

УДК 533.6.011.55 + 532.529

© 1998 г. А.Н. ОСИПЦОВ, М.А. ТЕВЕРОВСКИЙ

ГИПЕРЗВУКОВОЕ ОБТЕКАНИЕ СВЕРХЗВУКОВОГО ДВУХФАЗНОГО ИСТОЧНИКА

Рассматривается взаимодействие однородного гиперзвукового потока газа со сверхзвуковым двухфазным газопылевым источником. В окрестности оси симметрии между внешней и внутренней ударными волнами построено приближенное аналитическое решение для параметров несущей фазы. На основании параметрических численных расчетов исследовано поведение траекторий частиц и распределение их концентрации в ударных слоях как для континуального, так и свободномолекулярного режимов обтекания частиц. Обнаружены возникновение зон многократного пересечения траекторий частиц и образование "слоистых структур" в распределениях концентрации дисперсной фазы – областей накопления частиц вблизи огибающих семейства их траекторий. Исследована зависимость количества слоев высокой концентрации частиц от определяющих параметров.

Исследованию взаимодействия гиперзвукового потока газа со сверхзвуковым источником посвящена обширная литература. Это связано с приложениями в астрофизике (столкновение солнечного ветра с межзвездной средой, испарение ядра кометы [1]), проблемами аэрокосмической техники (истечение из недорасширенного сопла во встречный поток [2]) и рядом технологических процессов (сушка дисперсных материалов во встречных струях). Для ряда приложений (например, моделирования кометных явлений) необходимо учитывать двухфазность потока от источника. Истечение из двухфазного источника в пустоту исследовалось как в сферически-симметричной [3], так и осесимметричной постановках [4]. Взаимодействие двухфазного источника с набегающим потоком газа ранее не рассматривалось. В сталкивающихся потоках газа поведение инерционных частиц может носить колебательный характер, что приводит к возникновению зон многократного пересечения траекторий частиц [5]. Исследования двухфазных течений с такими зонами требуют модификации обычной модели запыленного газа (предполагающей однозначность параметров частиц [6]) и разработки численных алгоритмов с выделением границ областей пересекающихся траекторий частиц и корректным вычислением концентрации дисперсной фазы.

В литературе для расчетов параметров запыленного газа в зонах пересечения траекторий частиц, как правило, используют методы типа "метода крупных частиц" [7] или его модификации. Такие методы фактически игнорируют уравнение неразрывности среды частиц, поскольку основаны на замене "крупной частицей" конечного лагранжева объема дисперсной фазы, что приводит к неудовлетворительной точности при вычислении концентрации частиц. В работе [8] был предложен метод вычисления концентрации частиц, основанный на решении уравнения неразрывности в лагранжевых координатах с привлечением дополнительных уравнений для компонент якобиана перехода от лагранжевых переменных к эйлеровым. Ниже данный метод развит на случай многократных пересечений траекторий частиц. Рассмотрен случай малых массовых концентраций дисперсной фазы. Для окрестности оси симметрии с использованием модели тонкого ударного слоя построено приближенное аналитическое решение, позволяющее определить геометрические характеристики течения и описывающее распределения параметров несущей фазы в области между внешней и внут-

ренной ударными волнами. На основании параметрических численных расчетов исследовано поведение траекторий частиц и распределение их концентрации в ударных слоях как для непрерывного, так и свободномолекулярного режимов обтекания частиц.

1. Газодинамическая модель течения. Рассматривается течение, возникающее в результате взаимодействия сверхзвукового точечного источника запыленного газа с гиперзвуковым потоком чистого газа. Приняты обычные предположения модели запыленного газа [6]: частицы сферические, недеформируемые, их объемная концентрация пренебрежимо мала, а хаотическое движение отсутствует. Несущая фаза и внешний поток – совершенный газ с постоянными показателями адиабаты γ_1 и γ_2 соответственно. Интенсивность источника (расход несущей фазы в единицу времени) Q^* – постоянна. Массовая концентрация частиц считается малой, так что можно пренебречь их влиянием на движение газа и для описания параметров несущей фазы использовать решения, полученные при исследовании течения чистого газа.

Структура течения, возникающая при взаимодействии сверхзвукового источника с гиперзвуковым потоком [1, 2, 9], показана на фиг. 1: в потоке от источника возникает внутренняя ударная волна 1, а во внешнем потоке – ударная волна 2; газы разделены контактной поверхностью 3. Область между внутренней 1 (внешней 2) ударной волной и контактной поверхностью 3 назовем внутренним 1 (внешним 2) ударным слоем. Считаем, что газ, движущийся от источника, вблизи внутренней волны имеет скорость, близкую к максимальной скорости при стационарном истечении. Тогда задача о взаимодействии двух гиперзвуковых потоков может быть рассмотрена в постановке тонких ударных слоев [10].

За характерный линейный размер L^* течения примем расстояние по оси симметрии от источника до контактной поверхности, которое определяется из условия равенства полных давлений в общей критической точке

$$\rho^* V^{*2} = \rho_\infty V_\infty^{*2} \quad (1.1)$$

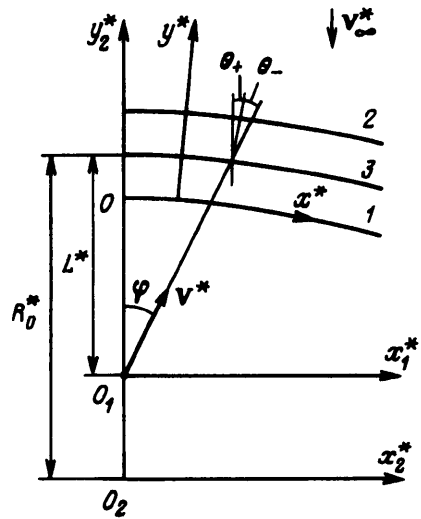
Здесь параметры газа источника перед внутренней волной не имеют индексов, а знак ∞ относится к параметрам набегающего внешнего потока. Звездочками отмечены размерные величины, где их необходимо отличать от соответствующих безразмерных величин.

Из отношения плотностей на внутренней ударной волне имеем

$$\rho^* = \rho_1^* \kappa_1, \quad \kappa_i = \frac{\gamma_i - 1}{\gamma_i + 1} \quad (i = 1, 2)$$

Индексом 1 отмечены параметры в слое между волной 1 и контактной поверхностью; 2 – между контактной поверхностью и волной 2. Используя в критической точке уравнение состояния, равенство давления внешнему скоростному напору (1.1) и сохранение температуры торможения при переходе через ударную волну, получим

$$\rho^* = \frac{\gamma_1 \rho_\infty^* V_\infty^{*2}}{(\gamma_1 + 1) c_{p1} T_{01}^*}$$



Фиг. 1. Схема течения: 1 – внутренняя ударная волна; 2 – ударная волна во внешнем потоке; 3 – контактная поверхность

Здесь c_{p1}, T_{01}^* – удельная теплоемкость при постоянном давлении и температура торможения газа источника. Из уравнений неразрывности и состояния имеем

$$V^* = \frac{Q^*}{4\pi r^* L^{*2}} = \frac{(\gamma_1 + 1) Q^* c_{p1} T_{01}^*}{\gamma_1 \rho_\infty^* V_\infty^{*2} 4\pi L^{*2}}$$

Подставляя последние два выражения в (1.1), получим

$$L^* = \sqrt{\frac{Q^*}{\rho_\infty^* V_\infty^{*2}}} \sqrt{\frac{(\gamma_1 + 1)}{4\pi\gamma_1} c_{p1} T_{01}^*} = \sqrt{\frac{Q^* V_{\max}^*}{\rho_\infty^* V_\infty^{*2}}} \sqrt{\frac{(\gamma_1 + 1)}{8\pi\gamma_1}} \quad (1.2)$$

Здесь V_{\max}^* – максимальная скорость истечения газа от источника. Полученный характерный размер совпадает в гиперзвуковом приближении с масштабом течения, рассмотренного в [2].

Найдем асимптотическую форму контактной поверхности. Выберем полярную систему координат с полюсом в источнике. В нулевом приближении тонкого ударного слоя ($\delta_i^*/L^* \rightarrow 0, i = 1, 2, \delta_i^*$ – толщина i -го ударного слоя на оси симметрии) ударные волны 1 и 2 совпадают с контактной поверхностью 3. Форму контактной поверхности определим из условия равенства давлений с обеих ее сторон. В силу гиперзвукового характера течения для распределения давления на внешней (плюс) и внутренней (минус) сторонах (фиг. 1) примем закон Ньютона

$$p_+^* = \rho_\infty^* V_\infty^{*2} \cos^2 \theta_+, \quad p_-^* = \rho^* V^{*2} \cos^2 \theta_- \quad (1.3)$$

Здесь θ_+, θ_- – углы между векторами скоростей внешнего и внутреннего потоков и нормалью к контактной поверхности соответственно; $\rho^* = \rho^*(\varphi), V^* = V^*(\varphi)$ – плотность и скорость потока от источника, заданные в точках поверхности 3 как функции полярного угла φ . Учет центробежных сил при задании давления приводит к незначительному изменению положения контактной поверхности [2]. Далее, положим скорость газа на внутренней стороне поверхности 3 равной V_{\max}^* . Тогда в этом же приближении

$$\rho^*(\varphi) = \rho^*(0) L^{*2} / r^{*2} \quad (1.4)$$

Здесь $r^* = r^*(\varphi)$ – уравнение контактной поверхности. Полагая $p_+^* = p_-^*$, из (1.3) с учетом (1.4) и (1.1) получим для $r = r^*/L^*$

$$\frac{1}{r} = \frac{\cos \theta_+}{\cos \theta_-} \quad (1.5)$$

Выразим углы θ_+ и θ_- через полярный угол φ . Из определения производной в полярной системе координат и геометрических соображений имеем

$$\theta_+ = \varphi + \beta - \frac{\pi}{2}, \quad \theta_- = \frac{\pi}{2} - \beta, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{r}{r'}$$

Тогда из (1.5) после элементарных преобразований получим для формы контактной поверхности

$$\begin{aligned} r' \sin \varphi + r \cos \varphi &= 1, \quad r(0) = 1 \\ r &= \varphi / \sin \varphi \end{aligned} \quad (1.6)$$

Аналогичное уравнение выведено в [2] для источника с переменной по φ интенсивностью.

Согласно (1.6), в окрестности оси симметрии (при малых φ) уравнения для контактной поверхности и ее безразмерный радиус кривизны $R = R^*/L^*$ представим в виде $r = 1 + 1/6\varphi^2$, $R = 3/2 - 1/8\varphi^2$. Отсюда $R_0^* = R^*(0) = 3L^*/2$. Уравнение контактной поверхности в декартовой системе координат x_1y_1 с центром в источнике O_1 имеет вид

$$y_1 = 1 - 1/3x_1^2, \quad x_1 = x_1^*/L^*, \quad y_1 = y_1^*/L^* \quad (1.7)$$

Найдем приближенное аналитическое представление полей газодинамических параметров между ударными волнами 1 и 2 в окрестности оси симметрии. Ограничимся главными приближениями по малому параметру $(\delta_1^* + \delta_2^*)/L^*$ и главными членами разложения по продольной координате.

Во внешнем ударном слое 2 воспользуемся решением [10] для окрестности оси симметрии тупого тела, обтекаемого однородным гиперзвуковым потоком. В рассматриваемом случае роль обтекаемого тела играет контактная поверхность. Решение построено в приближении тонкого ударного слоя с постоянной плотностью, равной предельному значению $\rho_\infty^* x_2^{-1}$. В системе координат, связанной с контактной поверхностью, где ось x направлена по образующей, а y – по нормали, решение имеет вид [10]:

$$v = -\kappa_2 f_0(\zeta), \quad u = \frac{\kappa_2}{2\delta_2} f_0'(\zeta)x, \quad f_0 = \frac{2e}{1+e}\zeta + \frac{1-e}{1+e}\zeta^2 \quad (1.8)$$

$$\zeta = \frac{y}{\delta_2}, \quad e = \sqrt{\frac{8}{3}\kappa_2}, \quad \delta_2 = \kappa_2\lambda, \quad \lambda = \frac{1}{1+e}$$

Здесь δ_2 – толщина ударного слоя. Координаты x^* , y^* и толщина слоя δ_2^* отнесены к радиусу кривизны контактной поверхности в критической точке, компоненты скорости u и v – к величине скорости набегающего потока. В рассматриваемом приближении в качестве радиуса кривизны используется значение $R_0^* = 3L^*/2$.

Приближенное решение в слое 1 рассматривалось в [2, 11], однако требуемые для целей данной работы аналитические представления газодинамических параметров получены не были. Течение в слое 1 можно рассматривать как течение газа, вдвухаемого с поверхности тела (совпадающего в данном случае с внутренней ударной волной 1) в набегающий гиперзвуковой поток. Ранее приближенные решения двухслойного течения идеального газа при вдуве с поверхности затупленного тела в сверхзвуковом потоке были построены в [12].

Используя асимптотический подход [12], построим решение во внутреннем ударном слое, дающее явные выражения для параметров газа в окрестности оси симметрии. Поместим начало системы координат в т. O (фиг. 1), ось x^* направим вдоль поверхности волны 1, а y^* – по нормали к ней. Введем малый параметр ϵ_1 , пропорциональный безразмерной толщине слоя 1 на оси симметрии $\epsilon_1 \sim \delta_1^*/R_0^*$. Анализ порядка величин в слое 1 позволяет ввести следующие безразмерные переменные:

$$x = \frac{x^*}{R_0^*}, \quad Y = \frac{y^*}{\epsilon_1 R_0^*}, \quad R = \frac{R^*}{R_0^*}, \quad r_e = \frac{r_e^*}{R_0^*}, \quad \delta_1 = \frac{\delta_1^*}{\epsilon_1 R_0^*}$$

$$u = \frac{\epsilon_1 u^*}{v_{1c}^*}, \quad v = \frac{v^*}{v_{1c}^*}, \quad \rho = \frac{\rho^*}{\rho_{1c}^*}, \quad p = \frac{p^*}{\rho_\infty^* V_\infty^{*2}}$$

Здесь индексом c отмечены параметры газа сразу за ударной волной 1 на оси симметрии, $R^* = R^*(x^*)$ – радиус кривизны волны 1, r_e^* – расстояние от рассматриваемой

точки до оси симметрии. Тогда уравнения движения газа принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u r_e) + \frac{\partial}{\partial Y}(\rho v r_e z) = 0$$

$$z u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\varepsilon_1 u v}{R + \varepsilon_1 Y} = -\frac{K}{\rho} z \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1.9)$$

$$\varepsilon_1^2 \left(z u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial Y} \right) - \frac{\varepsilon_1 u^2}{R + \varepsilon_1 Y} = -\frac{K}{\rho} \frac{\partial p}{\partial Y}$$

$$z \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho^{\gamma_1}} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{p}{\rho^{\gamma_1}} \right) = 0$$

$$z = \frac{R + \varepsilon_1 Y}{R}, \quad K = \frac{\varepsilon_1^2 \rho_\infty^* V_\infty^{*2}}{\rho_{1c}^* V_{1c}^{*2}}, \quad \varepsilon_1 = \frac{v_{1c}^*}{V_\infty^*} \sqrt{\frac{\rho_{1c}^*}{\rho_\infty^*}}$$

Здесь малый параметр ε_1 определен из условия $K = 1$. Оставляя главные члены по ε_1 в (1.9), получим для тонкого ударного слоя

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u r_e) + \frac{\partial}{\partial Y}(\rho v r_e) = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial Y} = 0 \quad (1.10)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial Y} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho^{\gamma_1}} \right) + v \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{p}{\rho^{\gamma_1}} \right) = 0$$

$$Y = 0: \quad \rho = \rho_w(x), \quad u = u_w(x), \quad v = v_w(x) \quad (1.11)$$

$$Y = \delta_1: \quad v_n = 0, \quad p = \cos^2 \theta_+$$

Здесь θ_+ , как и выше, есть угол между V_∞^* и внешней нормалью к контактной поверхности, причем, так как в уравнениях (1.10), (1.11) пренебрегается членами $\sim \varepsilon_1$, при вычислении θ_+ и задании u_w, v_w можно использовать полученное предельное уравнение контактной поверхности (1.7).

В окрестности оси симметрии ищем решение в виде

$$u = u_1(Y)x + \dots, \quad v = v_0(Y) + \dots, \quad r_e = x + \dots, \quad \rho = \rho_0(Y) + \dots, \quad p = 1 - p_2 x^2 + \dots \quad (1.12)$$

Подставляя эти разложения в (1.10) и (1.11), получаем, что $\rho_0 \equiv 1$, а для $v_0(Y)$ и $u_0(Y)$ имеем задачу Коши

$$v_0' + 2u_1 = 0, \quad u_1' v_0 + u_1^2 - a = 0$$

$$u_1(0) = b, \quad v_0(0) = 1$$

Здесь $a = 2p_2$, значения констант a и b будут определены ниже. Решение имеет вид

$$v_0(Y) = \frac{((a - b^2)Y + b)^2 - a}{b^2 - a}, \quad u_1(Y) = (a - b^2)Y + b \quad (1.13)$$

Из условия $v_0(\delta_1) = 0$ находим $\delta_1 = (\sqrt{a} + b)^{-1}$.

Для нахождения b воспользуемся условием сохранения касательной компоненты скорости газа $V_{\tau-}^*$ на скачке l , форма которого в рассматриваемом приближении совпадает с формой контактной поверхности. В декартовой системе координат x_1, y_1 с центром в источнике O_1 имеем $V_{\tau-}^* = V_{\max}^* (\mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\tau})$, где $\mathbf{l}, \boldsymbol{\tau}$ – единичные векторы,

направленные по радиусу-вектору и по касательной к поверхности скачка l соответственно. Введем единичный вектор нормали \mathbf{n} к поверхности скачка. Для формы поверхности, заданной уравнением (1.7), с точностью до членов более высокого порядка малости по x_1 имеем

$$\mathbf{n} = \left\{ \frac{2}{3} x_1, 1 - \frac{2}{9} x_1^2 \right\}, \quad \boldsymbol{\tau} = \left\{ 1 - \frac{2}{9} x_1^2, -\frac{2}{3} x_1 \right\}, \quad \mathbf{l} = \left\{ x_1, 1 - \frac{1}{3} x_1^2 \right\}$$

Отсюда получаем $V_{\tau}^* = V_{\max}^* x_1 / 3$. Переходя к координате x , отнесенной к радиусу кривизны скачка l на оси симметрии (с точностью до главных членов декартова координата x совпадает с координатой, отсчитываемой вдоль поверхности скачка), имеем $V_{\tau}^* = 1/2 V_{\max}^* x$.

Касательная компонента скорости за скачком имеет вид $V_{\infty}^* \sqrt{\rho_{\infty}^* / \rho_{1c}^*} b x$. Сравнивая с V_{τ}^* , получим

$$b = \frac{V_{\max}^*}{2V_{\infty}^*} \sqrt{\chi \kappa_1^{-1}} = \frac{1}{2\sqrt{\kappa_1}}, \quad \chi = \frac{\rho^*(0)}{\rho_{\infty}^*}, \quad \kappa_1 = \frac{\rho^*(0)}{\rho_{1c}^*}$$

Здесь $\rho^*(0)$ – плотность на оси симметрии непосредственно перед скачком l .

Для определения a получим выражение для $\cos \theta_+$, входящего в граничные условия (1.11). Из геометрических соображений имеем $\cos \theta_+ = (\mathbf{V}_{\infty}^* \cdot \mathbf{n}) / V_{\infty}^*$. Отсюда с точностью до главных членов по x следует соотношение $\cos^2 \theta_+ = 1 - x^2$.

Сравнивая выражения для распределения давления из (1.11) и (1.12), получим $a = 2$.

2. Постановка задачи для двухфазного течения. Перед скачком l дисперсные частицы "вморожены" в несущую фазу, т.е. движутся по радиусам со скоростью и температурой газа. Инерционные свойства частиц проявляются за фронтом скачка [6]. Пересекая поверхность фронта ударной волны, частицы сохраняют свои скорость и температуру. Параметры газа на обеих сторонах фронта связаны соотношениями Рэнкина–Гюгонио [13]. Движение частицы за ударной волной сопровождается релаксацией ее скорости и температуры к местным параметрам несущей фазы. При этом в зависимости от инерционных свойств, частица способна пересекать (в том числе неоднократно) поверхности сильных разрывов.

Движение газа и частиц рассматривается в криволинейных координатах, связанных с поверхностью внутренней ударной волны (фиг. 1), в следующих безразмерных переменных:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x^*}{R_0^*}, \quad y = \frac{y^*}{\kappa_2 R_0^*}, \quad R = \frac{R^*}{R_0^*}, \quad r_e = \frac{r_e^*}{R_0^*}, \quad u = \frac{u^*}{V_{\infty}^*} \\ v &= \frac{v^*}{V_{\infty}^*}, \quad u_s = \frac{u_s^*}{V_{\infty}^*}, \quad v_s = \frac{v_s^*}{V_{\infty}^*}, \quad \rho = \frac{\rho^*}{\rho_{\infty}^*}, \quad p = \frac{p^*}{\rho_{\infty}^* V_{\infty}^{*2}} \\ \mu &= \frac{\mu^*}{\mu_{02}^*}, \quad T = \frac{T^* 2c_{p2}}{V_{\infty}^{*2}}, \quad \rho_s = \frac{\rho_s^*}{\rho_s^*(0)}, \quad T_s = \frac{T_s^* 2c_{p2}}{V_{\infty}^{*2}} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь μ_{02}^* – вязкость газа в точке торможения во внешнем ударном слое; $T_{02}^* = V_{\infty}^{*2} / 2c_{p2}$ – температура торможения газа при гиперзвуковой скорости; индексом 1 отмечены параметры газа во внутреннем ударном слое, индексом 2 – во внешнем; индексом s обозначены параметры частиц.

Уравнения движения дисперсной фазы, записанные в лагранжевых координатах

(x_0, t) , принимают вид $(t = t^* V_\infty^* / R_0^* - \text{безразмерное время движения частицы вдоль траектории; } x_0 - \text{начальная координата траектории частицы на внутренней ударной волне)}$

$$\frac{dx_s(x_0, t)}{dt} = \frac{u_s}{H_s}, \quad \frac{dy_s(x_0, t)}{dt} = \frac{v_s}{\kappa_2}$$

$$\frac{du_s(x_0, t)}{dt} = F_{sx} - \frac{u_s v_s}{RH_s}, \quad \frac{dv_s(x_0, t)}{dt} = F_{sy} - \frac{u_s^2}{RH_s}$$

$$\frac{\partial T_s(x_0, t)}{\partial t} = \frac{2}{3} \beta \frac{c_p / c_s}{Pr} \mu D (T - T_s) \quad (2.2)$$

$$F_s = \beta \mu G(\mathbf{v} - \mathbf{v}_s), \quad \beta = \frac{6\pi\sigma\mu_{02}^* R_0^*}{mV_\infty^*}, \quad H_s = 1 + \frac{\kappa_2 y_s}{R}$$

Здесь $\beta = R_0^* / l_v^*$ – параметр релаксации; l_v^* – характерная длина релаксации скорости частицы при континуальном обтекании; F_{sx}, F_{sy} – компоненты силы F_s , действующей на частицу; $Pr = c_p \mu^* / \lambda^*$ – число Прандтля; σ, m – радиус и масса частицы соответственно; λ^* – коэффициент теплопроводности газа; $R = R(x_0), r_w = r_w(x_0)$ – радиус кривизны и расстояние от оси симметрии до поверхности внутренней ударной волны соответственно.

Поправочные функции $G = G(Re_s, M_s)$ и $D = D(Re_s, M_s, Pr)$ учитывают конечность чисел Рейнольдса Re_s и Маха M_s обтекания частицы в законах межфазного трения и теплообмена [14]

$$G = \left(1 + \frac{1}{6} Re_s^{2/3}\right) \left[1 + \exp\left(-\frac{0,427}{M_s^{4,63}}\right) \exp\left(-\frac{3}{Re_s^{0,88}}\right)\right] \times$$

$$\times \left(1 + \frac{M_s}{Re_s} \left[3,82 + 1,28 \exp\left(-1,25 \frac{Re_s}{M_s}\right)\right]\right)^{-1} \quad (2.3)$$

$$D = (1 + 0,3 Re_s^{1/2} Pr^{1/3}) \left[1 + 3,42 \frac{M_s}{Re_s} \frac{1 + 0,3 Re_s^{1/2} Pr^{1/3}}{Pr}\right]^{-1} \quad (2.4)$$

$$Re_s = Re_0 \frac{\rho |\mathbf{v} - \mathbf{v}_s|}{\mu}, \quad Re_0 = \frac{2\sigma\rho_\infty^* V_\infty^*}{\mu_{02}}, \quad M_s = \frac{|\mathbf{v} - \mathbf{v}_s|}{\sqrt{\gamma p / \rho}}$$

В задачах космической газодинамики [1, 9] частицы дисперсной фазы обтекаются в свободномолекулярном режиме. Соответствующее этому режиму выражение для силы F_s имеет вид

$$F_s = \frac{3\sqrt{\pi}}{16} \beta_r \rho (R_g T)^{1/2} G_r (\mathbf{v} - \mathbf{v}_s), \quad \beta_r = \frac{8\sqrt{2\pi R_{g2}^* T_{02}} \rho_\infty^* \sigma^2 R_0^*}{3m_s V_\infty^*} \quad (2.5)$$

$$R_g = \frac{\gamma_2 (\gamma_1 - 1) c_{p1}}{\gamma_1 (\gamma_2 - 1) c_{p2}} \quad (y_s \leq \delta_1), \quad R_g = 1 \quad (y_s > \delta_1)$$

Здесь $\beta_r = R_0^* / l_{vr}^*$; l_{vr}^* – характерная длина релаксации скорости частицы при свободномолекулярном обтекании; $R_g = R_{gi}^* / R_{g2}^*$ – газовая постоянная ($i = 1, 2$); $G_r = G_r(S)$ – поправочная функция в свободномолекулярном режиме

$$G_r(S) = \frac{4S^4 + 4S^2 - 1}{2S^3} \operatorname{erf} S + \frac{2S^2 + 1}{\sqrt{\pi}S^2} \exp(-S^2) \quad (S > S_0)$$

$$G_r(S) = \frac{16}{3\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{1}{5} S^2 \right) \quad (S \leq S_0)$$

$$S = \sqrt{\frac{\gamma_2}{(\gamma_2 - 1)R_g T}} |\mathbf{v} - \mathbf{v}_s|, \quad \operatorname{erf} S = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^S e^{-t^2} dt$$

Выражение для F_s с первой формулой в функции $G_r(S)$ есть стандартная запись для силы сопротивления сферической частицы с коэффициентом сопротивления при свободномолекулярном обтекании [15]. Как показал анализ, использование этого выражения во всем диапазоне изменения S приводит к росту погрешностей вычислений при приближении частицы к состоянию равновесия с несущей фазой, а следовательно, к искажению параметров движения частицы. Поэтому в области малых относительных скоростей обтекания частицы используется асимптотическое (при $S \rightarrow 0$) явное выражение для силы сопротивления (вторая формула в $G_r(S)$). Переход ($S = S_0$) от стандартного выражения к асимптотическому определяется в ходе специальных методических расчетов.

При расчете свободномолекулярного обтекания для простоты использована схема зеркального отражения молекул от поверхности частицы. В этом случае $T_s = \text{const}$ и уравнение теплообмена отсутствует. Поэтому общее выражение для теплового потока к частице не приводится.

Выведем уравнение неразрывности дисперсной фазы в лагранжевых координатах (x_0, t) . Соответствующее уравнение в безразмерном виде в криволинейных эйлеровых координатах (x, y) (фиг. 1) имеет вид

$$\frac{\partial(\rho_s u_s r_e)}{\partial x} + \frac{1}{\kappa_2} \frac{\partial(\rho_s v_s r_e H)}{\partial y} = 0, \quad H = 1 + \frac{\kappa_2 y}{R}$$

Введем функцию тока среды частиц $\Psi_s = \Psi_s(x, y)$

$$\frac{\partial \Psi_s}{\partial x} = -\rho_s v_s r_e H, \quad \frac{\partial \Psi_s}{\partial y} = \rho_s u_s r_e$$

Функции тока в эйлеровых и лагранжевых координатах связаны соотношением $\Psi_s(x, y) = \Psi_s(x_0)$. Дифференцируя его по x_0 и учитывая граничное условие на внутренней ударной волне, получаем

$$-\rho_s v_s r_e H \frac{\partial x_s}{\partial x_0} + \rho_s u_s r_e \frac{\partial y_s}{\partial x_0} = -\rho_s v_{s0} r_w$$

Здесь $\rho_{s0} = \rho_s(x_0, 0)$, $v_{s0} = v_s(x_0, 0)$ – распределения плотности и скорости дисперсной фазы на поверхности внутреннего скачка соответственно. Отсюда следует связь начальной ρ_{s0} и текущей $\rho_s(x_0, t)$ плотностей среды частиц вдоль фиксированной траектории $(x_s(x_0, t), y_s(x_0, t))$ частицы

$$\frac{\rho_s(x_0, 0)}{\rho_s(x_0, t)} = \frac{r_e(x_s, y_s)}{r_w(x_0)} \left(H_s \frac{v_s(x_0, t)}{v_s(x_0, 0)} \frac{\partial x_s(x_0, t)}{\partial x_0} - \kappa_2 \frac{u_s(x_0, t)}{v_s(x_0, 0)} \frac{\partial y_s(x_0, t)}{\partial x_0} \right) \quad (2.6)$$

В уравнение неразрывности среды частиц входят элементы якобиана перехода от лагранжевых координат к эйлеровым. Для их вычисления вводятся дополнительные функции [16]

$$W_1 = \frac{\partial x_s(x_0, t)}{\partial x_0}, \quad W_2 = \frac{\partial u_s(x_0, t)}{\partial x_0}, \quad W_3 = \frac{\partial y_s(x_0, t)}{\partial x_0}, \quad W_4 = \frac{\partial v_s(x_0, t)}{\partial x_0}$$

Уравнения для этих функций получают дифференцированием по x_0 первых че-

тырех уравнений (2.2) и имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_1(x_0, t)}{\partial t} &= \frac{W_2}{H_s} + \frac{\kappa_2 u_s (y R^1 - R W_3)}{R^2 H_s^2} \\ \frac{\partial W_2(x_0, t)}{\partial t} &= \beta \mu G \left(W_1 \frac{\partial u}{\partial x} + W_3 \frac{\partial u}{\partial y} - W_2 \right) + \beta (u - u_s) \frac{\partial(\mu G)}{\partial x_0} - \\ &\quad - \frac{u_s W_4 + v_s W_2}{R H_s} + \frac{u_s v_s (R' + \kappa_2 W_3)}{R^2 H_s^2} \\ \frac{\partial W_3(x_0, t)}{\partial t} &= \frac{W_4}{\kappa_2} \\ \frac{\partial W_4(x_0, t)}{\partial t} &= \beta \mu G \left(W_1 \frac{\partial v}{\partial x} + W_3 \frac{\partial v}{\partial y} - W_4 \right) + \beta (v - v_s) \frac{\partial(\mu G)}{\partial x_0} + \frac{2 u_s W_2}{R H_s} - \frac{u_s^2 (R' + \kappa_2 W_3)}{R^2 H_s^2} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь $R' = R'(x_0)$. Выражение для производной $\partial(\mu G)/\partial x_0$ имеет достаточно громоздкий вид и здесь не приводится.

Распределение параметров несущей фазы в безразмерных переменных (2.1) для внутреннего и внешнего ударных слоев и потоков имеет вид $0 < y < \delta_1$:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{2}{1 + 2\sqrt{2\kappa_1}} \frac{\kappa_1}{\kappa_2}, \quad u = \frac{x}{\sqrt{\chi}} \left(\left(2\kappa_1 - \frac{1}{4} \right) \frac{\kappa_2}{\kappa_1} y + \frac{1}{2} \right) \\ v &= \frac{\kappa_1}{\sqrt{\chi}} \left(\left(\frac{1}{4} - 2\kappa_1 \right) \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1} y \right)^2 - \frac{\kappa_2}{\kappa_1} y + 1 \right), \quad \rho = \frac{\chi}{\kappa_1}, \quad p = 1 \\ \mu &= \frac{\mu_{01}^*}{\mu_{02}^*} \left(\frac{c_{p1}}{c_{p2}} \chi T \right)^{\omega_1}, \quad T = \left(\frac{c_{p1}}{c_{p2}} \frac{\gamma_1 - 1}{2\gamma_1} \right)^{-1} \frac{p}{\rho} \end{aligned} \quad (2.8)$$

$\delta_1 < y \leq \delta_1 + \delta_2$:

$$\begin{aligned} u &= (e + (1-e)\zeta)x, \quad v = -\kappa_2 \left(\frac{2e}{1+e} \zeta + \frac{1-e}{1+e} \zeta^2 \right) \\ \delta_2 &= \frac{1}{1 + \sqrt{8\kappa_2/3}}, \quad \zeta = \frac{y - \delta_1}{\delta_2}, \quad e = \sqrt{\frac{8}{3}} \kappa_2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{\kappa_2}, \quad p = 1, \quad \mu = T^{\omega_2}, \quad T = \left(\frac{\gamma_2 - 1}{2\gamma_2} \right)^{-1} \frac{p}{\rho} \\ u &= \frac{x}{\sqrt{\chi}}, \quad v = \frac{1}{\sqrt{\chi}}, \quad \rho = \chi, \quad p = \frac{1}{\gamma_1 M_-^2}, \quad T_- = \frac{c_{p2}}{c_{p1}} \frac{2}{\gamma_1 - 1} \frac{1}{\chi} \frac{1}{M_-^2} \end{aligned} \quad (2.10)$$

$y > \delta_1 + \delta_2$:

$$u = x, \quad v = -1, \quad \rho = 1, \quad p = \frac{1}{\gamma_2 M_\infty^2}, \quad T_\infty = \frac{2}{\gamma_2 - 1} \frac{1}{M_\infty^2} \quad (2.11)$$

Начальные условия для систем (2.2), (2.7) ставятся на внутренней ударной волне

$$t = 0: \quad x_s = x_0, \quad y_s = 0, \quad u_s = \frac{x_0}{2\sqrt{\chi}}, \quad v_s = \frac{1}{\sqrt{\chi}}, \quad T_s = T_-, \quad W_1 = 1, \quad (2.12)$$

$$W_2 = \frac{1}{2\sqrt{\chi}}, \quad W_3 = W_4 = 0$$

Кроме начальных условий необходимо задать распределение плотности среды частиц на внутреннем скачке $\rho_s(x_0, 0)$ для уравнения (2.6) и радиус кривизны скачка $R(x_0)$: $\rho_s(x_0, 0) = 1$, $R(x_0) = 1 + \frac{3}{2}x_0^2$.

В соответствии с условиями (2.12) в распределении $\rho_s(x_0, 0)$ оставлен только главный член. В выражении для $R(x_0)$ удержан член $\sim x_0^2$, определяющий главный член производной R' , которая присутствует в уравнениях (2.7).

3. Обсуждение результатов численных расчетов. Расчеты были проведены в постановке (2.2)–(2.12) для случаев обтекания частицы континуальным и свободномолекулярным (2.5) потоками газа соответственно. Для интегрирования системы дифференциальных уравнений использовался метод Кутты – Мерсона с автоматическим выбором шага.

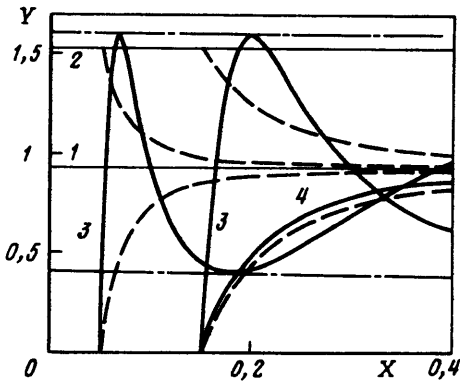
Параметрами подобия задачи являются: для несущей фазы – γ_1 , γ_2 , χ , ω_1 , ω_2 , c_{p1}/c_{p2} , μ_{01}^*/μ_{02}^* ; для дисперсной – а) β , R_b , c_{p1}/c_s ($i = 1, 2$), Pr; б) β_r , R_g , ($R_b = \frac{1}{6}Re_0^{2/3}$). Параметры а) соответствуют континуальному обтеканию частицы; б) – свободномолекулярному обтеканию при зеркальном отражении молекул от поверхности частицы. Инерционные свойства частиц определяются параметрами β , R_b и β_r . В распределения несущей фазы (2.10), (2.11) и начальные условия (2.12) входят числа Маха M_- , M_∞ газа перед внутренней (на оси) и внешней ударными волнами соответственно. В таблицу параметров подобия они не включены, так как в постановке $M_- \gg 1$, $M_\infty \gg 1$ поле несущей фазы в ударных слоях 1, 2 (фиг. 1) от них не зависит. Конечные значения числам Маха даны лишь для удобства проведения расчетов.

Численные расчеты были проведены при следующих значениях параметров подобия: $\gamma_1 = \gamma_2 = 1, 4$; $\chi = c_{p1}/c_{p2} = \mu_{01}/\mu_{02} = 1$; $\omega_1 = \omega_2 = 0,5$; $M_- = 10$; $M_\infty = 4$; $c_{p1}/c_s = c_{p2}/c_s = 1$; Pr = 2/3; $R_g = 1$. Варьировались параметры β , R_b и β_r . Границы расчетной области вдоль образующей внутренней ударной волны составляли $0 \leq x \leq 0,4$. Численное интегрирование выполнено с относительной точностью 0,001%.

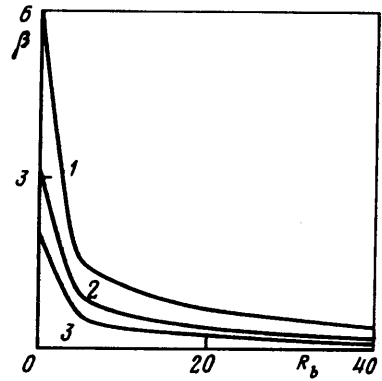
На фиг. 2 представлены линии тока (штриховые линии) газа и траектории частиц (сплошные линии) при $R_b = 100$, $\beta = 0,008$ (кривые 3) $\beta = 1$ (кривая 4) в расчетной области. Расчеты показали, что в зависимости от значения инерционных параметров частиц возможны два типа движения: частицы движутся в слое вдува по монотонным траекториям (кривые 4), асимптотически приближаясь к контактной поверхности (кривая 1); частицы совершают колебания, пересекая (в том числе неоднократно) контактный разрыв, а затем приближаются к нему (кривые 3). В точках поворота v_s становится равной нулю, а плотность среды частиц обращается в бесконечность. При фиксированных значениях инерционных параметров и изменении начальной координаты частицы $x_0 \in [0; 0,4]$ ординаты точек поворота на траектории частицы практически остаются без изменений.

Геометрическое место точек i -х поворотов на траекториях (штрих-пунктирные линии на фиг. 2) представляет собой поверхность бесконечной плотности среды частиц ($i = 1, \dots, n$). Физически это означает, что окрестности таких поверхностей являются зонами накопления дисперсных частиц. Зоной накопления является также окрестность контактной поверхности, где оказываются частицы после релаксации в поле несущей фазы. Однако накопление дисперсной фазы в окрестности контактного разрыва более слабое за счет пространственного растекания. Зоны накопления частиц расположены почти эквидистантно контактной поверхности.

Между зонами накопления происходят многократные пересечения траекторий частиц, что представляет значительные трудности при расчете плотности дисперсной фазы в эйлеровом подходе. Использованный в настоящей работе метод позволил преодолеть проблемы, связанные с неоднозначностью параметров частиц в областях пересечения траекторий.



Фиг. 2. Линии тока (штриховые линии) газа и траектории частиц (сплошные линии) ($R_b = 100$) 1 – контактная поверхность; 2 – внешний скачок; 3 – $\beta = 0,008$; 4 – $\beta = 1$

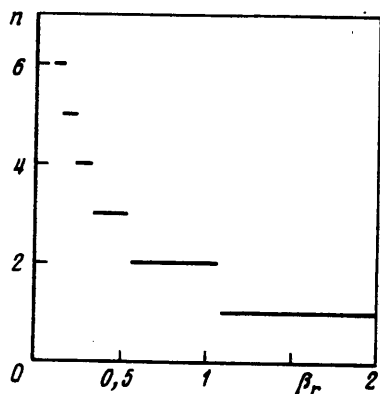


Фиг. 3. Границы областей существования n зон накопления при непрерывном обтекании частицы. Область выше n -й кривой соответствует наличию n зон накопления частиц ($n = 1, 2, 3$)

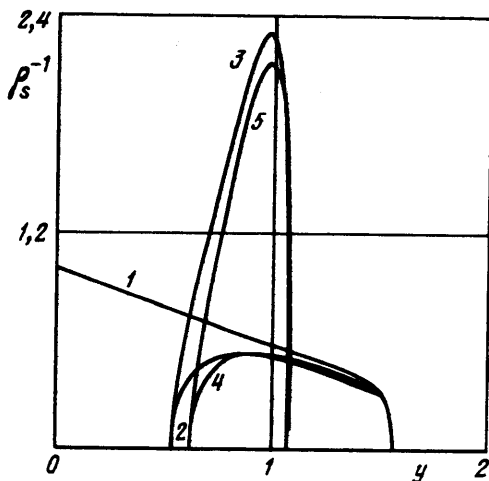
На фиг 3, 4 показаны границы областей существования n зон накопления (в плоскости параметров (R_b, β)) при непрерывном и (как функция параметра β_r) при свободномолекулярном обтекании частицы соответственно. На фиг. 3 область выше n -й кривой соответствует наличию n зон накопления частиц ($n = 1, 2, 3$). Как показали расчеты, в широком диапазоне изменения инерционных параметров ($R_b \in [0, 100]$) контактная поверхность является единственной зоной накопления частиц. Частицы в этом случае движутся по траекториям первого типа, не выходя за границы внутреннего ударного слоя. Области существования числа зон с $n > 1$ существенно более узкие, и расстояние между их границами быстро уменьшается с увеличением R_b . Частицы в этом случае совершают неоднократные колебания и накапливаются в окрестности контактной поверхности. Все сказанное выше относится и к режиму свободномолекулярного обтекания частицы (фиг. 4), с тем лишь отличием, что здесь число зон накопления есть функция одного параметра β_r .

Для вычисления плотности дисперсной фазы в рассматриваемой области эйлеровых координат были выделены континуумы, состоящие из частиц, траектории которых не пересекаются. Распределения плотности каждого из таких континуумов в поперечных сечениях расчетной области $x = 0; 0,1$ и $0,4$ для непрерывного ($\beta = 0,01, R_b = 100$) и свободномолекулярного ($\beta_r = 0,15$) режимов обтекания частицы приведены соответственно на фиг. 5 и 6. Кривая 1 соответствует распределению плотности континуума частиц, движущихся от внутренней ударной волны до первого поворота ($x = 0; 0,1; 0,4$). Кривые 2 ($x = 0; 0,1$) и 4 ($x = 0,4$) соответствуют континууму частиц, движущихся после первого до второго поворота. Кривые 3 ($x = 0$) и 5 ($x = 0,4$) соответствуют частицам, движущимся после второго до третьего поворота. Как показали расчеты, вклад остальных континуумов в суммарную плотность дисперсной фазы пренебрежимо мал.

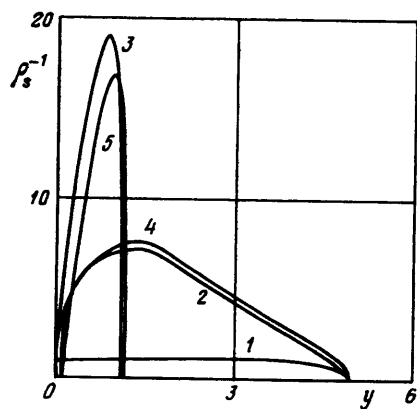
Для выделения указанных континуумов использовался следующий алгоритм: начальная координата частиц x_0 уменьшается от значения абсциссы выбранного сечения до тех пор, пока ординаты точек пересечения соответствующих траекторий с линией $x = \text{const}$ монотонно увеличиваются или уменьшаются. Нарушение монотонного изменения ординат означает переход к следующему континууму, траектории частиц которого пересекают траектории рассматриваемого. Дальнейшее уменьшение начальной координаты выделяет новый континуум частиц и т.д. В данной работе границы континуумов частиц определены с точностью до $0,01$.



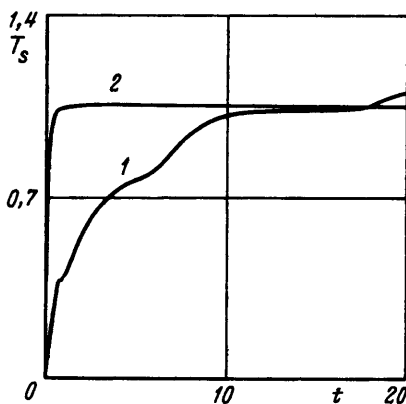
Фиг. 4. Количество зон накопления n при свободномолекулярном обтекании частицы



Фиг. 5. Распределение плотности дисперсной фазы при непрерывном обтекании частицы ($\beta = 0,01$, $R_b = 100$). Поток от внутреннего скачка до первого поворота: 1 - $x = 0, 0,1, 0,4$; после первого и до второго поворота: 2 - $x = 0, 0,1, 4 - x = 0, 4$; после второго и до третьего поворота: 3 - $x = 0, x = 0,1, 5 - x = 0,4$



Фиг. 6. Распределение плотности дисперсной фазы при свободномолекулярном обтекании частицы ($\beta_r = 0,15$). Обозначения см. на фиг. 5



Фиг. 7. Температура частицы, движущейся на оси симметрии ($R_b = 100$): 1 - $\beta = 0,01$; 2 - $\beta = 1$

При расчетах $\rho_s(x_0, t)$ бралось абсолютное значение правой части соотношения (2.6), что автоматически учитывает изменение знака ψ_s при переходе от одного континуума ("исчезающего" на огибающей траекторий) к следующему, появляющемуся континууму.

Расчеты показали, что во всех рассмотренных сечениях распределения плотности первого континуума одинаковы (кривые 1 на фиг. 5, 6). Этот вывод распространяется и на второй континуум частиц в сечениях $x = 0; 0,1$ (кривые 2 на фиг. 5, 6). В сечениях $x = 0,1$ и $0,4$ плотность частиц третьего континуума уменьшается (кривые 4 и 5) за счет влияния растекания.

На фиг. 7 показано поведение температуры частиц $T_s(t)$, движущихся вдоль оси симметрии при $R_b = 100$. Холодные частицы нагреваются до температуры, близкой к температуре торможения внешнего гиперзвукового потока газа. Темп нагрева зависит от типа траектории частицы. Для частиц, совершающих многократные колебания (кривая 1), скорость подъема температуры разная на различных участках движения частицы: во внутреннем и внешнем ударных слоях, в гиперзвуковом внешнем (однородном) и внутреннем (от точечного источника) потоках. Изломы на кривой 1 соответствуют пересечению частицей границ слоев с разными температурами несущей фазы. При вылете частицы в относительно холодные гиперзвуковые потоки ее температура (в зависимости от времени пребывания) может заметно упасть. Нагрев частиц, движущихся по монотонным траекториям (кривая 2), происходит во внутреннем ударном слое с приблизительно постоянной скоростью.

Для определения границ применимости используемой модели невзаимодействующих частиц была проведена оценка вероятности столкновения частиц различных континуумов при их движении на оси симметрии. Была использована методика [17], основанная на предположении о пуассоновском распределении числа частиц в выбранном объеме. Расчеты показали, что при $R_b = 100$, $\beta = 0,01$ вероятность столкновения по порядку величины равна $P \approx 5\alpha$, где $\alpha = \rho_{s-}^* / \rho_-^*$ – массовая концентрация частиц перед ударной волной. Следовательно, модель невзаимодействующих частиц можно считать применимой при $\alpha \leq 10^{-2}$.

Заключение. С использованием асимптотических и численных методов исследована структура течения в окрестности оси симметрии при взаимодействии сверхзвукового двухфазного источника с гиперзвуковым потоком газа. В области между внешней и внутренней ударными волнами обнаружено возникновение зон многократного пересечения траекторий частиц и формирование "слоистых структур" в распределениях концентрации дисперсной фазы – областей накопления частиц вблизи огибающих семейства их траекторий. Показан пороговый характер изменения числа слоев накопления дисперсной фазы при увеличении параметра, характеризующего инерционность частиц. Обнаруженный эффект резкой стратификации дисперсной фазы в ударных слоях может быть важен для интерпретации экспериментальных данных при исследовании кометных атмосфер.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-00313) и Государственного фонда естественных наук Китая (совместный грант РФФИ – ГФЕН 96-01-00017с).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баранов В.Б. Газодинамическая структура гелиосферы. Теория и эксперимент // Изв. РАН МЖГ. 1993. № 3. С. 3–24.
2. Васильков А.И., Мурзинов И.Н. Истечение газа из сильно недорасширенного сопла навстречу гиперзвуковому потоку // Изв. АН СССР. МЖГ. 1973. № 3. С. 102–107.
3. Probst R.F. The dusty gas dynamics of comet heads // Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды. К 60-летию акад. Л.И. Седова. М.: Наука, 1969. С. 397–409.
4. Вергазов М.А. Осесимметричное истечение запыленного газа из ядра кометы // Письма в "Астрон. журн.". 1987. Т. 13. № 4. С. 326–332.
5. Осипцов А.Н., Шапиро Е.Г. Двухфазный вдув на лобовой поверхности затупленного тела в гиперзвуковом потоке // Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 4. С. 60–66.
6. Marble F.E. Dynamics of dusty gases // Ann. Rev. Fluid Mech. Palo Alto, Calif.: Annu. Rev. Inc., 1970. V. 2. P. 397–446. (Рус. перев.: Марбл Ф. Динамика запыленных газов // Механика: Период. сб. перев. иностр. статей. 1971. № 6. С. 48–89).
7. Crowe C.T. Review-numerical models for dilute gas-particle flows // Trans. ASME J. Fluids Eng. 1982. V. 104. № 3. P. 297–303.

8. *Осипцов А.Н.* Движение запыленного газа в начальном участке плоского канала и круглой трубы // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 6. С. 80–87.
9. *Баранов В.Б., Краснобаев К.В., Куликовский А.Г.* Модель взаимодействия солнечного ветра с межзвездной средой // Докл. АН СССР. 1970. Т. 194. № 1. С. 41–44.
10. *Лунев В.В.* Гиперзвуковая аэродинамика. М.: Машиностроение, 1975. 327 с.
11. *Baranov V.B., Krasnobaev K.V., Ruderman M.S.* On the model of the solar wind-interstellar medium interaction with two shock waves // *Astrophys. and Space Sci.* 1976. V. 41. № 2. P. 481–490.
12. *Стулов В.П.* Сильный вдув на поверхности затупленного тела в сверхзвуковом потоке // Изв. АН СССР. МЖГ. 1972. № 2. С. 89–97.
13. *Черный Г.Г.* Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959. 220 с.
14. *Carlson D.J., Hoglund R.F.* Particle drag and heat transfer in rocket nozzles // *AIAA Journal.* 1964. V. 2. № 11. P. 1980–1984. (Рус. перев.: *Карлсон Д., Хоглунд Р.* Сопротивление и теплоотдача частиц в соплах ракетных двигателей // *Ракетная техника и космонавтика.* 1964. Т. 2. № 11. С. 104–109.)
15. *Бондарев Е.Н., Дубасов В.Т., Рыжов Ю.А. и др.* Аэрогидромеханика. М.: Машиностроение, 1993. 608 с.
16. *Осипцов А.Н., Шапиро Е.Г.* Влияние мелкодисперсной примеси на структуру пограничного слоя при гиперзвуковом обтекании затупленного тела // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 5. С. 55–62.
17. *Осипцов А.Н., Шапиро Е.Г.* Обтекание сферы запыленным газом с большой сверхзвуковой скоростью. В сб.: Исследование газодинамики и теплообмена сложных течений однородных и многофазных сред. М. МГУ. 1990. С. 89–105.

Москва

Поступила в редакцию
24.XII.1996