МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 • 1998

УДК 532.591

© 1998 г. Л.Д. АКУЛЕНКО, С.В. НЕСТЕРОВ

АЗИМУТАЛЬНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ДВИЖЕНИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ЖИДКОГО ЦИЛИНДРА

В рамках линейной теории исследованы волновые движения во вращающемся вокруг оси жидком цилиндре. Цилиндр имеет достаточно большую протяженность, что позволяет ограничиться изучением плоской картины колебаний. Жидкость предполагается идеальной и несжимаемой. Рассмотрены модели, когда частицы жидкости удерживаются гравитационными (массовыми) или (и) капиллярными силами (силами поверхностного натяжения). Проведен модальный анализ и построены дисперсионные зависимости. Изучены бегущие и стоячие волны на поверхности жидкого цилиндра; установлены качественные эффекты ("инерция волн").

1. Постановка задачи о гравитационных волнах. Рассмотрим классическую задачу о движении массы идеальной несжимаемой жидкости, частицы которой подвержены действию сил тяготения [1, 2]. В качестве гидродинамической модели возьмем жидкий цилиндр, вращающийся вокруг неподвижной в инерциальном пространстве оси симметрии z с угловой скоростью Ω. Цилиндр предполагается достаточно протяженным, что позволяет пренебречь торцевыми эффектами и рассмотреть плоскую картину движения (во вращающейся плоскости xy).

В рамках линейной теории волн бесконечно малой амплитуды [2, 3] исследуем плоские движения жидкости. Введем полярную систему координат r, θ, также вращающуюся вместе с жидкостью. Относительные движения частиц жидкости описываются вектором скорости $\mathbf{u}(r, \theta, t) = (u_r(r, \theta, t), u_\theta(r, \theta, t))^{\mathrm{T}}$, где u_r, u_θ – соответственно радиальная и азимутальная (трансверсальная) составляющие вектора скорости во вращающейся полярной системе координат. Уравнения движения имеют вид [4]

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} - 2\Omega u_\theta = -\frac{\partial \Phi}{\partial r}, \qquad \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + 2\Omega u_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}$$
$$\frac{\partial}{\partial r}(r u_r) + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0, \qquad \Phi = \frac{P}{\rho} + W - \frac{1}{2}\Omega^2 r^2 \tag{1.1}$$

Здесь ρ – плотность жидкости, P – давление, W – гравитационный потенциал; Φ – обобщенный потенциал, т.е. неизвестная переменная, подлежащая определению вместе с $\mathbf{u}$ из системы (1.1) (она удовлетворяет уравнению Лапласа).

Краевые условия задаются на неизвестной границе $r = \eta(\theta, t)$

$$\eta(\theta, t) = R_0(1 + \zeta(\theta, t)), \quad \zeta(\theta + 2\pi, t) \equiv \zeta(\theta, t), \quad |\zeta| \ll 1 \tag{1.2}$$

где R_0 – радиус невозмущенного цилиндра, а неизвестная ζ характеризует форму границы и также подлежит определению. Она должна удовлетворять условиям сохранения объема жидкости и отсутствия смещений оси цилиндра при деформациях его поверхности, т.е. перемещений цилиндра как целого. Эти условия можно записать в виде

$$\int_0^{2\pi} \zeta(\theta, t)\,d\theta = \int_0^{2\pi} \zeta(\theta, t)\cos\theta\,d\theta = \int_0^{2\pi} \zeta(\theta, t)\sin\theta\,d\theta \equiv 0 \tag{1.3}$$

Масса жидкости удерживается в равновесии гравитационными силами, потенциал которых $W = W(r, \theta, t)$ представим в виде суммы потенциала однородного кругового цилиндра (внутреннего потенциала) и потенциала простого слоя мощностью $\rho\zeta R_0$, распределенного по поверхности цилиндра [1, 5]

$$W(r,\theta,t) = \frac{\pi}{2}\gamma\rho r^2 + \gamma\rho R_0^2 \int_0^{2\pi} \ln\left(1+\frac{r^2}{R_0^2} - 2\frac{r}{R_0}\cos(\theta-\theta')\right)^{1/2} \zeta(\theta',t)d\theta' =$$

$$= \frac{\pi}{2}\gamma\rho r^2 - \gamma\rho R_0^2 \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{r}{R_0}\right)^n \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\cos n(\theta-\theta')\zeta(\theta',t)d\theta' \qquad (1.4)$$

Здесь γ – постоянная тяготения; суммирование ряда в (1.4) начинается с $n = 2$, поскольку для функции $\zeta(\theta, t)$ справедливы тождества (1.3). Кроме того, в потенциале простого слоя (второе слагаемое) отброшены члены $O(\zeta^2)$ и более высоких порядков.

Динамическим условием на свободной поверхности жидкости ($r = \eta(\theta, t)$) служит условие постоянства давления

$$P(\eta,\theta,t) = \rho\left[\Phi(\eta,\theta,t) - W(\eta,\theta,t) + \frac{1}{2}\Omega^2\eta^2\right] = \text{const} \qquad (1.5)$$

Здесь гравитационный потенциал имеет представление (1.4). Так как волновые движения жидкости исследуются в линейном приближении по ζ, то, отбрасывая в (1.5) члены более высокого порядка, получим интегральное соотношение между неизвестной Φ на невозмущенной границе $\eta = R_0$ и относительным смещением ζ

$$\Phi(R_0,\theta,t) = R_0^2(\pi\gamma\rho - \Omega^2)\zeta - \gamma\rho R_0^2 \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\cos n(\theta-\theta')\zeta(\theta',t)d\theta' \qquad (1.6)$$

Кроме того, на свободной поверхности должно выполняться кинематическое условие

$$R_0\frac{\partial\zeta}{\partial t} = u_r(R_0,\theta,t), \qquad \eta = R_0 \qquad (1.7)$$

Как и функция $\zeta(\theta, t)$ (см. (1.2)), функции u_r, u_θ, Φ должны быть 2π-периодическими по углу θ и малыми в области, занимаемой жидкостью ($0 \leqslant r \leqslant \eta(\theta, t)$). Для определения движения жидкости должны быть заданы (например, при $t = 0$) начальные значения вектора скорости $\mathbf{u}(r, \theta, 0)$ и относительного возвышения $\zeta(\theta, 0)$.

2. Модальный анализ колебаний жидкости. Определим волновые движения на свободной поверхности вращающейся массы жидкости цилиндрической формы. Предположим, что возбуждена одна n-я мода (форма) колебаний

$$u_r = u_{rn}(r,\theta,t) = \alpha_n(t)\left(\frac{r}{R_0}\right)^{n-1} e^{in\theta}, \qquad u_\theta = u_{\theta n}(r,\theta,t) = iu_{rn}(r,\theta,t)$$

$$\Phi = \Phi_n(r,\theta,t) = A_n(t)\left(\frac{r}{R_0}\right)^n e^{in\theta}, \qquad \zeta = \zeta_n(\theta,t) = B_n(t)e^{in\theta}, \qquad i = \sqrt{-1} \qquad (2.1)$$

где α_n, A_n, B_n – неизвестные функции времени, подлежащие дальнейшему определению. Непосредственная подстановка выражений (2.1) в (1.1) показывает, что третье уравнение (уравнение неразрывности) удовлетворяется тождественно.

Из краевых условий (1.6), (1.7) следует соотношение для коэффициентов A_n, B_n. В частности, $\dot{B}_n(t) = R_0^{-1}\alpha_n(t)$, а неизвестная функция $A_n(t)$ также определяется через квадратуру от $\alpha_n(t)$. В результате получим представления

$$A_n(t) = R_0^2[\pi\gamma\rho(1-n^{-1}) - \Omega^2]B_n(t), \quad B_n(t) = \frac{1}{R_0}\int_0^t \alpha_n(t')dt' \tag{2.2}$$

Из первых двух уравнений системы (1.1) следует уравнение второго порядка для неизвестной α_n, причем должны быть заданы некоторые начальные значения α_n, $\dot{\alpha}_n$ (задача Коши по t)

$$\ddot{\alpha}_n - 2i\Omega\dot{\alpha}_n + n[\pi\gamma\rho(1-n^{-1}) - \Omega^2]\alpha_n = 0 \tag{2.3}$$

$$\alpha_n(0) = \alpha_n^0, \quad \dot{\alpha}_n(0) = \dot{\alpha}_n^0, \quad n = 2,3,\ldots$$

Задача Коши (2.3) решается элементарно; на основе ее решения по формулам (2.1), (2.2) определяются элементы волновых движений жидкости и, в частности, возвышение свободной поверхности $\eta_n(\theta,t)$ (n-я мода волны). Приведем это решение.

Пусть $\alpha_n(t) = a_n \exp(i\omega_n t)$; тогда получим дисперсионное соотношение для собственных частот колебаний ω_n

$$\omega_n^2 + 2\Omega\omega_n - n[\pi\gamma\rho(1-n^{-1}) - \Omega^2] = 0 \tag{2.4}$$

Из (2.4) для частот ω_n свободных волн n-й моды, распространяющихся в азимутальном направлении, получим

$$\omega_n^{(1,2)} = -\Omega \pm \mu_n, \quad \mu_n = (n-1)^{1/2}\nu, \quad \nu^2 = \pi\gamma\rho - \Omega^2 > 0 \tag{2.5}$$

$$\omega_n^{(1)} \lesseqgtr 0, \quad \omega_n^{(2)} < 0$$

Рассмотрим волны, распространяющиеся в обратном направлении. Для них имеют место представления (2.1) с заменой $\theta \to -\theta$; собственные частоты $\omega_n^{(3,4)}$ равны

$$\omega_n^{(3)} = -\omega_n^{(2)} > 0, \quad \omega_n^{(4)} = -\omega_n^{(1)} \gtreqless 0 \tag{2.6}$$

Отметим некоторые свойства собственных частот ω_n как функций параметров системы и индекса n.

В общем случае имеются два счетных множества собственных частот, величины которых возрастают с номером моды n, причем справедлива асимптотика $\omega_n \sim \sqrt{n}$, а разность частот из указанных множеств имеет точку сгущения на бесконечности при $n \to \infty$. Собственные частоты ω_n оказались не зависящими от радиуса цилиндра R_0, что есть следствие свойств гравитационных сил (см. разд. 3, формулы (3.6), (3.8)). Если имеет место неравенство $\pi\gamma\rho < \Omega^2$, т.е. $\nu^2 < 0$, то все собственные частоты комплексные. Это означает, что состояние вращения жидкой массы как целого будет неустойчивым. Массовые гравитационные силы недостаточны для удержания вращающихся частиц жидкости в этом случае.

Исследуем теперь волновые движения жидкости на поверхности цилиндра. Поверхностные волны ζ_n для частот ω_n описываются выражениями

$$\zeta_n^{(1,2)}(\theta,t) = B_n^0 \exp[i(n\theta + \omega_n^{(1,2)}t)], \quad B_n^0 = \mathrm{const} \tag{2.7}$$

Пусть для определения $\Omega > 0$, т.е. цилиндр вращается против часовой стрелки. Тогда волна $\zeta_n^{(1)}(\theta,t)$ распространяется во вращающейся системе по или против часовой стрелки с относительной угловой скоростью $\sigma_n^{(1)}$

$$\dot{\theta}_n = \sigma_n^{(1)} = -n^{-1}\omega_n^{(1)} = n^{-1}\omega_n^{(4)} \lesseqgtr 0 \tag{2.8}$$

Волна $\zeta_n^{(2)}(\theta,t)$ распространяется во вращающейся системе всегда против часовой стрелки с угловой скоростью $\sigma_n^{(2)}$

$$\dot\theta_n = \sigma_n^{(2)} = -n^{-1}\omega_n^{(2)} = n^{-1}\omega_n^{(3)} > 0 \tag{2.9}$$

причем $\sigma_n^{(2)}$ (2.9) по абсолютной величине превосходит $\sigma_n^{(1)}$ (2.8).

Волны возвышения $\zeta_n^{(3,4)}(\theta,t)$ для частот $\omega_n^{(3,4)}$ (2.6) получаются из выражений (2.7) операцией комплексного сопряжения. С помощью выражений (2.7) могут быть построены выражения для стоячих волн на поверхности вращающегося цилиндра (звездочка означает комплексное сопряжение)

$$\begin{gathered}\psi_n^c(\theta,t) = \frac{1}{2}(\zeta_n^{(1)} + \zeta_n^{(2)*}) = B_n^0 \exp(i\mu_n t)\cos(n\theta - \Omega t)\\ \psi_n^s(\theta,t) = \frac{1}{2i}(\zeta_n^{(1)} - \zeta_n^{(2)*}) = B_n^0 \exp(i\mu_n t)\sin(n\theta - \Omega t)\end{gathered} \tag{2.10}$$

Из (2.10) следует, что узлы каждой из стоячих волн $\psi_n^{c,s}(\theta,t)$ перемещаются с угловой скоростью $\beta_n = n^{-1}\Omega$ относительно системы координат, "жестко связанной" с вращающимся со скоростью Ω жидким цилиндром. Если ввести новую угловую переменную $\varphi_n = \theta - n^{-1}\Omega t$, то в этой системе стоячие волны $\psi_n^{c,s}(\varphi_n,t)$ (2.10) имеют неподвижные узлы.

В реальных условиях на поверхности жидкости действуют капиллярные силы (силы поверхностного натяжения), которые не были учтены в рассмотренной модели. Они становятся существенными, если радиус цилиндра относительно мал (см. далее). Рассмотрим теперь ситуацию, когда гравитационными силами можно пренебречь, а основными удерживающими силами являются силы поверхностного натяжения. Затем учтем совместное влияние гравитационных и капиллярных удерживающих сил.

3. Исследование капиллярных и гравитационно-капиллярных волн на поверхности вращающегося жидкого цилиндра. Уравнения движения частиц жидкости во вращающейся системе координат по-прежнему имеют вид (1.1), но только строго внутри области $r < \eta$, с другим представлением неизвестной Φ

$$\eta = \eta(\theta,t) = R_0(1+\zeta(\theta,t)), \qquad \Phi = \frac{P}{\rho} - \frac{1}{2}\Omega^2 r^2 \tag{3.1}$$

В выражении (3.1) для обобщенного потенциала $\Phi(r,\theta,t)$ отсутствует слагаемое W (см. (1.1)). Относительное возвышение ζ поверхности жидкости от круговой также удовлетворяет условиям (1.2), (1.3), (1.7).

Предполагается, что динамическое условие на поверхности жидкости типа (1.5) есть условие равновесия динамического давления P и давления P_T сил поверхностного натяжения, коэффициент которого равен T [2]; в линейном приближении имеем представление

$$P_T = \frac{T}{R_0}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial\theta^2} + \zeta\right) \tag{3.2}$$

Подставим выражение P_T (3.2) в условие $P|_\eta = P_T$; получим в линейном приближении по ζ вместо (1.5) соотношение

$$\Phi(R_0,\theta,t) + \frac{T}{\rho R_0}\left[\frac{\partial^2\zeta}{\partial\theta^2} + \zeta\left(1 + \frac{\rho R_0}{T}\Omega^2 R_0^2\right)\right] = 0 \tag{3.3}$$

Поскольку обобщенный потенциал $\Phi(r, \theta, t)$ удовлетворяет уравнению Лапласа (гармоническая функция r, θ), то искомые функции Φ, ζ можно представить в виде рядов от Φ_n, ζ_n

$$\Phi_n(r,\theta,t) = A_n^0\left(\frac{r}{R_0}\right)^n \exp[i(n\theta+\omega_n t)], \qquad \zeta_n(\theta,t) = B_n^0 \exp[i(n\theta+\omega_n t)] \tag{3.4}$$

где A_n^0, B_n^0 – постоянные. Используя краевые условия (1.7), (3.3) и уравнения (1.1), получим для искомых коэффициентов A_n^0, B_n^0 линейную однородную систему уравнений

$$\begin{aligned} &A_n^0 + \frac{T}{\rho R_0}\left(1+\frac{\rho R_0}{T}\Omega^2 R_0^2 - n^2\right)B_n^0 = 0 \\ &-\frac{n}{R_0^2}A_n^0 + \omega_n(\omega_n + 2\Omega)B_n^0 = 0, \qquad n = 2,3,\ldots \end{aligned} \tag{3.5}$$

Из требования нетривиальности решения системы (3.5) следует дисперсионное уравнение для частоты ω_n собственных колебаний n-й моды

$$\begin{aligned} &\omega_n^2 + 2\Omega\omega_n + \frac{Tn}{\rho R_0^3}\left(1+\frac{\rho R_0}{T}\Omega^2 R_0^2 - n^2\right) = 0 \\ &\omega_n^{(1,2)} = -\Omega \pm \nu_n, \qquad \nu_n = \left[\frac{Tn}{\rho R_0^3}(n^2-1) - (n-1)\Omega^2\right]^{1/2} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Условие положительности подкоренного выражения (3.6) приводит к неравенству (см. (2.5))

$$\frac{T}{R_0}n(n+1) > \rho R_0^2\Omega^2, \qquad n = 2,3,\ldots \tag{3.7}$$

Если неравенство (3.7) справедливо для низшей моды колебаний $n = 2$, то оно выполняется также для всех $n \geqslant 2$. Из (3.7) следует, что условие устойчивости n-й моды заведомо выполняется, если номер n достаточно велик; низшие моды "менее устойчивы". В случае, когда справедливо неравенство противоположного знака, то имеется конечное число неустойчивых мод (см. для сравнения свойство 3 разд. 2 для волн в случае гравитационных сил притяжения).

Для скоростей $\sigma_n^{(1,2)}$ поверхностных волн $\zeta_n^{(1,2)}$ и для аналога стоячих волн $\psi_n^{(c,s)}$ получаются выражения, совпадающие с (2.7)–(2.10). Относительно свойств бегущих и стоячих волн следует справедливость выводов, приведенных в разд. 2 для случая гравитационных волн.

Аналогичными рассуждениями можно получить следующее характеристическое уравнение для собственных частот ω_n гравитационно-капиллярных волн:

$$\begin{aligned} &\omega_n^2 + 2\Omega\omega_n - \frac{T}{\rho R_0^3}n(n^2-1) + \pi\gamma\rho(n-1) + n\Omega^2 = 0 \\ &\omega_n^{(1,2)} = -\Omega \pm \mathrm{N}_n, \qquad \mathrm{N}_n = (n-1)^{1/2}\left(\frac{T}{\rho R_0^3}n(n+1) + \nu^2\right)^{1/2} \end{aligned} \tag{3.8}$$

Из (3.8) (см. также (3.6)) следует существенная зависимость частот от радиуса R_0 цилиндра. Условие устойчивости колебаний n-й моды имеет вид (см. для сравнения (2.5), (3.7))

$$\frac{T}{R_0}n(n+1) + \pi\gamma\rho^2 R_0^2 > \rho R_0^2\Omega^2, \qquad n = 2,3,\ldots \tag{3.9}$$

т.е. суммарные удерживающие капиллярные и гравитационные силы, действующие на частицы жидкости, должны превосходить центробежные силы инерции. Комментарий к условиям устойчивости (3.9) аналогичен приведенному для неравенства (3.7). Угловая скорость $\sigma_n^{(1)} = -n^{-1}\omega_n^{(1)}$ бегущих волн $\zeta_n^{(1)}(\theta, t)$ может быть разных значков; величина $\sigma_n^{(2)} = -n^{-1}\omega_n^{(2)}$ всегда положительна.

Заключение. Проведен модальный анализ волновых движений на поверхности вращающегося жидкого цилиндра с учетом гравитационных, капиллярных и гравитационно-капиллярных удерживающих сил. Во всех случаях установлено свойство инерции стоячих волн, что позволяет рассматривать систему как гидродинамическую модель волнового гироскопа [6]. Физическая реализация такого объекта, по-видимому, возможна в условиях невесомости в том случае, если удастся эффективно подавить явление неустойчивости поверхности жидкого цилиндра относительно возмущений, распространяющихся вдоль оси цилиндра.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-00221).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ляпунов А.М.* Собрание сочинений. Т. 4. М.: Изд-во АН СССР, 1959. 645 с.
2. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
3. *Сретенский Л.Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 815 с.
4. *Сретенский Л.Н.* Динамическая теория приливов. М.: Наука, 1987. 472 с.
5. *Сретенский Л.Н.* Теория ньютоновского потенциала. М.; Л.: Гостехиздат, 1946. 318 с.
6. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Волновой твердотельный гироскоп. М.: Наука, 1985. 125 с.

Москва

Поступила в редакцию
30.XII.1996