МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 • 1998

УДК 532.59+532.82

© 1998 г. С.И. ГОРЛОВ

ВЛИЯНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ И ВНУТРЕННИХ ВОЛН НА ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОНТУРА В ЛИНЕЙНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

В рамках линейной теории разработан метод решения задачи о движении эллиптического контура в трехслойной жидкости. Приведены результаты расчета гидродинамических нагрузок контура и формы границ раздела сред для следующих задач: о движении контура под границей раздела двух сред, в двухслойной жидкости под твердой крышкой, а также в двухслойной жидкости под свободной поверхностью. На основании численного эксперимента сделан вывод о существенном влиянии поверхностных и внутренних волн на гидродинамические характеристики контура.

Поверхностные и внутренние волны, генерируемые погруженным в жидкость телом, издавна привлекают к себе внимание многих авторов. Наиболее полно состояние исследований по этому вопросу представлено в обзоре [1]. Дополнительно укажем следующие работы. В [2] предложен оригинальный метод решения задачи об обтекании кругового цилиндра потоком двухслойной жидкости. Решение представлено в виде быстро сходящегося ряда, получены формулы для гидродинамических нагрузок, приведены значения волнового сопротивления и подъемной силы. Обзорная работа [3] содержит результаты численного решения методом гибридных конечных элементов линейной задачи о движении цилиндра вблизи границы раздела двух жидких сред, в двухслойной жидкости под твердой крышкой и под свободной поверхностью. Приведено сравнение с исследованиями других авторов. Для решения задачи о движении контура в трехслойной жидкости в [4, 5] разработан метод граничных особенностей. Представлены результаты обширного численного эксперимента по оценке влияния границ раздела на волновое сопротивление и подъемную силу кругового цилиндра.

Несмотря на имеющиеся результаты, ряд вопросов остается недостаточно исследованным. В частности, не выяснено поведение гидродинамических характеристик и формы границ раздела сред в окрестности критического числа Фруда. Кроме того, представляет интерес разработать метод решения данной задачи, провести численный эксперимент и на его основе сделать вывод о влиянии поверхностных и внутренних волн на гидродинамические нагрузки контура.

1. Рассмотрим линейную задачу о равномерном движении эллиптического контура L в трехслойной жидкости. Жидкость в каждом слое D_k ($k = 1, 2, 3$) предполагается идеальной, несжимаемой, тяжелой и однородной. Скорости жидкости в бесконечном удалении перед контуром одинаковы во всех слоях. Введем инерциальную систему координат, связанную с контуром, располагая ось x вдоль невозмущенной границы второго и третьего слоев. Эллипс расположен в среднем слое. Обозначим через g ускорение силы тяжести, ρ_k – плотность жидкости в k-м слое ($k = 1, 2, 3$), V_∞ – скорость жидкости в бесконечном удалении перед контуром, a и b – большая и малая полуоси эллипса, h – отстояние центра эллипса от границы раздела второго и третьего слоев, H – толщина среднего слоя.

Будем рассматривать задачу в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$. Введем комплексные скорости возмущенного движения жидкости $\overline{V}_k(z)$ ($k = 1, 2, 3$), аналитические в k-м слое (вне L при $k = 2$) и удовлетворяющие граничным условиям [6]: непрерывности давления и нормальной составляющей скорости при переходе через границу раздела сред D_k и D_{k+1}, непротекания в точках контура и затухания возмущенных скоростей в бесконечном удалении перед контуром

$$\operatorname{Im}\overline{V}_k(z) = \operatorname{Im}\overline{V}_{k+1}(z) \quad \text{при} \quad z = x + iH(k-2) \quad (k = 1,2) \tag{1.1}$$

$$\operatorname{Re}\left\{m_{k\,k+1}^{k}\frac{d\overline{V}_k(z)}{dz} - m_{k\,k+1}^{k+1}\frac{d\overline{V}_{k+1}(z)}{dz} + i\nu_k\overline{V}_k(z)\right\} = 0 \tag{1.2}$$

$$z = x + iH(k-2) \quad (k = 1,2)$$

$$m_{k\,k+1}^{k} = \frac{\rho_k}{\rho_k + \rho_{k+1}}, \quad m_{k\,k+1}^{k+1} = \frac{\rho_{k+1}}{\rho_k + \rho_{k+1}}, \quad \nu = \frac{g}{V_\infty^2}$$

$$m_{k\,k+1} = m_{k\,k+1}^{k} - m_{k\,k+1}^{k+1}, \quad \nu_k = \nu m_{k\,k+1}$$

$$\operatorname{Im}\left\{\left(V_\infty + \overline{V}_2(z)\right)e^{i\theta(z)}\right\} = 0 \quad (z \in L) \tag{1.3}$$

$$\lim_{z\to-\infty}\overline{V}_k(z) = 0 \quad (k = 1,2,3) \tag{1.4}$$

где $\theta(z)$ – угол между касательной к L в точке z и осью x.

Граничным условиям (1.1), (1.2) и (1.4) удовлетворяют функции

$$\overline{V}_k(z) = \int_L K_k(z,\zeta)\gamma(\zeta)e^{-i\theta(\zeta)}d\zeta \tag{1.5}$$

где $\gamma(\zeta)$ – интенсивность вихревого слоя, моделирующего L ($\zeta = \xi + i\eta$). Выражения $K_k(z, \zeta)$ ($k = 1, 2, 3$) – решение соответствующей краевой задачи (1.1), (1.2) и (1.4) для вихря единичной интенсивности, полученное в [6] и имеющее вид

$$K_1(z,\zeta) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty G_1(\lambda)e^{-i\lambda(z-\bar\zeta)}d\lambda - i\sum_{j=1}^{P}\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_j}\left[G_1(\lambda)e^{-i\lambda(z-\bar\zeta)}\right]$$

$$K_2(z,\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z-\zeta} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty G_2(\lambda)e^{-i\lambda(z-\bar\zeta)}d\lambda - i\sum_{j=1}^{P}\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_j}\left[G_2(\lambda)e^{-i\lambda(z-\bar\zeta)}\right] +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty G_3(\lambda)e^{i\lambda(z-\zeta)}d\lambda + i\sum_{j=1}^{P}\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_j}\left[G_3(\lambda)e^{i\lambda(z-\zeta)}\right]$$

$$K_3(z,\zeta) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty G_4(\lambda)e^{i\lambda(z-\zeta)}d\lambda + i\sum_{j=1}^{P}\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_j}\left[G_4(\lambda)e^{-i\lambda(z-\zeta)}\right]$$

$$G_1(\lambda) = m_{12}^2\lambda\left(\lambda m_{23} + \nu_2 + (\lambda - \nu_2)e^{-2\lambda\eta}\right)e^{2\lambda H}\Big/T(\lambda)$$

$$G_2(\lambda) = \tfrac{1}{2}(\lambda m_{23} + \nu_2)\left((\lambda - \nu_1)e^{2\lambda H} - (\lambda m_{12} - \nu_1)e^{-2\lambda\eta}\right)\Big/T(\lambda)$$

$$G_3(\lambda) = \tfrac{1}{2}(\lambda m_{12} - \nu_1)\left((\lambda - \nu_2)e^{-2\lambda\eta} + \lambda m_{23} + \nu_2\right)\Big/T(\lambda)$$

$$G_4(\lambda) = m_{23}^2\lambda\left((\lambda m_{12} - \nu_1)e^{-2\lambda\eta} - (\lambda - \nu_1')e^{2\lambda H}\right)\Big/T(\lambda)$$

$$T(\lambda) = (\lambda m_{12} - \nu_1)(\lambda m_{23} + \nu_2) + (\lambda - \nu_1)(\lambda - \nu_2)e^{2\lambda H}$$

где λ_j ($j = \overline{1, P}$) – положительные корни уравнения $T(\lambda) = 0$.

$$P = 2 \ (A < 0), \quad P = 1 \ (A > 0)$$

$$A = m_{23}^2 + (\nu_2 / \nu_1) m_{12}^2 - H\nu_2$$

Для определения функции $\gamma(\zeta)$ имеем сингулярное интегральное уравнение, полученное подстановкой (1.5) в (1.3). После решения этого уравнения методом дискретных вихрей определяются комплексные скорости $\overline{V}_k(z)$ из (1.5), а затем распределение давления p по контуру L

$$p - p_\infty = -\tfrac{1}{2}\rho_2\left(\left|V_\infty + \overline{V}_2(z)\right|^2 - V_\infty^2\right)$$

где p_∞ – давление в бесконечно удаленной точке; а также волновое сопротивление R_x, подъемная сила R_y и момент M относительно $z_M = x_M + iy_M$

$$R_x - iR_y = i\int_L (p - p_\infty) e^{-i\theta} ds$$

$$M = -\int_L (p - p_\infty)[(\xi - x_M)\cos\theta + (\eta - y_M)\sin\theta] ds$$

Форма границы раздела определяется функцией $y = f_k(x)$, где

$$f_k(x) = -\frac{1}{\nu_k}\operatorname{Re}\left\{m_{k\,k+1}^k \overline{V}_k(z) - m_{k\,k+1}^{k+1}\overline{V}_{k+1}(z)\right\}, \quad z = x + iH(k-2) \ (k = 1, 2)$$

2. Рассмотрим движение контура под границей раздела двух сред ($H = -\infty$). В этом случае выражения $K_k(z, \zeta)$ $(k = 2, 3)$ будут иметь вид

$$K_2(z,\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z-\zeta} + \frac{m_{23}}{2\pi i}\frac{1}{z-\overline{\zeta}} + \frac{\nu_2 m_{23}^2}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-i\lambda(z-\overline{\zeta})}}{\lambda - \nu_2} d\lambda - \nu_2 m_{23}^2 i e^{-i\nu_2(z-\overline{\zeta})}$$

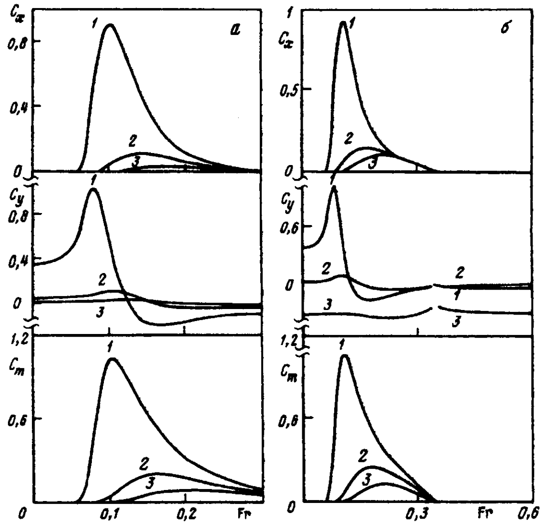
$$K_3(z,\zeta) = \frac{m_{23}^2}{\pi i}\frac{1}{z-\zeta} - \frac{\nu_2 m_{23}^2}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{i\lambda(z-\zeta)}}{\lambda - \nu_2} d\lambda - \nu_2 m_{23}^2 i e^{i\nu_2(z-\zeta)}$$

Параметрами задачи являются: b/a – отношение полуосей эллипса, h/a – погружение эллипса, ρ_3/ρ_2 – отношение плотностей, число Фруда $\mathrm{Fr} = V_\infty / \sqrt{ga}$. На основании разработанного метода был проведен численный эксперимент по оценке влияния этих параметров на коэффициенты волнового сопротивления $C_x = 2R_x / \rho_2 a V_\infty^2$, подъемной силы $C_y = 2R_y / \rho_2 a V_\infty^2$, момента относительно центра эллипса $C_m = 2M / \rho_2 a^2 V_\infty^2$.

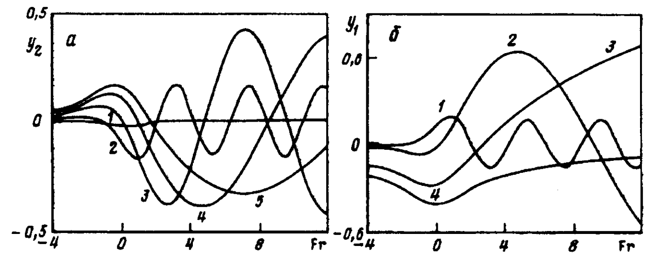
Ниже приведено сравнение результатов расчета гидродинамических характеристик кругового цилиндра C_{x1} и C_{y1}, движущегося под границей раздела двух сред, со значениями C_{x2} и C_{y2}, полученными в [2] (в расчетах полагалось $h/a = 2{,}0$ и $\rho_3/\rho_2 = 0{,}97$):

$\mathrm{Fr}_h/\sqrt{m_{23}}$	0,0	0,2	0,4	0,5	0,8	1,0
C_{x1}	0,00000	0,00000	0,00332	0,28872	0,51330	0,36066
C_{x2}	0,00000	0,00000	0,00320	0,28946	0,51430	0,36156
C_{y1}	0,22920	0,24651	0,31553	0,52279	0,18693	–0,06896
C_{y2}	0,22977	0,24713	0,31490	0,52418	0,18745	–0,06910

$\mathrm{Fr}_h/\sqrt{m_{23}}$	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	∞
C_{x1}	0,20568	0,11387	0,06415	0,03725	0,02234	0,00000
C_{x2}	0,20619	0,11415	0,06431	0,03733	0,02239	0,00000
C_{y1}	–0,13152	–0,12602	–0,10570	–0,08579	–0,06952	–0,00289
C_{y2}	–0,13183	–0,12632	–0,10596	–0,08599	–0,06969	–0,00289



Фиг. 1. Гидродинамические характеристики эллиптического контура ($b/a = 0{,}5$), движущегося под границей раздела сред ($\rho_3/\rho_2 = 0{,}97$) (1, *а*): $h/a = 1$; 2; 3 (кривые *1–3*), и движущегося в двухслойной жидкости под твердой крышкой($\rho_1/\rho_2 = 0{,}97$) ($H/a = 4$) (1, *б*): $h/a = 3$; 2; 1 (кривые *1–3*)



Фиг. 2. Внутренние волны, генерируемые эллиптическим контуром ($b/a = 0{,}5$), движущимся под границей раздела сред ($\rho_3/\rho_2 = 0{,}97$), $h/a = 2$, $\mathrm{Fr} = 0{,}05$; 0,1; 0,15; 0,2; 0,25 (кривые *1–5*) (*а*) и $x_1 = x/a$, $y_k = f_k(x)$, $k = 1, 2$, в двухслойной жидкости под твердой крышкой при $\rho_3/\rho_2 = 0{,}97$, $H/a = 4$, $h/a = 2$, $\mathrm{Fr} = 0{,}1$; 0,2; 0,3; 0,4 (кривые *1–4*) (*б*)

Проведенное сравнение позволяет судить о высокой точности разработанного метода.

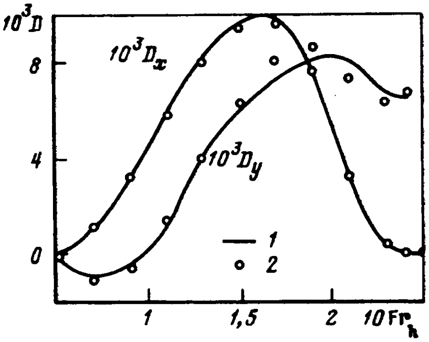
На фиг. 1, *а* представлены результаты расчета гидродинамических характеристик эллиптического контура ($b/a = 0{,}5$), движущегося под границей раздела морской и пресной воды ($\rho_3/\rho_2 = 0{,}97$). Влияние параметров задачи на форму границы раздела сред демонстрируется на фиг. 2, *а*. Влияние наличия границы раздела сред на гидродинамические характеристики контура проявляется наиболее сильно при $\mathrm{Fr} < 0{,}3$.

Рассмотрим движение контура в двухслойной жидкости под твердой крышкой ($\rho_2/\rho_3 = 0$). Выражения $K_k(z, \zeta)$ ($k = 1, 2$) будут иметь вид

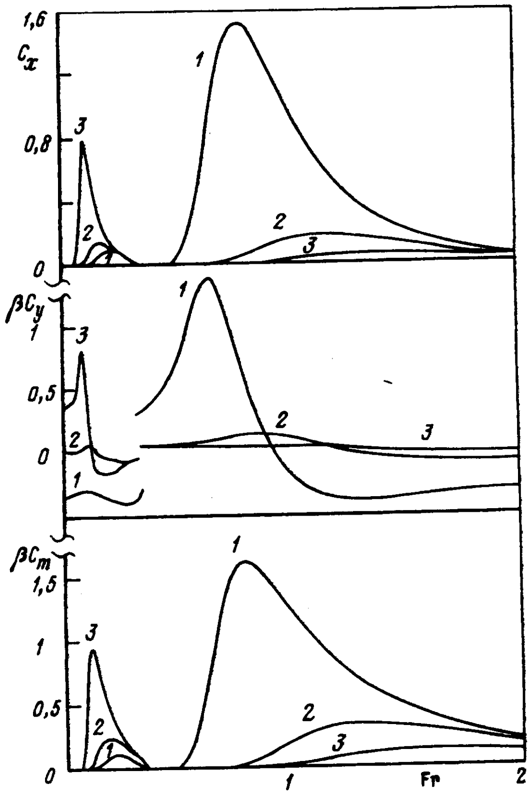
$$K_1(z,\zeta) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{F_1(\lambda)}{T(\lambda)} e^{-i\lambda(z-\xi)} d\lambda - i\frac{F_1(\lambda_1)}{T'(\lambda_1)} e^{-i\lambda_1(z-\xi)}$$

$$K_2(z,\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z-\zeta} - \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z-\overline{\zeta}} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{F_2(\lambda)}{T(\lambda)}\cos\lambda(z-\xi)\, d\lambda - \frac{F_2(\lambda_1)}{T'(\lambda_1)}\sin\lambda_1(z-\xi)$$

$$F_1(\lambda) = 2m_{12}^2\lambda\,\mathrm{sh}\,\lambda\eta e^{2\lambda H}, \quad F_2(\lambda) = 2(\lambda m_{12} - \nu_1)\,\mathrm{sh}\,\lambda\eta, \quad T(\lambda) = \lambda m_{12} - \nu_1 - (\lambda - \nu_1)e^{2\lambda H}$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Фиг. 3. Волновое сопротивление и подъемная сила кругового цилиндра ($b/a = 1$), движущегося в двухслойной жидкости под свободной поверхностью при $\rho_2/\rho_1 = 0{,}97$, $H/a = 4$, $h/a = 2$, *1* – настоящая работа, 2 – [4]

Фиг. 4. Гидродинамические характеристики эллиптического контура ($b/a = 0{,}5$), движущегося в двухслойной жидкости под свободной поверхностью при $\rho_2/\rho_1 = 0{,}97$, $H/a = 4$, $h/a = 1$; 2; 3 (кривые *1–3*), $\beta = -1 - \mathrm{Fr} < \mathrm{Fr}_*$, $\beta = 1 - \mathrm{Fr} < \mathrm{Fr}_*$

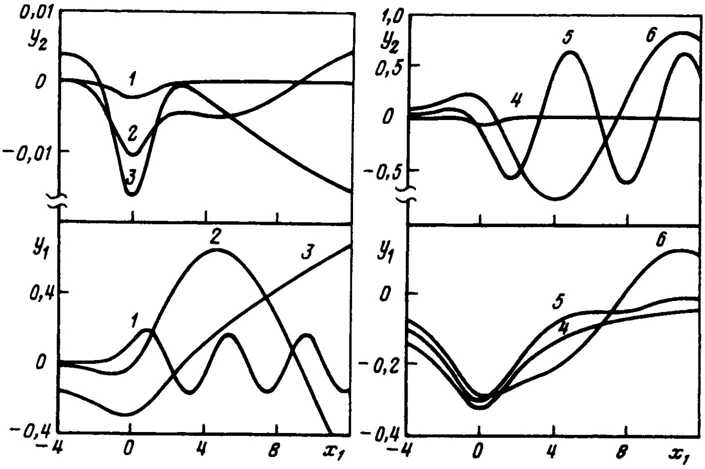
где λ_1 – положительный корень уравнения $T(\lambda) = 0$, существующий при $m_{12}^2 < H\nu_1$.

Результаты расчета волнового сопротивления, подъемной силы, момента относительно центра эллипса представлены на фиг. 3. Обращает на себя внимание разрыв подъемной силы при $\mathrm{Fr}_* = 0{,}3464$ (критическое число Фруда определяется из соотношения $m_{12}^2 = H\nu_1$). На фиг. 4 приведены расчеты формы границы раздела сред. При закритических числах Фруда наблюдается режим обтекания без образования волн в дальнем поле за телом.

3. Рассмотрим наиболее общую задачу обтекания контура потоком двухслойной жидкости, ограниченной сверху свободной поверхностью ($\rho_3/\rho_2 = 0$). Выражения $K_k(z, \zeta)$ $(k = 1, 2)$ имеют вид

$$K_1(z,\zeta) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{F_1(\lambda)}{(\lambda-\nu)T(\lambda)} e^{-i\lambda(z-\xi)} d\lambda - i\frac{F_1(\nu)}{T'(\nu)} e^{-i\nu(z-\xi)} - i\frac{F_1(\lambda_1)}{(\lambda_1-\nu)T'(\lambda_1)} e^{-i\lambda_1(z-\xi)}$$

$$K_2(z,\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z-\zeta} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{F_2(\lambda)}{(\lambda-\nu)T(\lambda)} e^{-i\lambda(z-\bar\zeta)} d\lambda + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{F_3(\lambda)}{T(\lambda)} e^{i\lambda(z-\zeta)} d\lambda -$$



Фиг. 5. Поверхностные и внутренние волны, генерируемые эллиптическим контуром ($b/a = 0{,}5$), движущимся в двухслойной жидкости под свободной поверхностью при $\rho_2/\rho_1 = 0{,}97$, $H/a = 4$, $h/a = 2$, $\mathrm{Fr} = 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}5;\ 1{,}0;\ 1{,}5$ (кривые 1–6)

$$-i\frac{F_2(\nu)}{T'(\nu)}e^{-i\nu(z-\bar\zeta)} - i\frac{F_2(\lambda_1)}{(\lambda_1-\nu)T'(\lambda_1)}e^{-i\lambda_1(z-\bar\zeta)} + i\frac{F_3(\lambda_1)}{T'(\lambda_1)}e^{i\lambda_1(z-\zeta)}$$

$$F_1(\lambda) = 2m_{12}^2\lambda(\lambda\,\mathrm{ch}\,\lambda\eta + \nu\,\mathrm{sh}\,\lambda\eta)e^{2\lambda H}$$

$$F_2(\lambda) = \tfrac{1}{2}(\lambda+\nu)\left((\lambda-\nu m_{12})e^{2\lambda H} - m_{12}(\lambda-\nu)e^{-2\lambda\eta}\right)$$

$$F_3(\lambda) = \tfrac{1}{2}m_{12}\left((\lambda-\nu)e^{-2\lambda\eta} + \lambda + \nu\right)$$

$$T(\lambda) = m_{12}(\lambda+\nu) + (\lambda - m_{12}\nu)e^{2\lambda H}$$

где λ_1 – положительный корень уравнения $T(\lambda) = 0$, который существует при $H\nu m_{12} > m_{12}^1$.

В качестве сравнения полученных результатов с расчетными данными работы [4] на фиг. 3 представлены зависимости волнового сопротивления $D_x = 2R_x/\pi a^2 g\rho_2$ и подъемной силы $D_y = 2R_y/\pi a^2 g\rho_2$ от числа Фруда $\mathrm{Fr}_h = V_\infty/\sqrt{gh}$ для кругового цилиндра, движущегося над границей раздела двух жидкостей $\rho_2/\rho_1 = 0{,}97$ под свободной поверхностью. Представленные результаты рассчитаны при докритических числах Фруда ($\mathrm{Fr}_h = \mathrm{Fr}_{h*} = 0{,}2414$). Как видно из представленного сравнения, полученные результаты хорошо согласуются с известными.

С целью оценки влияния параметров задачи на гидродинамические характеристики контура и форму границ раздела сред был проведен обширный численный эксперимент. Вычислялись волновое сопротивление, подъемная сила, момент относительно центра эллипса. Критическое число Фруда $\mathrm{Fr}_* = 0{,}3413$, определяется из соотношения $H\nu m_{12} = m_{12}^1$. Результаты расчетов представлены на фиг. 4. Для подъемной силы наблюдается разрыв при числе Фруда, равном критическому. Также обращает на себя внимание рост волнового сопротивления с приближением к границе раздела при докритических числах Фруда, при закритических числах Фруда рост происходит с уменьшением отстояния от свободной поверхности. Такое явление объясняется преобладанием внутренних волн при доктритических числах Фруда и поверхностных при закритических (см. фиг. 5, где представлена форма границы раздела сред и свободной поверхности).

Заключение. Поверхностные и внутренние волны оказывают существенное влияние на гидродинамические характеристики контура. Это влияние проявляется особенно сильно в окрестности критического числа Фруда, где наблюдаются разрывы гидродинамических характеристик и качественно меняется форма границ раздела сред, что показывает на неприемлемость линейной теории в этих диапазонах изменения Fr_*.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-00093).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Степанянц Ю.А., Стурова И.В., Теодорович Э.В.* Линейная теория генерации поверхностных и внутренних волн // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. М.: ВИНИТИ, 1987. Т. 21. С. 93–179.
2. *Хабахпашева Т.И.* Плоская задача об обтекании кругового цилиндра равномерным потоком двухслойной жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 1. С. 91–97.
3. *Стурова И.В.* Влияние внутренних волн на гидродинамические характеристики погруженного тела // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1993. Т. 29. № 6. С. 732–738.
4. *Филиппов С.И.* Задача о движении круглого цилиндра под свободной поверхностью двухслойной тяжелой жидкости // Тр. семинара по краевым задачам. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1987. № 23. С. 226–230.
5. *Филиппов С.И.* Движение круглого цилиндра в потоке многослойной весомой жидкости // Тр. семинара по краевым задачам. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1990. № 24. С. 234–240.
6. *Горлов С.И.* Решение линейных задач о равномерном движении вихреисточника в многослойной жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 3. С. 127–132.

Омск

Поступила в редакцию
18.XII.1996