \text{th}(kH_1), \quad t_2 = \text{th}(kH_2)$$

Комплексность величины  $\lambda_1$  связана с вязким сдвигом частоты.

Уравнение (4.1) после замены переменных (3.1) и обезразмеривания сводится к уравнению для переменной  $Y$ , в котором явным образом учтена вязкая диссипация

$$\frac{d^2Y}{dt^2} + \lambda_1 \frac{dY}{dt} + (A - Q \cos^2 t + i\lambda_1 b \sin t)Y = 0 \quad (4.3)$$

Здесь  $Q$  и  $A$  заданы выражениями (3.2) и введен безразмерный параметр  $b$ . Этот параметр не представляет интереса в дальнейшем, поэтому явное выражение для него не приводится.

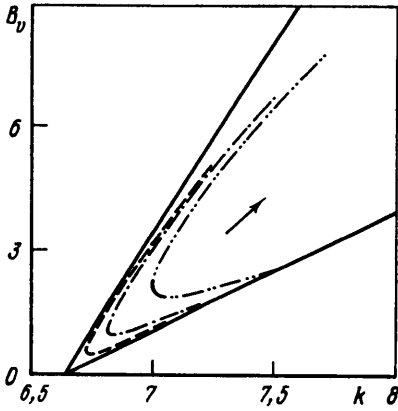
Исследуем влияние вязкости на порог устойчивости в первой резонансной области. Первая резонансная область имеет началом точку [5] ( $A = 1, Q = 0$ ). Применяя известную технику метода многих масштабов к уравнению (4.3), получаем следующее неявное выражение для нейтральной кривой при малых амплитудах накачки:

$$\left( s - \frac{Q}{2} \right)^2 + R(\lambda_1)^2 = \frac{Q^2}{16}, \quad s = \frac{\partial A}{\partial k} \Big|_{k=k_0} (k - k_0) \quad (4.4)$$

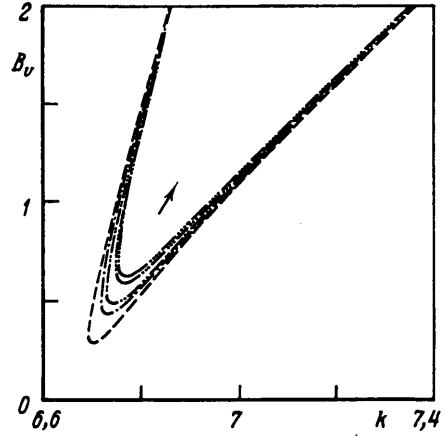
где  $k_0$  определяется из условия  $A = 1$ . Окончательно: корни квадратного уравнения (4.4) (являющиеся функцией волнового числа) дают ветви нейтральной кривой. Хотя формула (4.4) получена в предположении малости параметра  $\sigma$ , на фиг. 3 для иллюстрации изображены нейтральные кривые для случая равных вязкостей ( $v = 1$ ), числа Вебера, равного 100, и параметра  $\sigma$ , принимающего значения 1, 2, 4. Таким образом, с увеличением значения "вязкого" параметра  $\sigma$  порог устойчивости повышается. На фиг. 4 приведены нейтральные кривые для  $\text{We} = 100, \sigma = 1$  и параметра  $v$ , принимающего значения 0,1, 0,5, 1, 5, 10. Как видно, поверхность раздела более устойчива, если вязкость нижней жидкости больше, чем вязкость верхней. Для других резонансных областей порог устойчивости получается аналогичным образом.

Формулы (3.2), (4.2) можно записать в следующей краткой форме:

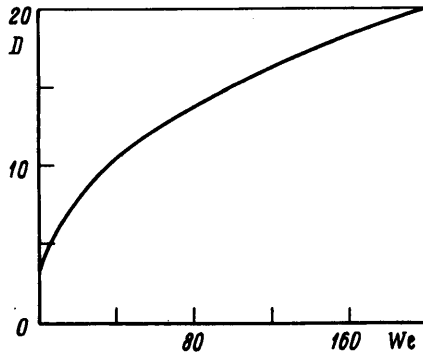
$$A = \frac{\Phi(k)}{\text{We}}, \quad Q = \frac{B_v}{\text{We}} \mu(k), \quad \lambda_1 = \sigma \text{We}^{-1/2} \chi(k) \quad (4.5)$$



Фиг. 3. Нейтральные кривые при  $\sigma = 1, 2, 4$ . Направление возрастания параметра  $\sigma$  показано стрелкой



Фиг. 4. Нейтральные кривые при  $\nu = 0,1; 0,5; 1; 5; 10$ . Направление возрастания параметра  $\nu$  показано стрелкой



Фиг. 5. Зависимость высоты порога возбуждения неустойчивости от числа Вебера

Из (4.4) и (4.5) получаем пороговое значение параметра  $B_v$

$$B_v^* = \frac{We Q^*}{\mu(k)} = 4\sigma \frac{|R(\chi(k))|}{\mu(k)} We^{1/2} = D(k)\sigma$$

Таким образом, при малом затухании порог устойчивости пропорционален корню из вязкости. Зависимость высоты порога от числа Вебера определяется коэффициентом  $D$

$$D(k) = 4 \frac{|R(\chi(k))|}{\mu(k)} \phi(k)^{1/2}$$

Последнее выражение совместно с первым соотношением (4.5) в параметрической форме устанавливает зависимость  $D(We)$  (фиг. 5). С ростом частоты вибраций порог неустойчивости монотонно повышается.

**Заключение.** Касательные вибрации порождают неустойчивость поверхности раздела жидкостей, связанную как с неустойчивостью Кельвина – Гельмгольца на границе нестационарных встречных потоков, так и с параметрической раскачкой волн на поверхности раздела. В пределе нулевых вязкостей первый тип неустой-

чивости характеризуется конечным порогом амплитуды возбуждения, в то время как для параметрической неустойчивости порог отсутствует. Однако при достаточно высоких частотах вибраций параметрическая неустойчивость имеет место в узком интервале волновых чисел и, как следствие, сильно чувствительна к вязкому демпфированию.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95-01-00386).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wolf G.H.* The dynamic stabilization of the Rayleigh – Taylor instability and the corresponding dynamic equilibrium // *Z. Phys.* 1969. В. 227. Н. 3. S. 291–298.
2. *Безденежных Н.А., Брискман В.А., Любимов Д.В. и др.* Управление устойчивостью поверхности раздела жидкостей с помощью вибраций, электрических и магнитных полей // Тез. докл. 3-го Всесоюз. семинара по гидромеханике и тепломассообмену в невесомости. Черногоровка, 1984. С. 18–20.
3. *Любимов Д.В., Лобов Н.И., Черепанов А.А.* О равновесной границе раздела жидкостей в высокочастотном вибрационном поле // Тез. докл. 3-го Всесоюз. семинара по гидромеханике и тепломассообмену в невесомости. Черногоровка, 1984. С. 100.
4. *Любимов Д.В., Черепанов А.А.* О возникновении стационарного рельефа на поверхности раздела жидкостей в вибрационном поле // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1986. № 6. С. 8–13.
5. Таблицы для вычисления функций Матье. Собственные значения, коэффициенты и множители связи. М.: ВЦ АН СССР, 1967. 279 с.
6. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
7. *Замараев А.В., Любимов Д.В., Черепанов А.А.* О равновесных формах поверхности раздела жидкостей в вибрационном поле // *Гидродинамика и процессы тепломассообмена.* Свердловск: УрО АН СССР. 1989. С. 23–28.

Пермь

Поступила в редакцию  
20.XI.1996