МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 • 1998

УДК 533.6.011.8

© 1998 г. О.Г. БУЗЫКИН, В.С. ГАЛКИН, В.И. НОСИК

МОДИФИКАЦИИ УРАВНЕНИЙ БАРНЕТТА И ЗАДАЧА О СТРУКТУРЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

На примере задачи о структуре ударной волны в одноатомном газе исследуются вопросы применимости модификаций уравнений Барнетта, полученных упрощением последних. В отличие от полной системы уравнений Барнетта порядок систем модифицированных уравнений такой же, как и системы Навье – Стокса, они устойчивы к коротковолновым возмущениям.

В проблеме вывода макроскопических моделей физической кинетики и механики сплошных сред на базе молекулярно-кинетической теории центральное место занимает метод Чепмена – Энскога решения кинетических уравнений. Уравнения Барнетта получаются во втором приближении метода Чепмена–Энскога решения уравнения Больцмана при числах Кнудсена $\mathrm{Kn} \ll 1$ [1–3]. В этом приближении напряжения и тепловые потоки содержат кроме навье-стоксовых слагаемые со вторыми производными от газодинамических переменных $T, p, \mathbf{u}$ и произведения из первых производных.

Интерес к уравнениям Барнетта возник в 40-е годы в связи с проектами высотных гиперзвуковых полетов. Была надежда, что учет барнеттовых слагаемых в векторе теплового потока и тензоре напряжений расширит область применимости макроскопического описания взамен более сложного кинетического. Итоги исследований были подведены в [4]. Оказалось, что только для задачи о распространении ультразвука учет барнеттовых слагаемых дает значительные уточнения. В то же время был сделан вывод, что решение задачи о структуре ударной волны в рамках уравнений Барнетта при числе Маха набегающего потока $M_1 \geqslant 1{,}9$ не существует, а при меньших M_1 незначительно отличается от решения уравнений Навье – Стокса. И хотя метод Чепмена – Энскога для сильных ударных волн, строго говоря, неприменим, из этого факта широко распространилось негативное отношение к уравнениям Барнетта [3].

Позднее с помощью уравнений Барнетта был обнаружен ряд новых эффектов и опровергнут вывод о несуществовании решения для сильных ударных волн [5] (см., также обзоры в [6, 7]). Резкий всплеск интереса к уравнениям Барнетта возник после того, как неожиданно была продемонстрирована их значительно более высокая точность (по сравнению с уравнениями Навье – Стокса) в задаче о структуре сильной ударной волны [8]. Снова появилась надежда на расширение области применимости по числу Kn макроскопического описания течений около гиперзвуковых летательных аппаратов: если вблизи поверхности приемлемые результаты дает решение уравнений Навье – Стокса, то в зоне скачка уплотнения они теряют точность, требуемую в ряде ситуаций [9]. Был выполнен большой цикл работ (см., в частности, [10–13]), в процессе которого наглядно проявились следующие проблемы решения краевых задач при помощи уравнений Барнетта.

Очевидна громоздкость этих уравнений и достаточно большая трудоемкость их решения. Однако кроме этого существуют проблемы принципиального характера.

Во-первых, учет барнеттовых слагаемых повышает порядок системы газодинамических уравнений, вследствие чего необходимы дополнительные граничные условия. Строгая теория получения таких условий отсутствует. Интересные предложения, высказанные в [14], не получили должного развития. В целом вопрос о дополнительных граничных условиях остается открытым, при проведении расчетов применяются соображения качественного характера.

Во-вторых, полная система уравнений Барнетта неустойчива к коротковолновым ($\mathrm{Kn} \geqslant 1$) возмущениям [15]. Проблема их подавления возникает, в частности, при решении стационарных задач методом установления. В [10] для подавления неустойчивости вводились специально подобранные внепорядковые по Kn члены. При этом решалась иная система уравнений более высокого порядка.

Простейшее разрешение кризиса в применении полной системы уравнений Барнетта, особенно к нестационарным краевым задачам, было описано в [2]. Идея состоит в замене традиционного метода Чепмена – Энскога модифицированным, в котором вместо цепочки уравнений Навье – Стокса, Барнетта и т.д. получаются, например, уравнения Навье – Стокса, линеаризованные относительно их уравнения Барнетта и т.п. Таким образом, проводится переразложение по $\mathrm{Kn} \ll 1$ указанной цепочки относительно уравнений Навье – Стокса. В результате ведущим становится навье–стоксов оператор с его известными преимуществами (в частности, устойчивостью к коротковолновым возмущениям) и порядок системы не повышается.

Кажется очевидным, что если различия решений полных систем уравнений Барнетта и Навье – Стокса малы, то малы и различия их решений по классической и модифицированной схемам. На примере точного решения уравнений Больцмана для сдвигового течения это показано в [16]. Понятно также, что с этой же точностью по Kn линеаризованные уравнения Барнетта можно заменить неоднородными уравнениями Навье – Стокса с барнеттовыми слагаемыми, рассчитываемыми при помощи обычных уравнений Навье – Стокса.

Однако для задач, где указанные различия не малы, необходимо коренное изменение смысла модификаций. Именно к таким относится задача о структуре сильной ударной волны, причем здесь метод Чепмена – Энскога, строго говоря, неприменим, так как характерное число $\mathrm{Kn} \leqslant 1$. Тем не менее уравнения Барнетта дают хорошие результаты. Поэтому можно попытаться проводить аналогичные модификации путем изменения базиса, относительно которого строится метод возмущений: вместо уравнений Навье – Стокса применять усеченные уравнения Барнетта с целью получения приближенного решения, близкого к решению полной системы уравнений Барнетта.

Целью данной статьи является анализ различных модификаций уравнений Барнетта и вывод модели, удовлетворяющей поставленным требованиям.

1. Приведем математическую постановку задачи. Для одноатомных газов уравнения Барнетта имеют вид [1]

$$\frac{D\rho}{Dt}+\rho\frac{\partial u_j}{\partial x_j}=0,\quad \rho\frac{Du_i}{Dt}+\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(p_{ij}^{(1)}+p_{ij}^{(2)}\right)=0,\quad p=nkT=\rho\frac{k}{m}T$$
$$\frac{3}{2}nk\frac{DT}{Dt}+p\frac{\partial u_j}{\partial x_j}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(q_j^{(1)}+q_j^{(2)}\right)+\left(p_{ij}^{(1)}+p_{ij}^{(2)}\right)\frac{\partial u_j}{\partial x_i}=0,\quad \frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u_k\frac{\partial}{\partial x_k} \tag{1.1}$$

Здесь применены обычные обозначения для газодинамических переменных ρ, p, T, u_i, индексы $i, j, k = 1, 2, 3$. Через $p_{ij}^{(1)}, q_i^{(1)}$ обозначены навье-стоксовы напряжения и тепловые потоки, которые можно записать в виде

$$p_{ij}^{(1)}=-2\mu e_{ij},\quad e_{ij}=\left\langle\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right\rangle,\quad q_i^{(1)}=-\lambda\frac{\partial T}{\partial x_i} \tag{1.2}$$

где μ, λ – коэффициенты вязкости и теплопроводности, δ_{ij}– символ Кронеккера, оператор $\langle\rangle$ определяется выражением

$$\left\langle A_{ij}\right\rangle = \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji}) - \frac{1}{3}\delta_{ij}A_{kk}$$

Барнеттовы вклады даются формулами

$$p_{ij}^{(2)} = \frac{\mu^2}{p}\left(K_1 e_{ij}\nabla\mathbf{u} - K_2\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + 2e_{ik}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right\rangle\right) + \tag{1.3}$$

$$+\frac{\mu^2}{\rho T}\left\langle K_3\frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{K_4}{p}\frac{\partial p}{\partial x_i}\frac{\partial T}{\partial x_j} + \frac{K_5}{T}\frac{\partial T}{\partial x_i}\frac{\partial T}{\partial x_j} + \frac{K_6 m}{k}\quad e_{ik}e_{kj}\right\rangle$$

$$q_i^{(2)} = \frac{\mu^2}{\rho T}\left\{\theta_1\frac{\partial T}{\partial x_i}\nabla\mathbf{u} + 2\theta_2\left[\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x_i}(T\nabla\mathbf{u}) + \frac{\partial T}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right]\right\} + \frac{\mu^2}{\rho}\left(\frac{\theta_3}{p}\frac{\partial p}{\partial x_j} + \theta_4\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\theta_5}{T}\frac{\partial T}{\partial x_j}\right)e_{ij}$$

Приближенные выражения для коэффициентов в (1.3) имеют вид

$$K_1 = \frac{4}{3}\left(\frac{7}{2} - \mu^*\right),\quad K_2 = 2,\quad K_3 = 3,\quad K_4 = 0,\quad K_5 = 3\mu^*,\quad K_6 = 8 \tag{1.4}$$

$$\theta_1 = \frac{15}{4}\left(\frac{7}{2} - \mu^*\right),\quad \theta_2 = \frac{-45}{8},\quad \theta_3 = -3,\quad \theta_4 = 3,\quad \theta_5 = 3\left(\frac{39}{4} + \mu^*\right),\quad \mu^* = \frac{T}{\mu}\frac{d\mu}{dT}$$

Подчеркнем, что (1.4) являются точными значениями для газа максвелловских молекул, когда $\mu^* = 1$. Практически точные значения получены также для молекул-упругих сфер ($\mu^* = 1/2$) [1].

В одномерном стационарном случае имеем

$$p_{xx}^{(1)} = -\frac{4}{3}\mu\frac{du}{dx},\quad q_x^{(1)} = -\lambda\frac{dT}{dx},\quad u = u_x \tag{1.5}$$

$$p_{xx}^{(2)} = \frac{\mu^2}{\rho}\left[\frac{\rho}{p}\omega_1\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \omega_2\frac{1}{T}\frac{d^2T}{dx^2} + \omega_3\frac{1}{T^2}\left(\frac{dT}{dx}\right)^2 + \right. \tag{1.6}$$

$$\left. + \omega_4\frac{1}{\rho}\frac{d^2\rho}{dx^2} + \omega_5\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{d\rho}{dx}\right)^2 + \omega_6\frac{1}{\rho T}\frac{d\rho}{dx}\frac{dT}{dx}\right]$$

$$q_x^{(2)} = \frac{\mu^2}{\rho}\left(\gamma_1\frac{du}{dx}\frac{1}{T}\frac{dT}{dx} + \gamma_2\frac{d^2u}{dx^2} + \gamma_3\frac{du}{dx}\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dx}\right)$$

$$\omega_1 = \frac{2}{3}\left(K_1 - \frac{7}{3}K_2 + \frac{1}{3}K_6\right),\quad \omega_2 = \frac{2}{3}(K_3 - K_2),\quad \omega_3 = \frac{2}{3}(K_4 + K_5)$$

$$\omega_4 = -\frac{2}{3}K_2,\quad \omega_5 = \frac{2}{3}K_2,\quad \omega_6 = \frac{2}{3}(K_4 - K_2)$$

$$\gamma_1 = \theta_1 + \frac{2}{3}(4\theta_2 + \theta_3 + \theta_5),\quad \gamma_2 = \frac{2}{3}(\theta_2 + \theta_4),\quad \gamma_3 = \frac{2}{3}\theta_3$$

Отметим, что в некоторых работах (например, [12]) использовано неправильное значение ω_1, предложенное в [4]: вместо коэффициента 1/3 при K_6 используется коэффициент 4/9. В [8] утверждается, что такая замена слабо сказывается на результатах.

Подстановка (1.2) – (1.4) в (1.1) дает полную систему уравнений Барнетта. Эта система по сравнению с системой Навье – Стокса имеет более громоздкую нелинейную структуру. Несоизмеримо более важными ее недостатками являются отмеченные выше дефекты: повышение порядка системы и, следовательно, увеличение числа граничных условий, а также коротковолновая неустойчивость. К тому же [2] в методе Чепмена – Энскога уравнения высших (начиная с барнеттовых) приближений обладают посторонними (ложными) решениями. Необходимость отсева последних повышает требования к постановке задачи.

Для подавления обнаруженной методом дробления расчетной сетки неустойчивости в [10] были введены дополнительные слагаемые

$$\delta p_{ij} = \frac{\mu^3 k}{3p^2 m}\left\langle \nabla_i \nabla^2 u_j \right\rangle, \quad \delta q_i = \frac{\mu^3 k}{16 p\rho m}\left(11\nabla_i(\nabla^2 T) - 10\frac{T}{\rho}\nabla_i(\nabla^2 \rho)\right) \tag{1.7}$$

в p_{ij} и q_i соответственно. Эти члены супербарнеттова типа найдены эмпирически. Утверждается, что они слабо влияют на результаты расчетов.

Важно подчеркнуть, что при добавлении (1.7) решается уже не система уравнений Барнетта, а иная система более высокого порядка. Эта расширенная система была применена для задачи о структуре ударной волны [13] и для задач гиперзвукового обтекания тел [10, 17].

Конкретизируем высказанные во введении соображения о модификациях уравнений Барнетта, понижающих порядок системы и упрощающих ее. Запишем (1.1) в виде $L_1 + L_2 = 0$, где $L_1 = 0$ есть система уравнений Навье – Стокса, а L_2 состоит из барнеттовых слагаемых. Пользуясь тем, что метод Чепмена – Энскога является методом возмущений по $\mathrm{Kn} \ll 1$, будем искать решение уравнений Барнетта в виде $\Sigma \approx \Sigma_0 + \Sigma_1$, $|\Sigma_1| \ll |\Sigma_0|$, где $\Sigma = (\mathbf{u}, \rho, T)$ – газодинамические переменные. Переменные Σ_0 удовлетворяют уравнениям Навье – Стокса $L_1(\Sigma_0) = 0$, а для Σ_1 имеем

$$L_1^*(\Sigma_1) + L_2(\Sigma_0) = 0 \tag{1.8}$$

где L_1^* – линеаризованные по Σ_1 уравнения Навье – Стокса. Вместо (1.8) с той же точностью можно применять неоднородные уравнения Навье – Стокса

$$L_1(\Sigma) + L_2(\Sigma_0) = 0 \tag{1.9}$$

Естественно ожидать, что для задач, где решения уравнений Навье – Стокса и Барнетта различаются на величины порядка $\mathrm{Kn} \ll 1$, процедуры (1.8) и (1.9) дадут результаты, близкие к результатам решения полной системы уравнений Барнетта.

Результаты расчетов показали, что для задачи о структуре ударной волны более широкую область применимости по числу M_1 имеют уравнения (1.9). Для краткости изложения ниже модификация (1.8) не рассматривается, а под асимптотической модификацией понимаются неоднородные уравнения Навье – Стокса (1.9).

Для течения в ударной волне число Kn мало только тогда, когда число M_1 близко к единице (слабая ударная волна). Для сильных ударных волн характерное число Кнудсена асимптотически не мало и метод Чепмена – Энскога, строго говоря, применим лишь формально. Тем не менее и здесь уравнения Барнетта дают хорошие результаты. Поэтому для сильных ударных волн вместо (1.9) можно применить систему уравнений

$$L_1(\Sigma) + L_2^{(1)}(\Sigma) + L_2^{(2)}(\Sigma_0^*) = 0 \tag{1.10}$$

где через Σ_0^* обозначены газодинамические переменные, являющиеся решениями системы уравнений

$$L_1(\Sigma_0^*) + L_2^{(1)}(\Sigma_0^*) = 0$$

Оператор $L_2^{(2)}$ содержит члены $p_{ij}^{(2)}, q_i^{(2)}$ со вторыми производными и часть членов с парными производными первых производных, а $L_2^{(1)}$ учитывает остальные барнеттовы члены. Таким образом, в качестве базисного применяется не оператор Навье – Стокса L_1, а усеченный оператор Барнетта $L_1 + L_2^{(1)}$.

Отметим, что порядок системы неоднородных усеченных уравнений Барнетта (1.10) равен порядку системы уравнений Навье – Стокса. Кроме того, линеаризованная относительно состояния покоя однородная часть уравнения (1.10) совпадает с так же линеаризованными уравнениями Навье – Стокса. Поэтому этой системе не свойственна коротковолновая неустойчивость, отмеченная в [15], где показано, что линеаризованная полная система уравнений Барнетта имеет растущие во времени решения с длиной волны порядка длины свободного пробега. Линеаризованное уравнение Навье – Стокса такой неустойчивостью не обладает.

Кроме изложенных выше упрощений возможен другой подход, основанный на отбрасывании ряда членов и эмпирическом изменении коэффициентов при оставшихся членах. На возможность подобного рода упрощений обращено внимание в [11, 13]. При этом в [13] предлагается вместо (1.6) применять выражения

$$p_{xx}^{(2)} \approx \xi_1 \frac{\mu^2}{p}\left(\frac{du}{dx}\right)^2, \quad q_x^{(2)} \approx \gamma_1 \frac{\mu^2}{\rho T}\frac{du}{dx}\frac{dT}{dx} \tag{1.11}$$

Путем анализа расчетных данных предложено значение $\xi_1 \approx 8$. Однако в [13] не приведено никаких данных, характеризующих точность (1.11).

2. Рассмотрим задачу о структуре ударной волны. Для стационарного одномерного случая уравнения (1.1) записываются в дивергентном виде и один раз интегрируются по x. Из уравнения энергии исключается p_{xx} с помощью уравнения импульса. С учетом (1.5) и условий Гюгонио получаем [18, 19]

$$v + \frac{3}{5\mathrm{M}_2^2}\frac{\Theta}{v} - \left(1 + \frac{3}{5\mathrm{M}_2^2}\right) - \sigma = 0, \quad \sigma = \sigma^{(1)} + \sigma^{(2)}$$

$$\frac{9}{10\mathrm{M}_2^2}\Theta - \frac{v^2}{2} + \left(1 + \frac{3}{5\mathrm{M}_2^2}\right)v - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{\mathrm{M}_2^2}\right) + q = 0, \quad q = q^{(1)} + q^{(2)} \tag{2.1}$$

$$\eta = \frac{\mu}{\mu_2}, \quad \Theta = \frac{T}{T_2}, \quad z = \frac{x}{l_2}, \quad v = \frac{u}{u_2}, \quad l_2 = \frac{\mu_2}{\rho_2 u_2}, \quad \sigma = \frac{p_{xx}}{\rho_2 u_2^2}, \quad q = \frac{q_x}{\rho_2 u_2^3}$$

Здесь $\mathrm{M}_2, \rho_2, u_2, T_2$ – число Маха и газодинамические переменные за ударной волной ($x = +\infty$). Газодинамические переменные при $x = \pm\infty$ связаны условиями Гюгонио. Для решения задачи необходим анализ особых точек при $x = \pm\infty$.

Полагая в (2.1) равными нулю барнеттовы слагаемые, получаем уравнения $L_1 = 0$, т.е. уравнения в приближении Навье – Стокса

$$\frac{4}{3}\eta v' = v + \frac{3}{5\mathrm{M}_2^2}\frac{\Theta}{v} - \left(1 + \frac{3}{5\mathrm{M}_2^2}\right), \quad ()' = \frac{d()}{dz}$$

$$\frac{9}{4\mathrm{M}_2^2}\eta\Theta' = \frac{9}{10\mathrm{M}_2^2}\Theta - \frac{v^2}{2} + \left(1 + \frac{3}{5\mathrm{M}_2^2}\right)v - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{\mathrm{M}_2^2}\right)$$

Детальный анализ и решение задачи (2.2) даны в [19]. Особая точка при $x = -\infty$ "притягивает" траектории и эффективным является интегрирование из окрестности $x = +\infty$ при любом M_1.

Используя (1.6) и добавляя справа в первое и второе уравнения (2.2) $\sigma^{(2)}$ и $q^{(2)}$ соответственно, получаем систему уравнений в приближении Барнетта, описывающую структуру ударной волны. Проведенный в [18] анализ особых точек показал причины невозможности ее интегрирования из окрестности $x = +\infty$.

При замене в уравнениях величин $\sigma^{(2)}$, $q^{(2)}$ на $\sigma^{(2)}(\Sigma_0)$, $q^{(2)}(\Sigma_0)$ из (1.9) получаем неоднородные уравнения Навье – Стокса

$$\frac{4}{3}\eta v' = v + \frac{3}{5M_2^2}\frac{\Theta}{v} - \left(1 + \frac{3}{5M_2^2}\right) +$$
$$+\eta_0^2 v_0\left\{\omega_1 \frac{5M_2^2}{3\Theta_0}v_0'^2 + \omega_2\frac{\Theta_0''}{\Theta_0} + \omega_3\left(\frac{\Theta_0'}{\Theta_0}\right)^2 + \omega_4\left[2\left(\frac{v_0'}{v_0}\right)^2 - \frac{v_0''}{v_0}\right] +\right.$$
$$\left. + \omega_5\left(\frac{v_0'}{v_0}\right)^2 - \omega_6\frac{v_0'\Theta_0'}{v_0\Theta_0}\right\} \tag{2.3}$$
$$\frac{9}{4M_2^2}\eta\Theta' = \frac{9}{10M_2^2}\Theta - \frac{v^2}{2} + \left(1+\frac{3}{5M_2^2}\right)v - \frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{M_2^2}\right) +$$
$$+\eta_0^2 v_0\left(\gamma_1 v_0'\frac{\Theta_0'}{\Theta_0} + \gamma_2 v_0'' - \gamma_3\frac{v_0'^2}{v_0}\right)$$

где v_0, Θ_0 – решение однородных уравнений Навье – Стокса.

Для получения из (1.10) неоднородных усеченных уравнений Барнетта полагаем

$$q^{(2)} = q_1^{(2)}(\Sigma) + q_2^{(2)}(\Sigma_0^*), \quad \sigma^{(2)} = \sigma_1^{(2)}(\Sigma) + \sigma_2^{(2)}(\Sigma_0^*)$$

Результаты расчетов показали, что достаточно высокую точность дает следующее приближение:

$$\frac{4}{3}\eta v' = v + \frac{3}{5M_2^2}\frac{\Theta}{v} - \left(1+\frac{3}{5M_2^2}\right) + \eta^2 v\left[\omega_1\frac{5M_2^2}{3\Theta}v'^2 + \omega_5\left(\frac{v'}{v}\right)^2 - \omega_6\frac{v'\Theta'}{v\Theta}\right] + \tag{2.4}$$
$$+\eta_0^2 v_0\left\{\omega_2\frac{\Theta_0''}{\Theta_0} + \omega_3\left(\frac{\Theta_0'}{\Theta_0}\right)^2 + \omega_4\left[2\left(\frac{v_0'}{v_0}\right)^2 - \frac{v_0''}{v_0}\right]\right\}$$
$$\frac{9}{4M_2^2}\eta\Theta' = \frac{9}{10M_2^2}\Theta - \frac{v^2}{2} + \left(1+\frac{3}{5M_2^2}\right)v - \frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{M_2^2}\right) + \eta^2 v\left(\gamma_1 v'\frac{\Theta'}{\Theta} - \gamma_3\frac{v'^2}{v}\right) +$$
$$+\eta_0^2 v_0\gamma_2 v_0''$$

где v_0, Θ_0 – решение однородных уравнений, получающихся из (2.4) путем отбрасывания неоднородной части.

Постановка граничных условий для всех описанных систем уравнений требует анализа решений в окрестностях особых точек $x = \pm\infty$. Как обычно, проводится линеаризация уравнений. Поскольку в линеаризованных системах (2.3) и (2.4) дифференциальные операторы идентичны и совпадают с операторами обычных однородных уравнений Навье – Стокса, то количество и величина собственных значений совпадают. Поэтому аналогично [19] должно быть эффективным интегрирование из окрестности $x = +\infty$, где существует единственное затухающее решение задачи для отрицательного собственного значения λ_1.

Собственные векторы этого решения для неоднородной системы уравнений Навье – Стокса (2.3) имеют вид

$$\begin{pmatrix} v \\ \Theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\{ \left[C + \frac{f_v c_{T2} - f_T c_{v2}}{c_{T2} c_{v1} - c_{T1} c_{v2}} \right] \begin{pmatrix} c_{v1} \\ c_{T1} \end{pmatrix} + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \frac{f_v c_{T1} - f_T c_{v1}}{c_{T2} c_{v1} - c_{T1} c v_2} \begin{pmatrix} c_{v2} \\ c_{T2} \end{pmatrix} \right\} e^{\lambda_1 z}$$

$$f_v = \lambda_1^2 \left(c_{v1} + \frac{1}{2} c_{T1} \right), \quad f_T = -\frac{7}{9} M_2^2 \lambda_1^2 c_{v1}$$

где $\lambda_2 > 0$ – второе собственное значение, c_{vi}, c_{Ti} – компоненты собственных векторов однородной системы Навье – Стокса, соответствующие λ_i.

Решения однородной и неоднородной систем определяются с точностью до произвольной постоянной C, отвечающей за положение скачка в пространстве, т.е. за пространственный сдвиг решений этих систем. Значение C выбиралось таким образом, чтобы при отбрасывании неоднородной части получалось решение, совпадающее с ранее полученным решением однородной системы, по которому рассчитывалась неоднородная часть.

Проведенный анализ особых точек справедлив и для неоднородных усеченных уравнений Барнетта (2.4), поскольку в линейном приближении эти уравнения совпадают с линейными неоднородными уравнениями Навье – Стокса.

Системы уравнений (2.3) и (2.4) интегрировались численно методом Эйлера с переменным шагом. Интегрирование начиналось с достаточно удаленной точки, где $v - 1 \ll 1$. Отсутствие влияния параметров численной процедуры на результат проверялось опытным путем.

3. Расчеты структуры ударной волны по описанным выше модифицированным уравнениям проведены в диапазоне чисел $M_1 = 1{,}5$–35. Для сравнения использовались результаты решения системы уравнений Барнетта и расчетов методом прямого статистического моделирования [8, 12, 13]. Поскольку последний дает результаты, хорошо согласующиеся с экспериментом, экспериментальные данные ниже не приводятся. В основном опубликованные результаты получены для $M_1 \leqslant 11$, так как именно для этих значений были измерены характеристики ударной волны. Расчеты до чисел $M_1 = 50$ проведены в [8], однако профили плотности и температуры представлены только для $M_1 = 35$.

Особое внимание было уделено "мягким" межмолекулярным потенциалам, как наиболее интересным для гиперзвуковой аэродинамики: $\mu^* = 0{,}72$ и 1 (максвелловские молекулы).

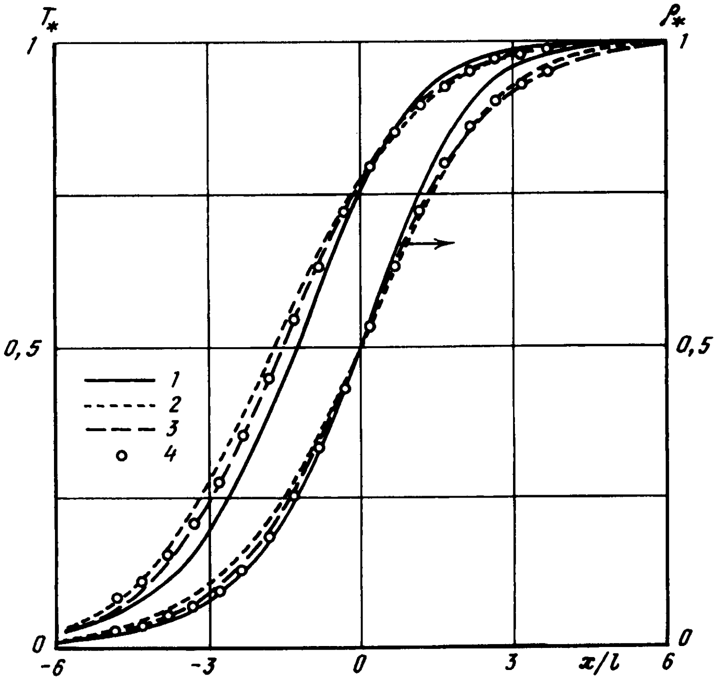
Результаты расчетов приведены на фиг. 1–7. Использованы обозначения

$$\Delta_\rho = \frac{\delta}{l}, \quad l = \frac{16\mu_1}{5\rho_1}\left(2\pi \frac{k}{m} T_1\right)^{-1/2}, \quad T_* = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1}, \quad \rho_* = \frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1}, \tag{3.1}$$

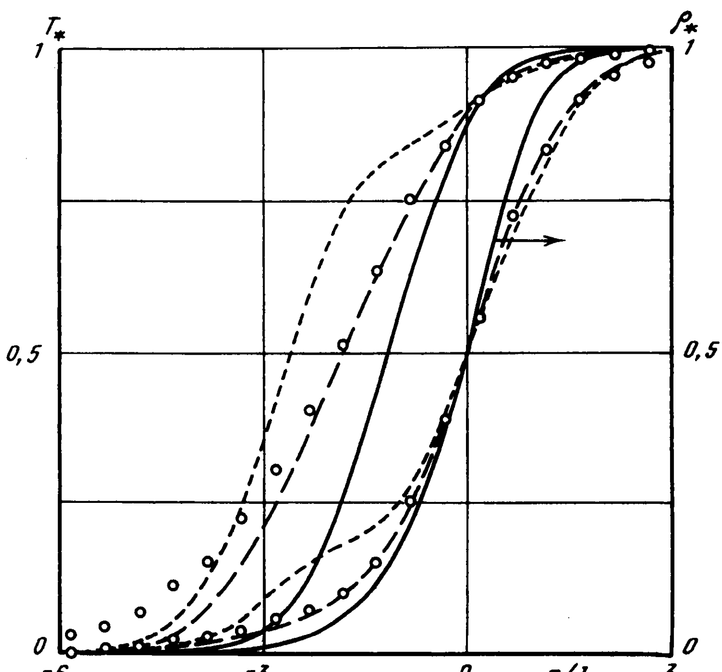
$$Q_\rho = \left[\int_0^\infty (1 - \rho_*(z))\, dz \right]^{-1} \int_{-\infty}^0 \rho_*(z)\, dz, \quad \rho_*(0) = \frac{1}{2}$$

где δ – толщина ударной волны, рассчитываемая, как обычно, по $\max \rho_*'$; l, μ_1, ρ_1, T_1 – средняя длина свободного пробега молекул, коэффициент вязкости, плотность и температура в набегающем потоке (при $x = -\infty$); T_*, ρ_* – приведенные температура и плотность. Величина Q_ρ характеризует асимметрию профиля плотности, величина $\Delta_{\rho T}$ – отнесенное к l расстояние между точками $T_* = 1/2$, $\rho_* = 1/2$.

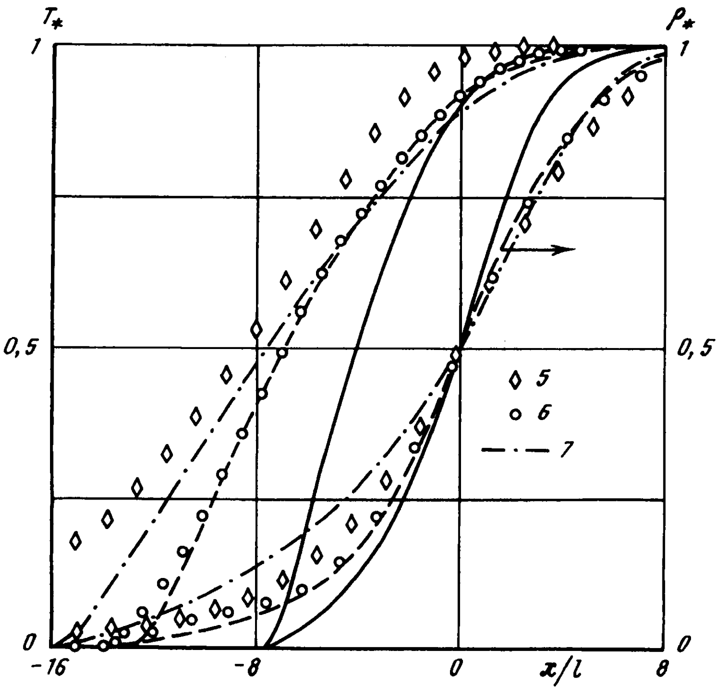
Верхние пучки кривых на фиг. 1–4 дают профили $T_*(x/l)$, нижние пучки – профили $\rho_*(x/l)$.



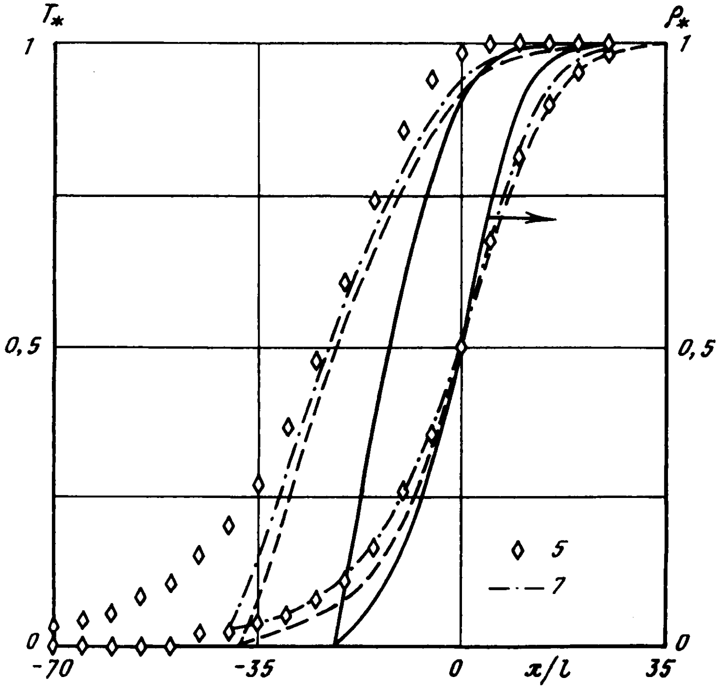
Фиг. 1. Профили приведенной температуры T_* и приведенной плотности ρ_* в ударной волне при $M_1 = 1{,}75$, $\mu^* = 0{,}72$. *1* – решение уравнений Навье – Стокса, *2* – неоднородных уравнений Навье – Стокса (2.3), *3* – усеченных неоднородных уравнений Барнетта (2.4), *4* – уравнений Барнетта [12]



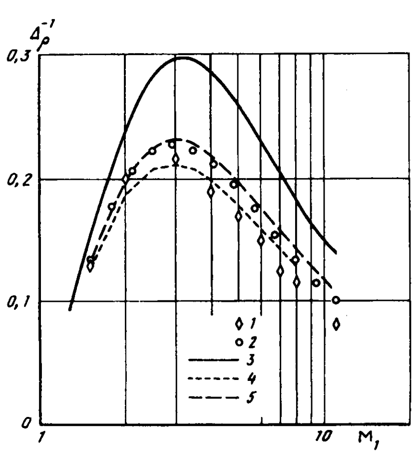
Фиг. 2. Профили T_* и ρ_* в ударной волне при $M_1 = 3{,}8$, $\mu^* = 0{,}72$. Обозначения см. на фиг. 1



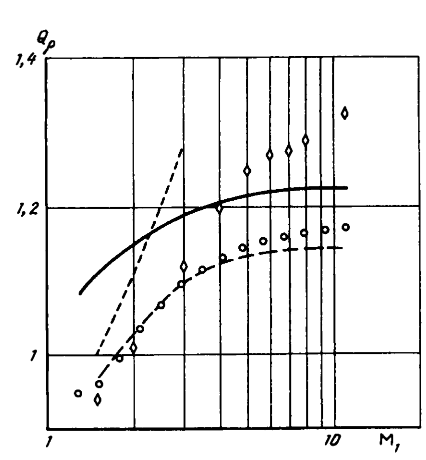
Фиг. 3. Профили T_* и ρ_* в ударной волне при $M_1 = 11$, $\mu^* = 1$. *5* – метод прямого статистического моделирования [13], *6* – решение уравнений Барнетта [13], *7* – приближение (1.11) [13]. Остальные обозначения см. на фиг. 1



Фиг. 4. Профили T_* и ρ_* в ударной волне при $M_1 = 35$, $\mu^* = 1$. *5* – расчет методом прямого статистического моделирования [8], *7* – решения уравнений Барнетта при $\omega_4 = 0$ [8]. Остальные обозначения см. на фиг. 1



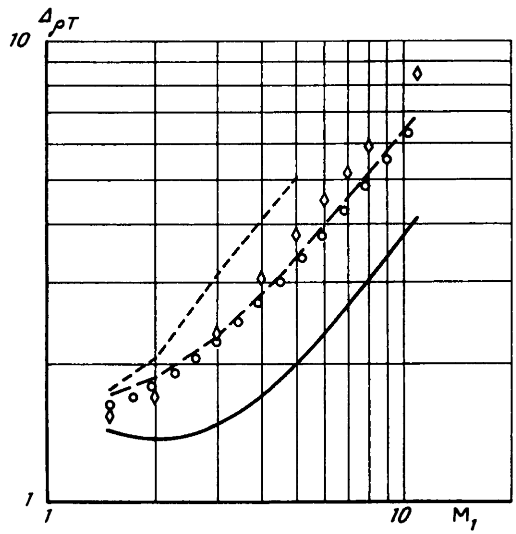
Фиг. 5



Фиг. 6

Фиг. 5. Зависимость безразмерной обратной толщины ударной волны Δ_ρ^{-1} от числа M_1 для $\mu^* = 1$. *1* – расчет методом прямого статистического моделирования [13], *2* – решение уравнений Барнетта [3], *3* – уравнений Навье–Стокса, *4* – неоднородных уравнений Навье – Стокса (2.3), *5* – усеченных неоднородных уравнений Барнетта (2.4)

Фиг. 6. Зависимость параметра асимметрии профиля плотности Q_ρ от числа M_1 для $\mu^* = 1$. Обозначения см. на фиг. 5



Фиг. 7. Зависимость расстояния $\Delta_{\rho T}$ между профилями ρ_* и T_* от числа M_1 для $\mu^* = 1$. Обозначения см. на фиг. 5

На фиг. 1, 2 результаты решения уравнений Барнетта взяты из [12] для аргона. Представленные на фиг. 3, 5–7 результаты, полученные при помощи уравнений Барнетта и метода прямого статистического моделирования для $\mu^* = 1$, взяты из [13], а на фиг. 4 – из [8] для $\mu^* = 1$. В [8] решение уравнений Барнетта получено на сравнительно крупной сетке, причем для максвелловских молекул не учитывался член со второй производной от плотности в p_{xx}. Результаты [8] уточнены в [13], где применялись расширенные с учетом (1.7) уравнения Барнетта. Для аргона в [12] полагалось $\mu^* = 0{,}72$, в [13] – $\mu^* = 0{,}75$.

Перейдем к анализу результатов. При $M_1 = 1{,}75$ (фиг. 1) решение неоднородных уравнений Навье – Стокса (2.3) близко к решению уравнений Барнетта. Небольшие различия имеются в "задней" части профиля плотности и в "передней" части профиля температуры. Такая близость результатов для ρ_* и T_* сохраняется примерно до $M_1 = 2–2{,}5$. С ростом M_1 различия увеличиваются, в профилях появляются волнообразные участки (фиг. 2). Тем не менее для толщины ударной волны результаты решения неоднородных уравнений Навье – Стокса (2.3) хорошо согласуются с решением методом прямого статистического моделирования вплоть до $M_1 = 11$ (фиг. 5). Для параметра асимметрии Q_ρ уравнения (2.3) дают достаточную точность лишь при $M_1 \leqslant 2$ (фиг. 6), а для $\Delta_{\rho T}$ – при еще меньшем M_1 (фиг. 7).

Таким образом, для сильных ударных волн неоднородные уравнения Навье – Стокса не обладают должной точностью. Поэтому были проведены исследования влияния на форму и взаимное расположение профилей ρ_* и T_* различных барнеттовых членов тензора напряжений и вектора теплового потока, а также нескольких способов определения $L_2^{(2)}$ в (1.10). Наилучшим вариантом расщепления оператора L_2 оказалась модификация (2.4), названная неоднородными усеченными уравнениями Барнетта.

При $M_1 = 1{,}75$ результаты решения неоднородных усеченных уравнений Барнетта и полной системы уравнений Барнетта [12] для ρ_* и T_* фактически совпадают (фиг. 1). При $M_1 = 3{,}8$ и $\mu^* = 0{,}72$ расхождения имеют место только в переднем участке профиля T_*, а для ρ_* результаты практически неразличимы (фиг. 2).

Для больших чисел M_1 в случае максвелловских молекул даже это небольшое расхождение исчезает (фиг. 3, 4). Приближение (1.11) [13] заметно хуже результатов применения (2.4) (фиг. 3). Решения неоднородных усеченных уравнений Барнетта близки к решениям полной системы уравнений Барнетта [8, 13] не только для профилей ρ_* и T_*, но и для толщины ударной волны и параметров Q_ρ и $\Delta_{\rho T}$ (фиг. 5–7).

Как рассматриваемая модификация, так и полная система уравнений Барнетта кардинально уточняют уравнения Навье – Стокса. Неожиданным исключением является зависимость Q_ρ от M_1, где при $M_1 = 4–11$ результаты решения уравнений Навье – Стокса ближе к данным, полученным методом прямого статистического моделирования, чем результаты решения уравнений Барнетта.

Теперь о сопоставлении результатов неоднородных усеченных уравнений Барнетта с результатами метода прямого статистического моделирования. При $M_1 = 11$ (фиг. 3) наклон профиля ρ_*, согласно методу прямого статистического моделирования, несколько выше результатов решения неоднородных усеченных уравнений Барнетта, значительно больше различия – для профиля T_*, особенно в его низкотемпературной части. При $M_1 = 35$ (фиг. 4) имеется очень хорошее согласие профилей ρ_*, для профилей T_* максимальное различие – на переднем "крыле" профиля.

В диапазоне $M_1 = 3–11$ при $\mu^* = 1$ неоднородные усеченные уравнения Барнетта несколько занижают толщину ударной волны (фиг. 5), для Q_ρ они дают хорошую точность при $M_1 < 3$ (фиг. 6), очень хорошее согласие с методом прямого статистического моделирования имеет место для $\Delta_{\rho T}$ (фиг. 7).

Заключение. Для расчета структуры ударной волны в одноатомном газе предложены модификации уравнений Барнетта, значительно более простые, чем полная система уравнений Барнетта, но обладающие практически такой же точностью. Порядок этих систем уравнений и число необходимых граничных условий такие же, как и системы уравнений Навье – Стокса, в отличие от уравнений Барнетта они устойчивы к коротковолновым возмущениям.

Предложенная система неоднородных уравнений Навье – Стокса, неоднородную часть которых составляют барнеттовы слагаемые, вычисленные по решению обычных (однородных) уравнений Навье – Стокса, дает удовлетворительные результаты при $M_1 \leqslant 2{,}5$.

Система неоднородных усеченных уравнений Барнетта получена из полной системы уравнений Барнетта, в которой старшие производные и член p_{xx}, пропорциональный квадрату первой производной температуры, включены в неоднородную часть, рассчитанную по решению усеченной системы. Такая система дает практически те же результаты, что и полная система, в широком диапазоне чисел Маха (1,5–35).

Анализ проведен для мягких межмолекулярных потенциалов, характерных, например, для молекул азота и кислорода. Для профилей газодинамических величин в ударной волне наибольшее расхождение предложенной системы неоднородных усеченных уравнений Барнетта, как и системы полных уравнений Барнетта, с результатами метода прямого статистического моделирования имеет место в переднем крыле профиля температуры: согласно кинетическому описанию, возмущения температуры проникают гораздо дальше вверх по потоку по сравнению с используемыми макроскопическими описаниями.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01244).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Коган М.Н.* Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.
2. *Cercignani C.* The Boltzmann equation and its applications. N.Y.: Springer, 1988. 455 p.
3. *Ферцигер Дж., Капер Г.* Математическая теория процессов переноса в газах. М.: Мир, 1976. 554 с.
4. *Sherman F.S., Talbot L.* Experiment versus kinetic theory for rarefied gases // Rarefied Gas Dynamics. London: Pergamon Press. 1960. P. 161–191.
5. *Simon C.E., Foch J.D.* Numerical integration of the Burnett equations for shock structure in Maxwell gas // Rarefied Gas Dynamics. N.Y.: AIAA, 1977. V. 1. P. 493–500.
6. *Галкин В.С., Коган М.Н.* К выводу уравнений медленных неизотермических течений газа // Изв. АН СССР. МЖГ. 1979. № 6. С. 77–84.
7. *Струминский В.В., Шавалиев М.Ш.* Гидродинамические уравнения высших приближений метода Чепмена – Энскога // Динамика разреженного газа: Тр. 6-й Всесоюз. конф. Новосибирск: Ин-т теплофизики, 1980. Ч. 1. С. 86–91.
8. *Fiscko K.A., Chapman D.R.* Comparison of Burnett, super-Burnett and Monte Carlo solutions for hypersonic shock structure // Rarefied Gas Dynamics. Washington: AIAA, 1989. V. 3. P. 374–395. (Progress in Astronaut. and Aeronaut. V. 118).
9. *Cheng H.K., Emanuel G.* Perspective on hypersonic nonequlibrium flow // AIAA Journal. 1995. V. 33. № 3. P. 386–400.
10. *Zhong X., MacCormack R.W., Chapman D.R.* Stabilization of the Burnett equations and application to hypersonic flows // AIAA Journal. 1993. V. 31. № 6. P. 1036–1043.
11. *Salomons E., Mareschal M.* Usefulness of the Burnett description of strong shock waves // Phys. Rev. Lett. 1992. V. 69. № 2. P. 269–272.
12. *Chou L.C., Deng Z.-T., Liaw G.-S.* Comparison of shock wave structure by solving Burnett and Boltzmann equations // AIAA Paper. 1994. № 2056. 8 p.
13. *Lumpkin F.E., Chapman D.R.* Accuracy of the Burnett equations for hypersonic real gas flows // AIAA Paper. 1991. № 0171. 17 p.
14. *Макашев Н.К.* О граничных условиях для уравнений газодинамики, соответствующих высшим приближениям в методе Чемпена – Энскога решения уравнения Больцмана // Изв. АН СССР. МЖГ. 1979. № 3. С. 77–87.
15. *Бобылев А.В.* О методах Чемпена – Энскога и Грэда решения уравнения Больцмана // Докл. АН СССР. 1982. Т. 262. № 1. С. 71–75.
16. *Галкин В.С.* Точное решение системы уравнений кинетических моментов второго порядка для двухмасштабного гомоэнергетического аффинного течения одноатомного газа // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 3. С. 156–166.

17. *Zhong X., Furumoto G.H.* Augmented Burnett equation solutions over axisymmetrical blunt bodies in hypersonic flow // J. Spacecraft and Rockets. 1995. V. 32. № 4. P. 588–595.
18. *Foch J.D.* On higher order hydrodynamic theories of shock structure // The Boltzmann equation. Theory and applications. Vienna: Springer, 1973. P. 123–140.
19. *Gilbarg D., Paolucci D.* The structure of shock waves in the continuum theory of fluids. // J. Rat. Mech. Analysis. 1953. V. 2. № 4. P. 617–642.

Москва

Поступила в редакцию
26.XII.1996