

УДК 533.692 : 532.526.4

© 1998 г. Д.А. ФОКИН

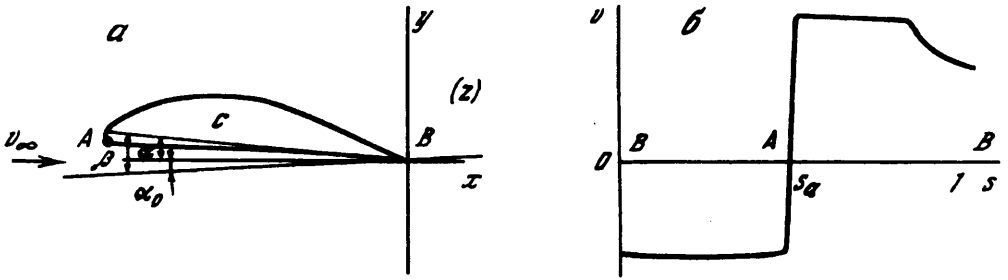
МАКСИМИЗАЦИЯ АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО КАЧЕСТВА КРЫЛОВЫХ ПРОФИЛЕЙ С ТУРБУЛЕНТНЫМ ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

Рассмотрена задача отыскания максимума аэродинамического качества крыловых профилей, обтекаемых без отрыва несжимаемой жидкостью с большим числом Рейнольдса в приближении турбулентного пограничного слоя. В рамках этой модели максимизация качества сведена к нахождению условного экстремума выпуклого функционала. Получено явное выражение экстремального решения в аналитической форме. Представлена зависимость максимального качества от угла атаки. Указан глобальный экстремум аэродинамического качества. Проведено сопоставление результатов с известными результатами численной оптимизации.

Задачи оптимизации форм для достижения экстремальных аэродинамических характеристик являются предметом особого интереса исследователей, работающих в области прикладной и теоретической гидро- и газодинамики [1, 2]. Один из подходов, позволяющий строить корректные вариационные формулировки и получать решения задач оптимизации формы сечений несущих поверхностей, связан с теорией обратных краевых задач аэрогидродинамики [3–5]. Эффективность этого подхода определяется тем, что в рамках относительно несложных моделей обтекания профиля крыла его основные интегральные характеристики – подъемная сила R_y и сила сопротивления R_x – функционально выражаются через управляющую функцию, определяющую форму оптимизируемого профиля. Это позволило построить ряд обоснованных вычислительных процедур оптимизации формы профиля [6–8].

В настоящей работе методы обратных краевых задач применяются для получения аналитического решения задачи о нахождении величины максимального аэродинамического качества $K = R_y/R_x$ в классе крыловых профилей, обтекаемых безотрывно несжимаемым потоком жидкости с турбулентным пограничным слоем.

1. Основные соотношения. В плоскости $z = x + iy$ рассмотрим установившееся безотрывное обтекание несжимаемой жидкостью непроницаемого крылового профиля с гладкой границей и бесконечно тонкой задней кромкой B ($z = 0$) (фиг. 1, а). Ось x декартовой системы координат направлена вдоль скорости набегающего потока. Периметр профиля равен l . Поток на бесконечности считаем однородным, набегающим со скоростью v_∞ . Обозначим через α угол атаки между хордой профиля и направлением набегающего потока. Обтекание профиля происходит при большом числе Рейнольдса $Re = v_\infty l / (2\nu)$, где ν – кинематическая вязкость потока, так что в диапазоне безотрывного обтекания влияние вязкости сказывается лишь в тонком турбулентном пограничном слое на профиле, толщиной вытеснения которого в данном случае пренебрегается. Обычно при построении безразмерных комплексов (Re , коэффициентов подъемной силы C_y и сопротивления C_x) в качестве масштаба длин выбирается длина хорды профиля c . В рассматриваемой задаче эти величины удобно относить к полупериметру контура профиля, который для реальных профилей близок к длине хорды.



Фиг. 1. Постановка задачи

Рассматривается вспомогательная каноническая область $E = \{\zeta, |\zeta| \geq 1\}$ (фиг. 2) в плоскости комплексного переменного $\zeta = re^{i\gamma}$ и вводятся основные соотношения, следуя [4]. Указанный выше класс течений идеальной несжимаемой жидкости опишем управляющей вещественной 2π -периодической гельдеровской функцией $S(\gamma) \in H[0, 2\pi]$, такой, что

$$J_0(S) = \int_0^{2\pi} S(\tau) d\tau = 0 \quad (1.1)$$

где γ – полярный угол в плоскости ζ . Введем комплексную аналитическую функцию $\chi(\zeta)$, определенную в E , так что $R\chi(e^{i\gamma}) = S(\gamma)$ (здесь R означает действительную часть комплексной функции). По интегралу Шварца

$$\chi(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(\tau) \frac{e^{i\tau} + \zeta}{e^{i\tau} - \zeta} d\tau \quad (1.2)$$

Тогда функция $z(\zeta)$, реализующая конформное отображение E на область течения так, что $z(\infty) = \infty$, $z(1) = 0$, имеет вид

$$z(\zeta) = u \int_1^\zeta e^{-\chi(\zeta)} \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right) d\zeta \quad (1.3)$$

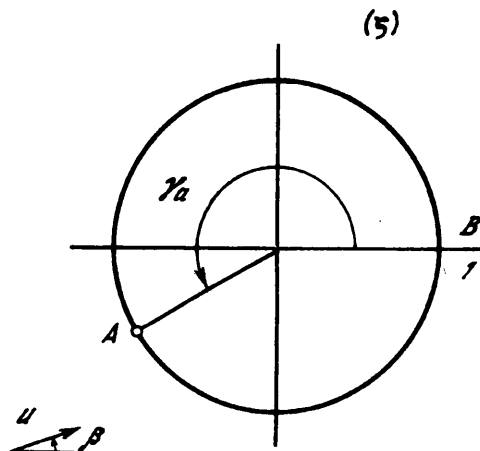
где u – константа, определяющая линейный масштаб в физической плоскости. Координаты x, y контура соответствующего профиля и распределение скорости v вдоль его поверхности при отклонении хорды на угол β от направления обтекания с нулевой подъемной силой определяются формулами

$$x(\gamma) = \int_0^\gamma \frac{ds}{d\gamma}(\tau) \cos \theta(\tau) d\tau, \quad y(\gamma) = \int_0^\gamma \frac{ds}{d\gamma}(\tau) \sin \theta(\tau) d\tau$$

$$|v(\gamma, \beta)| = 2e^{S(\gamma)} \left| \cos\left(\frac{\gamma}{2} - \beta\right) \right| \quad (1.4)$$

$$\frac{ds}{d\gamma} = -2ue^{-S(\gamma)} \sin \frac{\gamma}{2} \quad (1.5)$$

Здесь s – координата по дуге контура профиля. Величина β называется теоретическим углом атаки и характеризует отклонение вектора скорости набегающего потока от направления α_0 , при котором обтекание профиля происходит с нулевой подъемной силой. В рамках принятой модели теоретический угол атаки β отличается от α на постоянную величину α_0 , зависящую от формы профиля. Из (1.4) следует, что передней точке разветвления потока A с дуговой координатой S_a на окружности соответствует $\gamma_a = \pi + 2\beta$. Угол наклона касательной контура $\theta(\gamma)$ профиля к оси x



Фиг. 2. Вспомогательная плоскость ζ

равен

$$\theta(\gamma) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(\tau) \operatorname{ctg} \frac{\tau - \gamma}{2} d\tau + \frac{\gamma}{2} + \pi$$

где интеграл понимается в смысле главного значения. Угол атаки α определится как угол между хордой профиля и осью x . Значение константы u вычисляется из условия равенства периметра контура профиля единице

$$u = \frac{1}{I_1(S)}, \quad I_1(S) = 2 \int_0^{2\pi} e^{-S(\tau)} \sin \frac{\tau}{2} d\tau$$

Замкнутость контура профиля эквивалентна выполнению комплексного равенства

$$\operatorname{res}_{z=\infty} \frac{dz}{d\zeta} = 0$$

что приводит к условиям, которым должна удовлетворять контрольная функция $S(\gamma)$

$$J_1(S) = \int_0^{2\pi} S(\tau) \cos \tau d\tau + \pi = 0, \quad J_2(S) = \int_0^{2\pi} S(\tau) \sin \tau d\tau = 0 \quad (1.6)$$

Коэффициент подъемной силы определится по формуле (подробный вывод в [4])

$$C_y = \frac{16\pi \sin \beta}{I_1(S)} \quad (1.7)$$

Коэффициент сопротивления обычно вычисляют посредством того или иного интегрального метода расчета пограничного слоя и он представляет собой интегрально-дифференциальный функционал вида

$$C_x = \Phi(S, \operatorname{Re}, \beta) \quad (1.8)$$

где функция $S(\gamma)$ определяет форму профиля, Re , β – параметры набегающего потока. В частности, один из простых вариантов расчета C_x в случае безотрывного турбулентного пограничного слоя дает формула Сквайра – Юнга [9]

$$C_x = \frac{2^m A}{\operatorname{Re}^n} \left\{ \left(\int_{s_n}^1 |v|^{1^n}(s) ds \right)^m + \left(\int_0^{s_n} |v|^{1^n}(s) ds \right)^m \right\}$$

где $v(s)$ – величина модуля скорости на контуре профиля в функции координаты s (фиг. 1, б); A, n, m, η – взаимосвязанные полуэмпирические константы, значения которых определяются методом расчета пограничного слоя. В частности, в [9] даются следующие величины:

$$A = 0,0307, \quad m = \frac{6}{7}, \quad n = \frac{1}{7}, \quad \eta = 4, \quad \text{Re} \geq 5 \cdot 10^6 \quad (1.9)$$

$$A = 0,0704, \quad m = \frac{4}{5}, \quad n = \frac{1}{5}, \quad \eta = \frac{7}{2}, \quad \text{Re} < 5 \cdot 10^6 \quad (1.10)$$

Другой вариант констант A, n, m, η дан в [3]. Для приведения этой формулы к виду (1.8) в подынтегральном выражении произведем замену переменной s на γ с учетом (1.4), (1.5)

$$C_x(\beta) = \frac{A(2u)^m}{\text{Re}^n} \{R_1^m(\beta) + R_2^m(\beta)\}$$

$$R_1(\beta) = 2^{\eta+1} \int_0^{\pi+2\beta} D(\tau, \beta) d\tau, \quad R_2(\beta) = 2^{\eta+1} \int_{\pi+2\beta}^{2\pi} D(\tau, \beta) d\tau$$

$$D(\tau, \beta) = e^{(\eta-1)S(\tau)} \left| \cos\left(\frac{\tau}{2} - \beta\right) \right|^\eta \sin \frac{\tau}{2}$$

Для аэродинамического качества имеем

$$K = \frac{C_y}{C_x} = \frac{8\pi \text{Re}^n \sin \beta}{A[2I_1]^{1-m} \{R_1^m(\beta) + R_2^m(\beta)\}} \quad (1.11)$$

Приведенные выражения основных интегральных характеристик в виде функционалов от контрольной функции $S(\gamma)$ получены в [6, 8] (см. также [4]). Там же изучены некоторые свойства этих функционалов, в частности найден минимум функционала $I_1(S)$ в классе функций $S(\gamma) \in L_2[0, 2\pi]$

$$I_{1 \min}(S) = 2\pi$$

Получение в явном виде экстремума аэродинамического качества затруднено вследствие сложной формы функционала (1.11). Для упрощения вида этого функционала оценим его сверху, используя неравенство Минковского и условие $0 < m < 1$. Запишем неравенства

$$K \leq \frac{8\pi \text{Re}^n \sin \beta}{A[2I_{1 \min}]^{1-m} \{R_1^m(\beta) + R_2^m(\beta)\}} \leq \frac{2(4\pi)^m \text{Re}^n \sin \beta}{AI_2^m(S, \beta)}$$

$$I_2(S, \beta) = 2^{\eta+1} \int_0^{2\pi} D(\tau, \beta) d\tau \quad (1.12)$$

Тогда упрощенное выражение для аэродинамического качества примет вид

$$K = \frac{2(4\pi)^m \text{Re}^n \sin \beta}{AI_2^m(S, \beta)} \quad (1.13)$$

2. Постановка и решение вариационной задачи. В рамках описанной модели безотрывного обтекания профиля с заданным числом Рейнольдса Re , скоростью на бесконечности v_∞ и теоретическим углом атаки $\beta > 0$ требуется решить задачу об определении формы профиля с контуром периметра l , обладающего максимальным

аэродинамическим качеством K . Максимизация качества, согласно (1.13), сводится к минимизации функционала $I_2(S, \beta) \rightarrow \min$ на множестве функций (см. условия (1.1), (1.16))

$$U = \{S(\gamma) \in H[0, 2\pi]; J_0(S) = 0, J_1(S) = 0, J_2(S) = 0\}$$

Функционал $I_2(S, \beta)$ аналогичен функционалу, изученному в [4, с. 305] при максимизации подъемной силы. Поэтому верна следующая теорема.

Теорема 1. Функционал $I_2(S, \beta)$ является строго выпуклым на выпуклом компактном множестве $U \in L_2[0, 2\pi]$ и, следовательно, задача минимизации $I_2(S, \beta)$ на U однозначно разрешима.

Рассмотрим задачу минимизации $I_2(S, \beta)$ на линейном подпространстве $U_0 \in L_2[0, 2\pi]$, определенном только условиями (1.1), (1.6). Тогда справедлива теорема 2.

Теорема 2. Функционал $I_2(S, \beta)$ достигает глобального минимума на $U_0 \in L_2[0, 2\pi]$ в точке

$$S_*(\gamma) = \frac{1}{\eta-1} \ln(\mu_0 + \mu_1 \cos \gamma + \mu_2 \sin \gamma) - \frac{1}{\eta-1} \ln \sin \frac{\gamma}{2} - \frac{\eta}{\eta-1} \ln \left| \cos \left(\frac{\gamma}{2} - \beta \right) \right| \quad (2.1)$$

$$\mu_0 = \frac{1 + \eta^2 \sin^2 \beta}{2^{\eta+1}}, \quad \mu_1 = -\frac{\eta \sin^2 \beta}{2^\eta}, \quad \mu_2 = \frac{\eta \sin 2\beta}{2^{\eta+1}}$$

Доказательство. Составим расширенный функционал

$$\Psi(S) = I_2(S, \beta) - \mu_0 J_0(S) - \mu_1 J_1(S) - \mu_2 J_2(S)$$

где μ_0, μ_1, μ_2 – неопределенные множители Лагранжа. Необходимое условие экстремума функционала $\Psi(S)$ в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ эквивалентно выполнению для любых элементов $\xi \in L_2[0, 2\pi]$ равенства

$$\int_0^{2\pi} [D(\tau, \beta) - \mu_0 - \mu_1 \cos \gamma - \mu_2 \sin \gamma] \xi(\tau) d\tau = 0$$

Отсюда получаем для $S_*(\gamma)$ представление (2.1). Зафиксируем неопределенные коэффициенты так, чтобы выполнялись условия (1.1), (1.6). Для этого рассмотрим комплексную аналитическую функцию

$$\chi(\zeta) = \frac{2}{\eta-1} \ln \left(1 - \frac{\rho e^{i\phi}}{\zeta} \right) - \frac{1}{\eta-1} \ln \left(1 - \frac{1}{\zeta} \right) - \frac{\eta}{\eta-1} \ln \left(1 - \frac{e^{i\gamma_a}}{\zeta} \right) \quad (2.2)$$

Пусть $S_*(\gamma) = R\chi(e^{i\gamma})$. В этом случае $S_*(\gamma)$ имеет вид (2.1). Действительно

$$S_*(\gamma) = \frac{1}{\eta-1} \ln \left(\frac{1 + \rho^2}{2^{\eta+1}} - \frac{\rho \cos \phi}{2^\eta} \cos \gamma - \frac{\rho \sin \phi}{2^\eta} \sin \gamma \right) - \frac{1}{\eta-1} \ln \sin \frac{\gamma}{2} - \frac{\eta}{\eta-1} \ln \cos \left(\frac{\gamma}{2} - \beta \right) \quad (2.3)$$

Заметим, что условие (1.1), эквивалентное $\chi(\infty) = 0$ (см. (1.2)), здесь выполнено. Для удовлетворения условиям замкнутости (1.6) подставим $\chi(\zeta)$ в (1.3) и получим для отображающей функции

$$z(\zeta) = u \int \left(1 - \frac{\rho e^{i\phi}}{\zeta} \right)^{-2/(\eta-1)} \left(1 - \frac{1}{\zeta} \right)^{\eta/(\eta-1)} \left(1 - \frac{e^{i\gamma_a}}{\zeta} \right)^{\eta/(\eta-1)} d\zeta \quad (2.4)$$

Разложим подынтегральное выражение в окрестности $\zeta = \infty$ в ряд, тогда

$$z(\zeta) = u \int \left[1 - \frac{-2\rho e^{i\phi} + \eta + \eta e^{i\gamma_a}}{(\eta - 1)\zeta} + O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right) \right] d\zeta$$

Таким образом, для замкнутости контура (т.е. для выполнения условий замкнутости (1.6)) необходимо, чтобы

$$\rho e^{i\phi} = \frac{\eta}{2}(1 + e^{i\gamma_a})$$

Отсюда получим

$$\rho = \eta \sin \beta, \quad \phi = \frac{3\pi}{2} + \beta$$

Подставляя найденные значения в (2.3), получим указанное в формулировке представление для функции $S_*(\gamma)$, доставляющей глобальный максимум функционалу $I_2(S, \beta)$. Теорема доказана.

Следствие 1. Максимальное значение функционала

$$I_{2*} = I_2(S_*, \beta) = 2\pi(1 + \eta^2 \sin^2 \beta)$$

Соответственно максимальное качество при выбранном теоретическом угле атаки β

$$K_*(\beta) = \frac{2^{1+m} \operatorname{Re}^n \sin \beta}{A(1 + \eta^2 \sin^2 \beta)^m} \quad (2.5)$$

Доказательство. Достаточно подставить (2.3) в (1.12) и (1.13).

Следствие 2. В рамках принятой модели течения абсолютный максимум качества равен

$$K^* = \frac{2 \operatorname{Re}^n}{\eta A} (2m - 1)^{m-0.5}$$

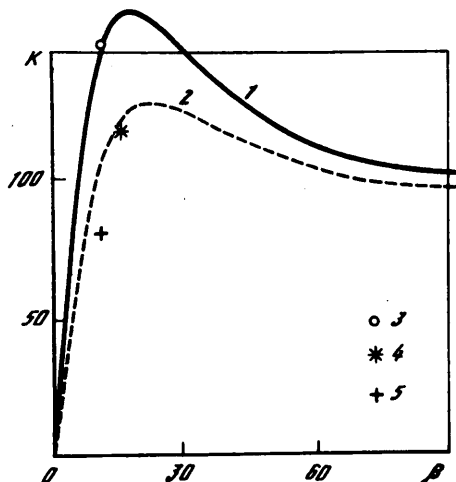
Доказательство. Полученная выше зависимость $K_*(\beta)$ обладает глобальным максимумом, который достигается при

$$\beta_{\max} = \arcsin \frac{1}{\eta \sqrt{2m - 1}}$$

Подстановка этого значения в (2.5) дает указанную в формулировке следствия величину абсолютного максимума аэродинамического качества.

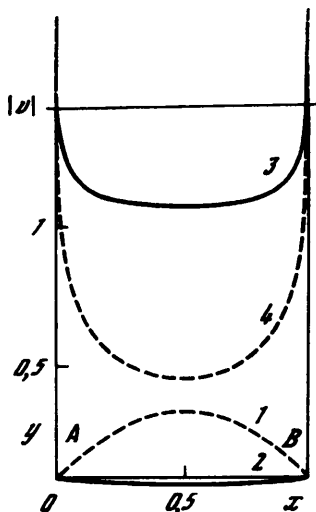
3. Численные результаты. На фиг. 3 приведены зависимости (2.5), рассчитанные для наборов констант (1.9) (кривая 1) при $\operatorname{Re} = 10^7$ и (1.10) (кривая 2) при $\operatorname{Re} = 10^6$. Эти функции немонотонны и имеют абсолютные максимумы $K^* = 165$ при $\beta_{\max} = 17,1^\circ$ (кривая 1) и $K = 130$ при $21,6^\circ$ (кривая 2). Построим профиль, соответствующий точке 3 экстремальной кривой $K_*(\beta)$. Для заданного β координаты такого контура можно определить, интегрируя (2.4).

На фиг. 4 контур, полученный для $\beta = 10^\circ$, имеет вертикальную ось симметрии и его "нижняя поверхность" (кривая 1) проходит выше, чем "верхняя" (кривая 2). Распределение скорости в зависимости от x , рассчитанное по (1.4), представлено в верхней части фиг. 4. Кривой 3 соответствует распределение скорости вдоль верхней поверхности, а кривой 4 – вдоль нижней. Скорость на контуре обращается в бесконечность на передней (точка А) и задней кромках (В). Этот и другие расчеты показали, что точкам экстремальной кривой $K_*(\beta)$ отвечают физически нереальные решения. Учет условий самонепересекаемости контура профиля значительно усложняет задачу и



Фиг. 3

Фиг. 3. Экстремальные зависимости качества K от теоретического угла атаки β : кривая 1 – $Re = 10^7$, кривая 2 – 10^6 , 3 – пример построения оптимального профиля, 4, 5 – результаты максимизации из [4] и [10]



Фиг. 4

Фиг. 4. Вид оптимального профиля с самопересекающимся контуром: кривые 1, 2 – верхняя и нижняя поверхности, 3 и 4 – распределения скорости вдоль них

делает получение аналитического результата для этого класса профилей затруднительным.

Для оценки нижнего предела абсолютного максимума аэродинамического качества, который достигим для физически реальных профилей, воспользуемся результатами [4], где проведена численная оптимизация формы крыловых профилей для получения глобального максимума аэродинамического качества при условиях отсутствия отрыва турбулентного пограничного слоя и самонепересекаемости контура профиля. В частности, при $Re = 10^7$ получено $K^* = 115,4$ при $\beta_{max} = 14,3^\circ$ (кривая 4 на фиг. 3). Сравнение с кривой 1 показывает, что величина β_{max} , где численно достигнут глобальный максимум, хорошо согласуется с указанным выше теоретическим значением, а величина K^* примерно на 30% меньше теоретической.

Другую нижнюю оценку глобального максимума аэродинамического качества можно получить по результатам [10]. Здесь при проектировании высоконесущих профилей с полностью турбулентным пограничным слоем для $Re = 10^6$ построен профиль с $K^* = 79,4$ при $\beta \approx 9^\circ$ (кривая 5 на фиг. 3). Этот результат подтвержден экспериментом и сравнение его с кривой 2 показывает, что реально достижимое при указанном β значение аэродинамического качества примерно на 23% меньше определенного выше теоретического значения.

Заключение. В рамках известной модели обтекания профиля с безотрывным турбулентным пограничным слоем получена верхняя оценка величины аэродинамического качества. При этом оказалось, что экстремальным значениям качества отвечают физически нереальные профили. Это объясняется тем, что максимум аэродинамического качества отыскивался в расширенном классе профилей, допускающих самопересекающиеся контуры с экстремальным решением в аналитической форме. Дальнейший учет условий самонепересекаемости контура профиля потребует введения дополнительных условий однолиственности решения, имеющих вид неравенств, и значительно его усложнит.

Автор благодарит Г.Ю. Степанова и Р. Эпплера за полезные замечания. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 96-01-00070, 96-01-00112, 96-01-00123).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Крайко А.Н.* Вариационные задачи газовой динамики. М.: Наука, 1979. 447 с.
2. *Pironeau O.* Optimal shape design for elliptic systems. N.Y.: Springer, 1984. 168 p.
3. *Степанов Г.Ю.* Гидродинамика решеток турбомашин. М.: Физматгиз, 1962. 512 с.
4. *Елизаров А.М., Ильинский Н.Б., Поташев А.В.* Обратные краевые задачи аэрогидродинамики. М.: Наука, 1994. 440 с.
5. *Eppler R.* Airfoil design and data. Berlin: Springer, 1990. 562 p.
6. *Елизаров А.М., Федоров Е.В.* Оптимизация аэродинамических форм методом обратных краевых задач // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 4. С. 571–580.
7. *Elizarov A.M., Fokin D.A.* A design and optimization of airfoils in non-stalling incompressible flow with a prescribed range of the angle of attack // Intern. J. Numer. Meth. in Eng. 1992. V. 35. № 1. P. 121–132.
8. *Елизаров А.М., Федоров Е.Ф., Фокин Д.А.* Вариационные обратные краевые задачи аэродинамики для дозвукового течения газа // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1993. Т. 33. № 6. С. 958–968.
9. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978. 736 с.
10. *Liebeck R.* A class of airfoils designed for high lift in incompressible flow // J. Aircraft. 1973. V. 10. № 10. P. 610–617.

Казань

Поступила в редакцию
25.IV.1996