

УДК 533.9:537.523.5

© 1998 г. А.Я. ВОРОНОВ

## О СТРУКТУРЕ ВНУТРЕННЕГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ГАЗОРАЗРЯДНОЙ ПЛАЗМЫ В ОСЕСИММЕТРИЧНОМ СЛУЧАЕ

Построено асимптотическое представление для решения задачи о структуре внутреннего пограничного (переходного) слоя и о распределении основных физических характеристик плазмы вдоль радиуса столба свободно горящей электрической дуги низкого давления в He.

Широкое использование в современных технологиях низкотемпературной плазмы обусловило повышенный интерес ко всем видам газовых разрядов, в том числе и к свободнотокующим электрическим дугам. Многочисленные приложения дуговых разрядов во многом связаны с технологическим применением электродугового столба, который генерирует основную часть тепловой и радиационной энергий. Именно этой части газового разряда уделяется повышенное внимание и теоретиками (см., например, [1]). Теория электрической дуги, несмотря на длительную историю развития, до сих пор еще далека от завершения. Не все свойства этого вида газовых разрядов к настоящему времени получили достаточно убедительные разъяснения. Например, не до конца выяснены законы, управляющие распределением по сечению столба со свободной границей основных физических характеристик электродуговой плазмы. К тому же при наличии процессов диффузии заряженных частиц дуговой плазменный шнур достаточно устойчив и имеет четко очерченную свободную границу. Полное уяснение последнего свойства могло бы пролить свет и на такое еще недостаточно глубоко изученное явление, как переход диффузионного газового разряда в электрическую дугу со свободной границей. Одной из возможных причин относительного отставания теории от эксперимента может оказаться тот факт, что авторы теоретических работ проводят исследования дифференциальных уравнений плазмы, как правило, без учета их сингулярной возмущенности [2].

Цель настоящей работы – погранслоевым методом построить асимптотическое приближение по малому параметру для решения системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений газоразрядной плазмы, установить условия существования у этой системы решений типа контрастных пространственных структур (решений со "всплеском"), используя асимптотику такого решения, провести исследования структуры внутреннего пограничного слоя плазмы.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим положительный столб электрической дуги низкого давления ( $p \sim 10^{-3} - 1$  тор), свойства плазмы которого незначительно отличаются от свойств плазмы положительного столба тлеющего разряда [3]. Это та же низкая степень ионизации, тот же большой отрыв температуры свободных электронов  $T_e$  от температуры  $T$  нейтрального газа и та же слабая зависимость этих величин от координат точек поперечного сечения столба. Правда, степень ионизации плазмы электродугового столба, оставаясь низкой, несколько превышает степень ионизации неравновесной плазмы тлеющего разряда, так как при меньшем значении продольного электрического поля по каналу дуги проходит больший ток, чем в тлеющем разряде. Таким образом, математическая модель положительного столба электродугового разряда низкого давления будет иметь тот же вид, что и в случае тлеющего разряда.

Систему уравнений, претендующих на описание плазмы с означенными свойствами, вначале запишем в общем виде

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \Gamma_a &= I_n - R_p, \quad \Gamma_a = -D_a \nabla c_a + G_a k_a c_a \mathbf{E} \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi e(c_p - c_e), \quad a = e, p, \quad G_e = -1, \quad G_p = 1 \\ \operatorname{Div} \Gamma_a &= Q_a, \quad \operatorname{Div} \mathbf{E} = 4\pi \kappa \end{aligned}$$

Здесь  $c_e$  и  $c_p$  – концентрации свободных электронов и однозарядных положительных ионов,  $D_a$  и  $k_a$  – их коэффициенты свободной диффузии и подвижности,  $\mathbf{E}$  – напряженность электрического поля,  $\Gamma_a$  – вектор плотности потока частиц сорта "а",  $\kappa$  – поверхностная плотность заряда,  $Q_a$  – величина скачка нормальной составляющей  $\Gamma_a$  на тех поверхностях, при переходе через которые она терпит разрыв,  $I_n$  и  $R_p$  – величины, определяющие скорость ионизации и объемной электрон-ионной рекомбинации, т.е. число заряженных пар, возникающих или исчезающих в единице объема плазмы за единицу времени,  $e$  – элементарный заряд. Коэффициенты  $D_a$  и  $k_a$ , так же как и температуры  $T_e$  и  $T$  считаются постоянными по всему объему плазмы, конвективное движение отсутствует, а влиянием собственного магнитного поля пренебрегается.

Введем цилиндрическую систему координат  $(r, \vartheta, z)$  с осью  $z$ , направленной вдоль оси разряда, стационарное состояние которого поддерживается постоянным током, проходящим вдоль этой оси. Математическую модель бесконечно длинного однородного вдоль своей оси плазменного столба свободногорящей электрической дуги, стабилизированной твердой стенкой цилиндрической формы радиуса  $R$ , выпишем сразу в безразмерных величинах [4]

$$\begin{aligned} h \frac{d}{dx} \left( x \frac{dN_e}{dx} \right) + v \frac{d}{dx} (xVN_e) + xh\gamma(I - \theta N_p N_e) &= 0 \\ h \frac{d}{dx} \left( x \frac{dN_p}{dx} \right) - \frac{d}{dx} (xVN_p) + xh(I - \theta N_p N_e) &= 0 \\ h \frac{d}{dx} (xV) &= x(N_p - N_e) \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$N_a(1, h) = b_a(h), \quad N_p = 1, \quad \frac{dN_e}{dx} = 0, \quad V = 0 \quad (x = 0), \quad a = e, p \quad (1.2)$$

$$0 \leq x = \frac{r}{R} \leq 1, \quad \frac{4\pi e^2 R^2}{k_0 T} c_a = AN_a$$

$$R \frac{k_p}{D_p} E_r = \epsilon_x = -\frac{d\Phi}{dx}, \quad \alpha c_p^{(0)} \frac{R^2}{D_p} = \theta, \quad \frac{D_p}{D_e} = \gamma$$

$$V = h\epsilon_x, \quad \frac{k_p}{k_e} = \sigma, \quad \frac{T}{T_e} = v$$

$$A^{-1} = h^2 = \frac{r_d^2}{R^2}, \quad r_d = \left( \frac{k_0 T}{4\pi e^2 c_p^{(0)}} \right)^{1/2}$$

Здесь  $r_d$  – радиус Дебая для положительных ионов на оси плазменного шнура,  $\alpha$  – коэффициент объемной электрон-ионной рекомбинации,  $k_0$  – постоянная Больцмана,  $\Phi$  – безразмерный потенциал поля  $\epsilon$ .

В дальнейшем понадобится конкретный вид функции  $I = I(x, \epsilon, N_e, h)$  для электро-

дуговой плазмы. В случае диффузного газового разряда пара противоположно заряженных частиц возникает в результате прямой ионизации нейтральной молекулы электронным ударом. Точный механизм ионизации в плазме электродугового столба неизвестен. Однако экспериментально установлено, что в дуговом плазменном шнуре продольное электрическое поле  $E_z$  существенно меньше по величине, чем в диффузном газовом разряде, а излучение и плотность тока в нем могут быть на несколько порядков выше, чем в положительном столбе тлеющего разряда. Из этого факта делается вывод: в электродуговом столбе превалирует ступенчатая ионизация, роль которой с увеличением плотности плазмы возрастает. Однако не следует полностью игнорировать прямую ионизацию электронным ударом, поскольку среди свободных электронов плазмы всегда найдутся такие, энергия которых будет больше или равна энергии ионизации нейтральных молекул. Процесс ионизации нейтральных молекул в электродуговом плазменном столбе опишем функцией

$$I(x, \varepsilon, N_e, h) = g(x, \varepsilon, h)N_e + \xi(x)N_e^3$$

При численном моделировании газовых разрядов обычно пользуются эмпирическими формулами, определяющими частоту прямой ионизации как функцию  $|E|$ . Они имеют различный вид (см., например, [3, гл. 4]). Такие формулы неплохо описывают ионизационные процессы в газоразрядной плазме, но только в узких областях изменения  $|E|$ . При необходимости аналогичные выражения можно подобрать и для рассматриваемого случая. Ради простоты будем предполагать, что  $g = g(x)$  и  $\xi(x)$  – известные функции, причем отличная от тождественного нуля  $\xi(x)$  описывает процесс ступенчатой ионизации на  $[0, 1]$ . Как будет установлено ниже,  $\xi \neq \text{const}$ , а поскольку  $E_z = \text{const}$ , то зависимость  $\xi(x)$  может обеспечить только наличие  $E_r(x)$ .

В уравнениях (1.1), (1.2) перед старшими производными стоит малый параметр  $h$  (при  $R = 1$  см,  $T = 300$  К и  $c_p^{(0)} \geq 10^8$  см<sup>-3</sup>,  $h \leq 10^{-2}$ ). Следовательно, для анализа решений можно использовать асимптотические методы, например искать решение задачи в виде разложения по положительным степеням  $h$ . В этом случае фигурирующие в дополнительных условиях (1.2) величины  $b_a(h)$  целесообразно представить в виде (см. [4])

$$b_a(h) = b_0^a + hb_1^a + \dots, \quad a = e, p$$

**2. Построение асимптотики решения.** Неизвестными в задаче (1.1), (1.2) считаем функции  $V(x, h)$  и  $N_a(x, h)$ . Обозначив всю совокупность искомым величин через  $W(x, h)$ , их погранслойную асимптотику будем строить в виде [5]

$$W(x, h) = w(x, h) + \Pi w(x_1, h) + R w(x_2, h)$$

$$x_1 = \frac{x}{h}, \quad x_2 = \frac{x-1}{h}$$

$$w(x, h) = \sum_{k=0}^{\infty} h^k w_k(x) = w_0(x) + h w_1(x) + \dots$$

где  $w(x, h)$  регулярная часть этой асимптотики.

Аналогичные разложения имеют и погранслойные ряды  $\Pi w(x_1, h)$  и  $R w(x_2, h)$  соответственно на левом и правом концах отрезка  $[0, 1]$ . Коэффициенты этих разложений  $w_s(x)$ ,  $\Pi_s w(x_1)$  и  $R_s w(x_2)$  определяются так же, как и в [4]. Так, при определении  $w_s(x)$  на первом этапе получим

$$v_0(x) \equiv 0, \quad n_0^e(x) \equiv n_0^p(x) = A_0(x)$$

Для определения функций  $A_0(x)$  и  $v_1(x)$  получим задачу

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( x \frac{dA_0}{dx} \right) + v \frac{d}{dx} (xv_1 A_0) + x\gamma(i_0 - \theta A_0^2) &= 0 \\ \frac{d}{dx} \left( x \frac{dA_0}{dx} \right) - \frac{d}{dx} (xv_1 A_0) + x(i_0 - \theta A_0^2) &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$A_0 = 1, \quad v_1 = 0 \quad (x = 0), \quad A_0 = b_0 \quad (x = 1)$$

Система уравнений (2.1) для случая  $\theta = 0$  и  $i_0 = \mu_0^p A_0$ , где  $\mu_0^p = \text{const}$  исследована в [4]. Задача (2.1) при  $\theta \neq 0$ , но имеющем малое значение, требует отдельного рассмотрения. Введем обозначения

$$v\theta(1+\sigma)/(1+v) = \mu^{-2}, \quad \mu v_1(x, \mu) = P(x, \mu)$$

и рассмотрим случай  $0 < \mu \ll 1$ . Перепишем задачу (2.1) в виде

$$\begin{aligned} \mu^2 \frac{d}{dx} \left( x \frac{dA_0}{dx} \right) + \mu v \frac{d}{dx} (xPA_0) + x\sigma \frac{1+v}{1+\sigma} (I_0 - A_0^2) &= 0 \\ \mu^2 \frac{d}{dx} \left( x \frac{dA_0}{dx} \right) - \mu \frac{d}{dx} (xPA_0) + x \frac{1+v}{v(1+\sigma)} (I_0 - A_0^2) &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$A_0(0, \mu) = 1, \quad P(0, \mu) = 0, \quad A_0(1, \mu) = b_0$$

Исключив в (2.2) члены, содержащие функцию  $P(x, \mu)$ , получим

$$\begin{aligned} \mu^2 \frac{d}{dx} \left( x \frac{dA_0}{dx} \right) + x(I_0 - A_0^2) &= 0 \\ A_0(0, \mu) = 1, \quad A_0(1, \mu) = b_0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Это уравнение типа реакция – диффузия. При выполнении определенных условий уравнения такого типа имеют решение со "всплеском", вершина которого приходится на некоторую точку  $x = x_* \in (0, 1)$ . Подобные решения иногда называют решениями типа контрастной пространственной структуры (см., например, [6] и библиографию к этой работе). Прежде чем, следуя [6], строить асимптотику решения задачи (2.3), уточним, что

$$I_0 = I_0(x, A_0, \mu) = g(x, \mu)A_0 + \xi(x, \mu)A_0^3$$

Сама же асимптотика в соответствии с методом пограничных функций будет иметь вид [6]

$$A_0(x, \mu) = \alpha_0(x, \mu) + T\alpha_0(\tau_0, \mu) + Q\alpha_0(\tau, \mu) + S\alpha_0(\tau_1, \mu) \quad (2.4)$$

$$\alpha_0(x, \mu) = \alpha_{00}(x) + \mu\alpha_{01}(x) + \dots; \quad T\alpha_0(\tau_0, \mu) = T_0\alpha_0(\tau_0) + \mu T_1\alpha_0(\tau_0) + \dots$$

$$Q\alpha_0(\tau, \mu) = Q_0\alpha_0(\tau) + \mu Q_1\alpha_0(\tau) + \dots; \quad S\alpha_0(\tau_1, \mu) = S_0\alpha_0(\tau_1) + \mu S_1\alpha_0(\tau_1) + \dots$$

$$x_* = X_0 + \mu X_1 + \dots + \mu^k X_k + \dots$$

$$\tau_0 = \frac{x}{\mu}, \quad \tau = \frac{x - x_*}{\mu}, \quad \tau_1 = \frac{x - 1}{\mu}$$

где  $\alpha_0(x, \mu)$  – регулярный ряд,  $T\alpha_0(\tau_0, \mu)$  – пограничный ряд в окрестности точки  $x = 0$ ,  $Q\alpha_0(\tau, \mu)$  – ряд, описывающий "всплеск" решения в окрестности точки  $x = x_*$ ,  $S\alpha_0(\tau_1, \mu)$  – погранряд в окрестности точки  $x = 1$ . Поскольку  $x_*$  – это та точка, в которой функция  $A_0(x, \mu)$  имеет экстремум, то  $A'_0(x_*, \mu) = 0$ . Неизвестные коэффициенты

этих разложений  $\alpha_{0k}(x)$ ,  $T_k\alpha_0(\tau_0)$ ,  $Q_k\alpha_0(\tau)$ ,  $S_k\alpha_0(\tau_1)$  определяются стандартным способом (см. [5]). Так, для определения  $\alpha_{00}(x)$  получаем уравнение, корни которого имеют вид

$$f(x, \alpha_{00}, 0) = \alpha_{00}[\alpha_{00} - g(x, 0) - \xi(x, 0)\alpha_{00}^2] = 0$$

$$\alpha_{00}^{(1)}(x) \equiv 0$$

$$\alpha_{00}^{(2)}(x) = \frac{1}{2\xi} [1 - \sqrt{1 - 4g\xi}] = \varphi(x)$$

$$\alpha_{00}^{(3)}(x) = \frac{1}{2\xi} [1 + \sqrt{1 - 4g\xi}] = \chi(x) > \varphi(x), \quad \forall x \in [0, 1]$$

Положим  $\alpha_{00}(x) = \varphi(x) > 0$ ,  $x \in [0, 1]$ . Из вида  $\varphi(x)$  следует, что  $g\xi \leq 1/4$  и  $g(x, 0) \leq \varphi(x) \leq 2g(x, 0)$ . Легко проверяется, что в этом случае

$$f'_\alpha(x, \varphi(x), 0) > 0, \quad f'_\alpha(x, \chi(x), 0) < 0 \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (2.5)$$

Фигурирующая в теории [6] функция  $\psi(x)$  существует и определяется уравнением

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, \alpha_{00}, 0) d\alpha_{00} = \frac{1}{3} \psi^3 - \frac{1}{2} g \psi^2 - \frac{1}{4} \xi \psi^4 - d = 0 \quad (2.6)$$

$$d = \frac{1}{3} \varphi^3 - \frac{1}{2} g \varphi^2 - \frac{1}{4} \xi \varphi^4 \quad (0 \leq x \leq 1)$$

Уравнение (2.6) имеет три различных действительных корня:  $\psi > \varphi > \delta$ . Причем один из них,  $\varphi(x)$ , известен и имеет двойную кратность. Остальные два корня находятся решением квадратного уравнения

$$y^2 + \frac{8d}{\xi\varphi^3} y + \frac{4d}{\xi\varphi^2} = 0$$

Переходя к определению  $\alpha_{0s}(x)$  ( $s \geq 1$ ), убеждаемся, что

$$\alpha_{01}(x) = -\frac{f'_\mu(x, \alpha_{00}, 0)}{f'_\alpha(x, \alpha_{00}, 0)} = \frac{g'_\mu(x, 0)\alpha_{00} + \xi'_\mu(x, 0)\alpha_{00}^3}{2\alpha_{00} - g(x, 0) - 3\xi(x, 0)\alpha_{00}^2}$$

Остальные  $\alpha_{0s}(x)$  ( $s \geq 2$ ) также находятся без особого труда. Определим функции, описывающие "всплеск" решения в окрестности точки  $x_*$ . Для  $Q_0\alpha_0(\tau)$  имеем задачу

$$\frac{d^2 Q_0 \alpha_0}{d\tau^2} = Q_0 f(\tau) = w^2 - g_0 w - \xi_0 w^3 \quad (2.7)$$

$$Q'_0 \alpha_0(0) = 0, \quad Q_0 \alpha_0(\pm\infty) = 0$$

$$w(\tau) = \varphi_0 + Q_0 \alpha_0(\tau), \quad \varphi_0 = \varphi(X_0), \quad \xi_0 = \xi(X_0, 0), \quad g_0 = g(X_0, 0)$$

Из (2.7) следует, что

$$\frac{dw}{d\tau} = \pm \left[ 2 \left( \frac{1}{3} w^3 - \frac{1}{2} g_0 w^2 - \frac{1}{4} \xi_0 w^4 - d_0 \right) \right]^{1/2} \quad (2.8)$$

$$d_0 = \frac{1}{3} \varphi_0^3 - \frac{1}{2} g_0 \varphi_0^2 - \frac{1}{4} \xi_0 \varphi_0^4$$

В (2.8) верхний знак берется при  $-\infty < \tau \leq 0$ , а нижний – при  $0 \leq \tau < \infty$ . Функция

$w(\tau)$  определяется интегралом уравнения (2.8)

$$\frac{2}{\sqrt{(\psi_0 - \varphi_0)(\varphi_0 - \delta_0)}} \operatorname{Intg} \left( \frac{\lambda}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \mp \sqrt{\frac{\xi_0}{2}} \tau$$

$$\lambda = \arcsin \left[ \frac{(\varphi_0 - \delta_0)(\psi_0 - w)}{(\psi_0 - \varphi_0)(w - \delta_0)} \right]^{1/2} \quad (2.9)$$

$$\psi_0 = \psi(X_0), \quad \delta_0 = \delta(X_0), \quad \varphi_0 \leq w(\tau) \leq \psi_0$$

В решение (2.9) вошла неизвестная величина  $X_0$ , значение которой определяется из условия разрешимости задачи для  $Q_1 \alpha_0(\tau)$ . Имеем

$$\frac{d^2 Q_1 \alpha_0}{\alpha \tau^2} = (2w - g_0 - 3\xi_0 w^2) Q_1 \alpha_0 - \frac{1}{X_0} \frac{dw}{d\tau} + f_1(\tau) \quad (2.10)$$

$$Q_1' \alpha_0(0) = -\varphi'(X_0), \quad Q_1 \alpha_0(\pm\infty) = 0$$

$$f_1(\tau) = [Q_0 f_\alpha(\tau) \varphi'(X_0) + Q_0 f_x(\tau)](X_1 + \tau) + Q_0 f_\alpha(\tau) \alpha_{01}(X_0) + Q_0 f_\mu(\tau)$$

$$Q_0 f_\alpha(\tau) = 2w - g_0 - 3\xi_0 w^2 - (2\varphi_0 - g_0 - 3\xi_0 \varphi_0^2)$$

$$Q_0 f_x(\tau) = (\varphi_0^3 - w^3) \xi_x'(X_0, 0)$$

В силу сказанного  $g_x'(X_0, 0) = 0$ .

Условие разрешимости уравнения (2.10) имеет вид (см. [6])

$$\int_{-\infty}^0 [Q_0 f_\alpha(\tau) \varphi'(X_0) + Q_0 f_x(\tau)] \frac{dw}{d\tau} \tau d\tau = \frac{1}{X_0} \int_{-\infty}^0 \left( \frac{dw}{d\tau} \right)^2 d\tau \quad (2.11)$$

При нахождении корня уравнения (2.11) для  $dw/d\tau$  и  $\tau$  надо использовать выражения (2.8) и (2.9) с их верхними знаками. Левая часть равенства (2.11) пропорциональна  $\xi_x'(X_0, 0)$ . Следовательно, при  $\xi = \text{const}$  условие разрешимости (2.11) не будет выполняться. Решение задачи (2.10) зависит от  $X_1$  как от параметра, значение которого определяется на следующем шаге [6].

Определим функцию  $P(x, \mu)$  (см. (2.4))

$$P(x, \mu) = p(x, \mu) + Tp(\tau_0, \mu) + Qp(\tau, \mu) + Sp(\tau_1, \mu)$$

Если в системе (2.2) исключить члены, содержащие  $\mu^2$ , то при определении регулярной части асимптотики функции  $P(x, \mu)$  на первом этапе имеем  $d(xp_0 \alpha_{00})/dx = 0$ ,  $p_0(x) \equiv 0$ . Для определения  $p_1(x)$  получим задачу

$$\frac{d}{dx} (xp_1 \alpha_{00}) = -\frac{1-\gamma}{v(1+\sigma)} \frac{d}{dx} \left( x \frac{d\alpha_{00}}{dx} \right), \quad p_1 = 0 \quad (x=0)$$

решение которой имеет вид

$$p_1(x) = -\frac{1-\gamma}{v(1+\sigma)} \frac{1}{\varphi(x)} \frac{d\varphi(x)}{dx} \quad (2.12)$$

Функция (2.12) при  $x=0$  обращается в ноль в силу осевой симметрии.

Используя (2.7), для  $Q_0 p(\tau)$  получим задачу

$$\frac{d}{d\tau} (wQ_0 p) = -\frac{1-\gamma}{v(1+\sigma)} Q_0 f(\tau), \quad Q_0 p(\pm\infty) = 0$$

решение которой запишем в виде

$$Q_0 p(\tau) = -\frac{1-\gamma}{v(1+\sigma)} \frac{1}{w(\tau)} \frac{dw(\tau)}{d\tau} \quad (2.13)$$

Таким образом, определены все главные члены рядов, описывающих всплески функций  $A_0(x, \mu)$  и  $P(x, \mu)$  в окрестности точки  $x_*$ . Экспоненциальная оценка для этих членов очевидна, а производится она так же, как в [6].

Определим пограничные функции в окрестности точки  $x = 0$ . Обсудим граничные условия в этой точке. Поскольку  $A_0(0, \mu) = 1$ , а в общем случае  $\varphi^\circ = \varphi(0) \neq 1$ , то возникающую таким образом невязку можно устранить либо с помощью погранфункций  $T_0\alpha_0(\tau_0)$  либо  $\Pi_0 n_p(x_1)$ , потребовав, например, чтобы  $\varphi^\circ + T_0\alpha_0(0) = 1$ , но тогда  $\Pi_0 n_p(0) = 0$ , а это приводит к тому, что  $\Pi_0 n_p(x_1) \equiv 0$  и  $\Pi_0 \nu(x_1) \equiv 0$ . Однако можно положить и  $\varphi^\circ + \Pi_0 n_p(0) \equiv 1$ . В этом случае  $T_0\alpha_0(0) = 0$ , что приводит к тождествам  $T_0\alpha_0(\tau_0) \equiv 0$ ,  $T_0 p(\tau_0) \equiv 0$ . Наконец поскольку  $p_0(x) \equiv 0$ , то  $T_0 p(0) = 0$  и  $\Pi_0 \nu(0) = 0$ . Ограничимся нахождением функций  $T_0\alpha_0(\tau_0)$  и  $T_0 p(\tau_0)$  ( $\tau_0 = x/\mu$ ). Из (2.2) для их определения следует система

$$\frac{1}{\tau_0} \frac{d}{d\tau_0} \left( \tau_0 \frac{dT_0\alpha_0}{d\tau_0} \right) + \frac{v}{\tau_0} \frac{d}{d\tau_0} [\tau_0 T_0(p\alpha_0)] = \sigma \frac{1+v}{1+\sigma} T_0 f(\tau_0)$$

$$\frac{1}{\tau_0} \frac{d}{d\tau_0} \left( \tau_0 \frac{dT_0\alpha_0}{d\tau_0} \right) - \frac{1}{\tau_0} \frac{d}{d\tau_0} [\tau_0 T_0(p\alpha_0)] = \frac{1+v}{v(1+\sigma)} T_0 f(\tau_0)$$

Отсюда для определения  $T_0\alpha_0(\tau_0)$  и  $T_0 p(\tau_0)$  имеем задачи

$$\frac{1}{\tau_0} \frac{d}{d\tau_0} \left( \tau_0 \frac{dT_0\alpha_0}{d\tau} \right) = T_0 f(\tau_0) = \omega(\omega - g^\circ - \xi^\circ \omega^2)$$

$$T_0\alpha_0(0) = 1 - \varphi^\circ, \quad T_0\alpha_0(\infty) = 0 \quad (2.14)$$

$$\frac{dT_0 p}{d\tau_0} + \frac{d \ln(\tau_0 \omega)}{d\tau_0} T_0 p = -\frac{1-\gamma}{v(1+\sigma)} (\omega - g^\circ - \xi^\circ \omega^2)$$

$$T_0 p(\infty) = 0 \quad (2.15)$$

$$\omega(\tau_0) = \varphi^\circ + T_0\alpha_0(\tau_0), \quad \xi^\circ = \xi(0, 0), \quad g^\circ = g(0, 0)$$

Решение задачи (2.15) запишем в виде

$$T_0 p(\tau_0) = -\frac{1-\gamma}{v(1+\sigma)} \frac{d}{d\tau_0} \ln \omega(\tau_0) = -\frac{dT_0\Phi_0}{d\tau_0} \quad (2.16)$$

В силу осевой симметрии задачи из (2.16) следует  $T_0 p(0) = 0$

$$\omega(\tau_0) = \varphi^\circ \exp[v_1 T_0\Phi_0(\tau_0)], \quad v_1 = v \frac{1+\sigma}{1+v} \quad (2.17)$$

Поскольку  $\varepsilon_x(0) = 0$ , то будет естественным положить и  $\xi^\circ = 0$ . Хотя это предположение и упрощает уравнение задачи (2.14), но оно не принципиально, так как в противном случае решение можно получить в виде разложения по положительным степеням малого параметра  $0 < \zeta = g^\circ \xi^\circ < 1$ . Введя следующие обозначения, из (2.14) для функции  $y(z)$  получим задачу

$$z = \sqrt{g^\circ} \tau, \quad qy(z) = (g^\circ - 1) \frac{y(z)}{g^\circ} = -\frac{T_0\alpha_0(\tau_0)}{g^\circ}$$

$$z^2 y'' + zy' - z^2 y = -qz^2 y^2, \quad y(0) = 1, \quad y(\infty) = 0 \quad (2.18)$$

При  $q > 0$  краевая задача (2.18) имеет положительное решение с экспоненциальной

оценкой (см. [8]). Вводим обозначение  $y(z) = \exp(-z^2) + F(z)$  и краевую задачу, определяющую функцию  $F(z)$ , записываем в виде

$$\begin{aligned} z^2 F'' + zF' - (z^2 + 1)F &= -qz^2 F^2 - [1 + 2qz^2 \exp(-z^2)]F + \\ &+ z^2 [5 - 4z^2 - q \exp(-z^2)] \exp(-z^2) \\ F = 0 \quad (x = 0), \quad F(\infty) &= 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

Заменим задачу (2.19) эквивалентным интегральным уравнением

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_0^\infty [1 + 2qx^2 \exp(-x^2)] G(z, x) F(x) \frac{dx}{x^2} + \\ &+ q \int_0^\infty G(z, x) F^2(x) dx - \int_0^\infty [5 - 4x^2 - q \exp(-x^2)] G(z, x) \exp(-x^2) dx \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$G(z, x) = xK_1(z)I_1(x), \quad x \leq z$$

$$G(z, x) = xK_1(x)I_1(z), \quad z \leq x$$

Здесь  $K_1(z)$ ,  $I_1(z)$  – функции Бесселя мнимого аргумента.

Функция  $G(z, x)$  по  $x$  удовлетворяет дополнительным условиям задачи (2.19), а решение интегрального уравнения (2.20) можно построить, используя метод последовательных приближений. Определив  $T_0\alpha_0(\tau_0)$ , находим сначала  $T_0\Phi_0(\tau_0)$ , а затем и  $T_0\rho(\tau_0)$  (см. (2.16) и (2.17)).

Таким образом, определены все главные члены пограничных рядов в окрестности точки  $x = 0$ . Пограничный слой газоразрядной плазмы на внутренней поверхности боковой стенки цилиндрической трубки, стабилизирующей дугу ( $x = 1$ ), исследуется известным способом [4, 5] и здесь не рассматривается. В [4] получено соотношение, определяющее неизвестный параметр  $b_0$ , введенный в задаче (2.1).

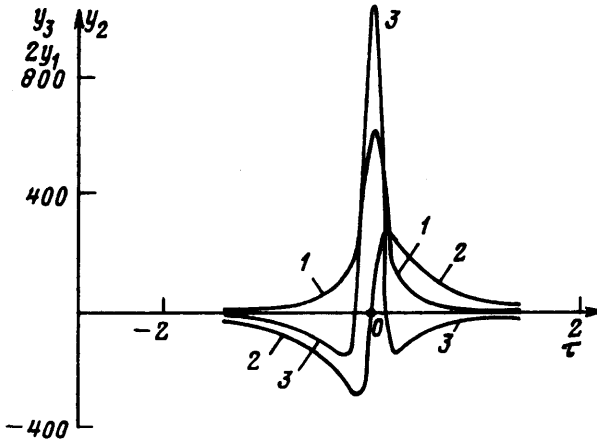
**3. Обсуждение результатов.** На основе построенного асимптотического приближения исследуем распределения основных физических характеристик плазмы по радиусу электродугового столба.

Корни уравнения (2.11), найденные для некоторых значений параметров  $g_0$ ,  $\xi_0$  и  $\xi'(X_0, 0) = 0,5$ , представлены ниже:

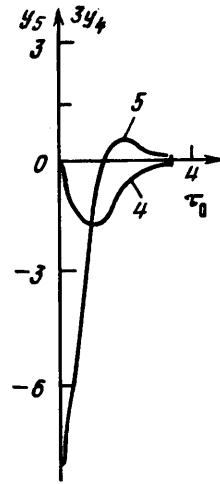
$\xi_0$	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5	0,55	0,6
$X_0$	0,122	0,153	0,183	0,214	0,244	0,275	0,295	0,336	0,367
$X_0$	–	–	–	0,10	0,11	0,124	0,138	0,152	0,166
$\xi_0$	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	1,0	–
$X_0$	0,397	0,428	0,458	0,489	0,519	0,55	0,58	0,61	–
$X_0$	0,179	0,193	0,207	0,221	0,235	0,249	0,262	0,276	–

Экспериментально нетрудно провести оценку радиуса электродугового плазменного шнура  $X_0$  и определить функцию распределения свободных электронов плазмы по энергиям. Зная эту функцию и параметр  $\nu$ , можно оценить  $g_0$ . Используя значения  $X_0$  и  $g_0$ , из таблицы получаем необходимую информацию относительно величин  $\xi_0$  и  $\xi'(X_0, 0)$ , а затем вычисляем значение функции  $p_1(X_0)$  по формуле (2.12), высоту функции  $A_0(x, \mu)$  в окрестности точки  $X_0$ , т.е.  $\Psi_0$ , и, наконец, используя (2.9), рас-





Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 1. Графики функции  $y_1(\tau) = w(\tau)$ , определяемой формулами (2.9) (кривая 1),  $y_2(\tau) = Q_0 p(\tau)$ , определяемой формулой (2.13) (кривая 2),  $y_3(\tau) = [Q_0 p(\tau)]'_\tau$  (кривая 3),  $\tau = (x - X_0)/\mu$ ,  $X_0 = 0,6$ ,  $\mu = 3 \cdot 10^{-2}$

Фиг. 2. Графики функции  $y_4(\tau_0) = T_0 p(\tau_0)$ , определяемой формулой (2.16) (кривая 4),  $y_5(\tau_0) = [\tau_0 T_0 p(\tau_0)]'_{\tau_0}$ ,  $\tau_0 = x/\mu$ ,  $\mu = 3 \cdot 10^{-2}$  (кривая 5)

считываем ее форму. После этого, используя (2.13), можно приступить к выяснению формы функции  $P(x, \mu)$  в окрестности  $X_0$ .

Анализ этих вычислений показывает, что ширина "всплесков" этих функций пропорциональна  $\mu$ . С увеличением  $\mu$  всплеск расплывается, а при достаточно большом значении  $\mu$  газовый разряд перейдет в диффузное состояние. Чем меньше этот параметр, тем уже всплеск и тем круче спуск с него в сторону  $x > x_*$ , что обеспечивает достаточно четкую пространственную границу шнура. О возможном влиянии параметра  $\eta = \mu^{-2}$  на состояние газового разряда упоминалось в [7], где изложены результаты исследования некоторых свойств обобщенного решения системы уравнений (1.1).

На фиг. 1, 2 представлены графики функций

$$N_p(x, h, \mu) \approx A_0(x, \mu) \approx \alpha_{00}(x) + T_0 \alpha_0(\tau_0) + Q_0 \alpha_0(\tau) = \varphi(x) - \varphi^\circ - \varphi_0 + \omega(\tau_0) + w(\tau)$$

$$\varepsilon_x(x, h, \mu) \approx \varepsilon_{x0}(x, \mu) = v_1(x, \mu) \approx p_1(x) + \frac{1}{\mu} T_0 p(\tau_0) + \frac{1}{\mu} Q_0 p(\tau)$$

$$\rho(x, h, \mu) = N_p(x, h, \mu) - N_e(x, h, \mu) \approx h^2 [n_2^{(p)}(x, \mu) - n_2^{(e)}(x, \mu)] = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{x} \frac{d}{dx} [x P(x, \mu)]$$

Точнее, на фиг. 1 и 2 вычерчены графики всплесков этих величин в окрестности точек  $x = 0$  и  $X_0$ , т.е. графики функций  $Q_0 w$ ,  $T_0 w$  и их первых производных. При построении этих графиков было использовано второе приближение для решения интегрального уравнения (2.20) при  $F_1(z) = Dz^2 \exp(-z^2)$ , где  $D = 3,31$ . Для остальных параметров были использованы следующие значения:  $X_0 = 0,6$ ,  $g_0 \xi_0 = 5 \cdot 10^{-3}$ ,  $g_0 = 1,25$ ;  $g^\circ = 1,1$ ;  $\xi(X_0, 0) = 2,67 \cdot 10^{-3}$ ;  $h = \mu = 3 \cdot 10^{-2}$ ;  $\varphi_0 = 1,2563$ ;  $\psi_0 = 331,471$ ;  $\delta_0 = -0,627$ ;  $v = 3 \cdot 10^{-2}$ ;  $\sigma = 4 \cdot 10^{-3}$ ;  $\xi^\circ = 0$ .

Всплеск функции  $A_0(x, \mu)$  в  $x = x_*$  ведет к появлению двух всплесков с противоположными знаками у функции  $P(x, \mu)$  и трех – для функции  $\rho(x, h, \mu)$  в окрестности той же точки. Связь между этими всплесками очевидна и особых пояснений не требует. Тот же максимум функции  $A_0(x, \mu)$  может привести к появлению узкого минимума этой же функции в точке  $x = 0$ , т.е. на оси газового разряда, который с учетом осевой симметрии задачи также имеет форму всплеска.

Здесь рассматривается случай газового разряда в He при  $p = 1$  тор. Тогда, предполагая, что на оси разряда имеет место максвелловское распределение свободных электронов плазмы по скоростям, при  $T_e = 2,2 \cdot 10^4$  К для частоты ионизаций на один электрон получим значение  $z_i \approx 334$  с<sup>-1</sup>, что дает при  $\sigma = 4 \cdot 10^{-3}$ ,  $v = 3 \cdot 10^{-2}$ ,  $R = 1$  см и  $D_p = 300$  см<sup>2</sup>/с для  $g^\circ$  указанное выше значение. Следовательно, глубина упомянутого минимума равна 0,1 и на фиг.2 он не изображен. Этот минимум в свою очередь порождает два симметричных относительно оси газового разряда минимума у функции  $P(x, \mu)$  и три экстремума у функции  $\rho(x, h, \mu)$  (один минимум в точке  $x = 0$  и два симметричных максимума, один из которых приходится на точку  $x \approx 5,4 \cdot 10^{-2}$ ).

Максимальное значение модуля самосогласованного поля плазмы приходится на точку  $x \approx 2,6 \cdot 10^{-2}$  и равно  $\max |T_{0p}| \approx 1,87$ . Следовательно,

$$\max |E_r^{(1)}| \approx \frac{D_p}{\mu R k_p} \max |\varepsilon_x| \approx \frac{D_p}{\mu R k_p} \max |T_{0p}| \approx 3,5 \text{ В/см}$$

Два других экстремальных значения этой функции приходятся на точки  $\tau \approx \pm 0,15$  и равны  $\max |Q_{0p}| \approx 243,3$ . Следовательно,

$$\max |E_r^{(2)}| \approx \frac{D_p}{\mu R k_p} \max |Q_{0p}| \approx 462 \text{ В/см}$$

Заметим, что  $\max |E_r^{(2)}|$  зависит от высоты всплеска функции  $A_0(x, \mu)$ , т.е. от значения  $\psi_0$ . Так, при  $\psi_0 = 5,566$ ,  $\varphi_0 = 2,228$ ,  $\xi_0 = 0,147$ ,  $\max |E_r^{(2)}| \approx 21,1$  В/см,  $\tau \approx \pm 1,25$ .

Функция  $p_1(x)$  не изображена на фиг. 1 по причине ее малости, в рассматриваемом случае  $p_1(X_0) \approx -0,1$ . Для сравнения отметим, что

$$\max \rho(x, h, \mu) \approx h^2 \frac{1}{x} \frac{d}{dx} (x Q_{0p}) = \frac{h^2}{\mu^2} \left( \frac{dQ_{0p}}{d\tau} + \mu \frac{Q_{0p}}{X_0} \right) \approx \frac{h^2}{\mu^2} Q_{0p}'(\tau) \approx 10^3 (\tau = 0)$$

а в интервале  $0,1 < x < 0,5$ , где можно считать  $g = \text{const}$ ,  $\xi = \xi' \equiv 0$

$$\rho(x, h, \mu) \approx h^2 \frac{1}{x} \frac{d}{dx} (x p_1) \approx 0.$$

**Заключение.** На основе математической модели свободногорящей электрической дуги низкого давления выявлены условия, при которых возникают пространственные неоднородности (контрастные структуры).

Внутри образовавшихся структур значения напряженности радиального поля и плотности объемного заряда могут превышать более чем на два–три порядка значения этих величин в остальной части плазменного шнура. Пики задающих эти величины функций располагаются вблизи оси разряда и в некоторой достаточно малой окрестности точки внутри разряда, положение которой вычислено. Такие структуры могут появляться в достаточно плотной (рекомбинирующей) плазме при наличии в ее объеме процесса ступенчатой ионизации. При этом коэффициент этого элементарного процесса не должен быть постоянным вдоль радиуса электродугового столба. При нарушении этого условия газовый разряд переходит в диффузное состояние.

Полученные результаты приводят к заключению, что плазма в электрическом поле приобретает способность к самоорганизации в ее простейших формах.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Низкотемпературная плазма. Т. 1. Теория столба электрической дуги / Под ред. В.С. Энгельшта, Б.А. Урюкова. Новосибирск: Наука, 1990. 376 с.
2. *Чекмарев И.Б.* Математические задачи гидродинамики частично-ионизованного газа // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. М.: ВИНТИ, 1981. Т. 14. С. 66–126.
3. *Райзер Ю.П.* Физика газового разряда. М.: Наука, 1992. 535 с.
4. *Воронов А.Я.* О структуре пограничного слоя плазмы положительного столба тлеющего разряда // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 3. С. 101–108.
5. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
6. *Бутузов В.Ф., Васильева А.Б.* Об асимптотике решения типа контрастной структуры // Мат. заметки. 1987. Т. 42. № 6. С. 831–841.
7. *Воронов А.Я.* О постановке и приближенном решении первой внутренней краевой задачи для системы дифференциальных уравнений диффузионного типа с нелинейностями // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1986. Вып. 1. С. 33–41.
8. *Кигурадзе И.Т., Шехтер Б.Л.* Сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. М.: ВИНТИ, 1987. Т. 30. С. 105–201.

Саров

Поступила в редакцию  
7.II.1996