МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 • 1998

УДК 532.59

© 1998 г. В.В. БУЛАТОВ, Ю.В. ВЛАДИМИРОВ

# РАВНОМЕРНАЯ АСИМПТОТИКА ДАЛЬНЕГО ПОЛЯ ВНУТРЕННИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН ПРИ ДВИЖЕНИИ ИСТОЧНИКА В СЛОЕ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ С ПЛАВНО МЕНЯЮЩИМСЯ ДНОМ

Построена равномерная асимптотика дальнего поля внутренних волн при движении точечного источника массы в слое произвольно стратифицированной жидкости с медленно-меняющимся дном. Полученные решения описывают дальнее поле как вблизи волновых фронтов каждой отдельной моды, так и вдали от волновых фронтов и представляют собой разложения по волнам Эйри или Френеля, аргумент которых определяется из решения соответствующего уравнения эйконала. Амплитуда волнового поля определяется из закона сохранения энергии вдоль лучевой трубки. Для модельных распределений формы дна и стратификации, описывающих типичную картину океанского шельфа, получены точные аналитические выражения для лучей и проанализированы особенности фазовой структуры волнового поля.

На распространение внутренних гравитационных волн в стратифицированных природных средах (океан, атмосфера) оказывает влияние горизонтальная неоднородность среды. К числу наиболее характерных горизонтальных неоднородностей реального океана можно отнести изменение рельефа дна, неоднородность поля плотности и изменчивость средних течений. В настоящей работе рассматривается распространение внутренних гравитационных волн в слое произвольно стратифицированной жидкости переменной глубины. Точное аналитическое решение данной задачи, например методом разделения переменных, возможно получить только в том случае, если распределение плотности и форма дна описываются достаточно простыми модельными функциями [1–3]. Когда форма дна и стратификация произвольны, возможно построить только асимптотические представления решения в ближней и дальней зонах, однако для описания поля внутренних волн между этими зонами необходимо точное численное решение задачи [4, 5].

Если глубина океана меняется медленно по сравнению с характерной длиной внутренних волн, что неплохо выполняется в реальном океане [1, 6], то при решении задачи о распространении внутренних волн над переменным дном можно использовать метод геометрической оптики [7, 8]. При использовании асимптотических представлений волнового поля на больших расстояниях от источника [9–11] задача о построении равномерной асимптотики дальнего поля внутренних волн может быть решена с помощью одной из модификаций метода геометрической оптики – методом "вертикальные моды – горизонтальные лучи" [8, 12], в котором не предполагается медленности изменения параметров среды по вертикальной координате. В [8] была рассмотрена задача о поле в окрестности волнового фронта при движении источника в слое переменной глубины. В [9, 10] были построены равномерные асимптотики дальнего поля внутренних волн для случая постоянной глубины. Было показано, что дальнее поле представляет собой сумму мод, каждая из которых заключена внутри своего конуса Маха, и асимптотика каждой моды выражается через функции Эйри (волна Эйри) или интегралы Френеля (волна Френеля). В [12] была построена равномерная асимптотика дальнего поля при движении источника в среде с плотностью $\rho = \rho(x, y, z)$ и в этом случае решение представлялось в виде разложения по волнам Эйри или Френеля.

В данной работе рассмотрена задача о дальнем поле внутренних гравитационных волн, возбуждаемых при движении источника в слое произвольно стратифицированной жидкости с медленноменяющимся дном и построена равномерная асимптотика для отдельной моды возбуждаемого волнового поля.

**1. Постановка задачи и выбор вида решения**. Пусть точечный источник массы движется в слое $-H(\varepsilon x, \varepsilon y) < z < 0$ ($\varepsilon$ – малый параметр) стратифицированной жидкости с частотой Брента – Вяйсяля $N^2(z)$. Предполагается что скорость $V$ движения источника вдоль оси $x$ больше максимальной групповой скорости распространения внутренних волн, т.е. источник движется со сверхкритической скоростью. Из линеаризованной системы уравнений гидродинамики в приближении Буссинеска имеем [1, 8]

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)w + N^2(z)\Delta w = \delta_{tt}''(x+Vt)\delta(y)\delta'(z-z_0)$$

$$\Delta\mathbf{u} + \nabla\frac{\partial w}{\partial z} = \delta(z-z_0)\,\nabla\,(\delta(x+Vt)\delta(y)) \qquad (1.1)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \qquad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$$

где $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ – вектор горизонтальных скоростей, $w$ – вертикальная компонента скорости, $z_0$ – глубина движения источника.

В качестве граничных условий на поверхности используется условие "твердой крышки", на дне $z = -H(\varepsilon x, \varepsilon y)$ имеем условие непротекания [8]

$$w = 0, \quad z = 0$$

$$w = \mathbf{u}\nabla H(\varepsilon x, \varepsilon y), \quad z = -H(\varepsilon x, \varepsilon y) \qquad (1.2)$$

Решение задачи (1.1)–(1.2), исходя из структуры равномерной асимптотики для $H(x, y) = \text{const}$ [9, 10], аналогично [8, 12] будем искать в виде суммы мод, каждая из которых распространяется независимо друг от друга ("адиабатическое приближение") и может быть представлена в виде следующих асимптотических рядов:

$$w = A(\varepsilon x, \varepsilon y, z, \varepsilon t)R_0(\sigma) + \varepsilon^a B(\varepsilon x, \varepsilon y, z, \varepsilon t)R_1(\sigma) + \dots \qquad (1.3)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0(\varepsilon x, \varepsilon y, z, \varepsilon t)R_1(\sigma)\varepsilon^{a-1} + \dots \qquad (1.4)$$

$$R_{i+1}'(\sigma) = R_i(\sigma), \qquad \sigma \equiv (S(\varepsilon x, \varepsilon y, \varepsilon t)/a\varepsilon)^a$$

Функции $S(\varepsilon x, \varepsilon y, \varepsilon t)$, $A(\varepsilon x, \varepsilon y, z, \varepsilon t)$, $\mathbf{u}_0(\varepsilon x, \varepsilon y, z, \varepsilon t)$ в (1.3), (1.4) подлежат определению. Аргумент $\sigma(x, y, t)$ считаем порядка единицы. Функция $R_0(\sigma)$ в зависимости от наличия однородного (нестратифицированного) подстилающего слоя выражается через функцию Эйри (волна Эйри) или интегралы Френеля (волна Френеля) [9–12]. В дальнейшем без ограничения общности рассмотрим, например, распространение возвышения $\eta$($w = \partial\eta/\partial t$) волны Френеля

$$R_0(\sigma) = \mathrm{Re}\int_0^\infty \exp\left(-it\sigma - i\frac{t^2}{2}\right)dt \equiv \Phi(\sigma), \qquad a = 1/2$$

**2. Уравнение эйконала и характеристики. Геометрия фазовой структуры волнового**

**поля**. Перейдем к определению функции $S$. Подставляя (1.3), (1.4) в (1.1), с точностью до членов порядка $\varepsilon^{3/2}$ можно получить

$$\mathbf{u}_0 = -A_z'\sqrt{2S}\,\frac{\nabla S}{\varepsilon}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2\right)^{-1} + O(\varepsilon^{3/2}) \tag{2.1}$$

Подставив (1.3), (2.1) в (1.1), (1.2) и приравняв члены при одинаковых степенях $\varepsilon$, получаем при $\varepsilon^{1/2}$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + |\mathbf{k}|^2\left(\frac{N^2(z)}{\omega^2} - 1\right)A = 0$$

$$A = 0, \quad z = 0, \quad -H(x, y) \tag{2.2}$$

$$\mathbf{k} \equiv (p, q) = -\nabla S, \quad \omega = \partial S/\partial t$$

Дисперсионная зависимость, обозначаемая далее через $K(\omega, x, y)$, определяется из решения вертикальной спектральной задачи (2.2), $\omega$ – спектральный параметр. Тогда для определения функции $S$ имеем уравнение эйконала

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 = K^2(\omega, x, y) \tag{2.3}$$

Уравнение (2.3) есть уравнение Гамильтона – Якоби с гамильтонианом $|\mathbf{k}|^2 - K^2(\omega, x, y)$ и характеристическая система этого уравнения имеет вид [12, 13]

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{p}{K(\omega,x,y)K_\omega'(\omega,x,y)}, \quad \frac{dy}{d\tau} = \frac{q}{K(\omega,x,y)K_\omega'(\omega,x,y)}$$

$$\frac{dp}{d\tau} = \frac{K_x'(\omega,x,y)}{K_\omega'(\omega,x,y)}, \quad \frac{dq}{d\tau} = \frac{K_y'(\omega,x,y)}{K_\omega'(\omega,x,y)}, \quad \frac{d\omega}{d\tau} = 0 \tag{2.4}$$

Решив характеристическую систему (2.4) с соответствующими начальными условиями, получаем двухпараметрическое семейство пространственно-временных лучей, зависящее от лучевых координат $l$, $m$, причем выбор начальных условий и лучевых координат определяется конкретным видом решаемой задачи. Тогда эйконал в лучевых координатах $S^*(l, m) \equiv S(x, y, t)$ можно найти путем интегрирования вдоль этих лучей [12].

В качестве модельного примера, допускающего аналитическое решение системы (2.4) и в то же время качественно верно описывающего реальный рельеф дна, рассмотрим следующий. Пусть частота Брента – Вяйсяля постоянна $N(z) = N = \mathrm{const}$ и глубина дна зависит только от одной координаты $y$ линейным образом $H(y) = \beta y$. Введем систему координат с осью $x$, идущей вдоль берега $y = 0$. Пусть точечный источник массы движется справа налево в отрицательном направлении оси $x$ со скоростью $V$ на расстоянии $y_0$ от берега и при этом в каждый момент времени $t$ излучает волны всех частот в диапазоне $0 < \omega < N$. Будем рассматривать первую моду. Далее при $N(z) = \mathrm{const}$ из (2.2) имеем

$$p^2 + q^2 = K^2(\omega, y), \quad K(\omega, y) = \frac{\pi\omega}{H(y)\sqrt{N^2 - \omega^2}}$$

Так как функция $K(\omega, y)$ не зависит от $x$, то из (2.4) получим

$$\frac{dp}{d\tau} = 0, \quad p = \frac{\omega}{V} = \mathrm{const}, \quad q = \pm\sqrt{K^2(\omega, y) - \frac{\omega^2}{V^2}}$$

Тогда характеристическая система и начальные условия для уравнения эйконала будут иметь вид

$$\frac{dx}{d\tau}=\frac{\alpha^2\gamma^2}{V^2}y^2, \quad \frac{dy}{d\tau}=\pm\alpha^{3/2}\gamma y\sqrt{1-\frac{\alpha\gamma^2 y^2}{V^2}} \tag{2.5}$$

$$x=Vt_0, \quad t=t_0, \quad y=y_0, \quad t=t_0$$

$$\alpha=1-\frac{\omega^2}{N^2}, \quad \gamma=\frac{N\beta}{\pi}$$

Здесь и далее верхний знак соответствует области $y > y_0$, нижний – области $y < y_0$. Интегрируя систему (2.5), получаем уравнения лучей

$$y=\frac{V}{\gamma\sqrt{\alpha}}\left[\mathrm{ch}\left(\pm\mathrm{arch}\left(\frac{V}{\gamma\sqrt{\alpha}y_0}\right)-\gamma\alpha^{3/2}(t-t_0)\right)\right]^{-1}$$

$$x=x_0\pm y_0\sqrt{\frac{V^2}{\alpha\gamma^2 y_0^2}-1}-\frac{V}{\gamma\sqrt{\alpha}}\mathrm{th}\left(\pm\mathrm{arch}\left(\frac{V}{\gamma\sqrt{\alpha}y_0}\right)-\gamma\alpha^{3/2}(t-t_0)\right)$$

$$x=x_0+\frac{\gamma\sqrt{\alpha}}{V}yy_0\,\mathrm{sh}(\gamma\alpha^{3/2}(t-t_0)) \tag{2.6}$$

Лучи (2.6), как следует из (2.4), это линии в пространстве $x$, $y$, на которых частота $\omega$ постоянна.

Так как максимум групповой скорости распространения внутренних волн достигается при $\omega = 0$ [1, 9] ($\alpha = 1$), то положение волнового фронта в движущейся вместе с источником системе координат ($\xi = x + Vt$) определяется из уравнения [8]

$$\frac{d\xi}{dy}=\pm\frac{\sqrt{V^2-(\gamma y)^2}}{\gamma y}, \quad \xi(y_0)=0 \tag{2.7}$$

Решение (2.7) имеет вид

$$\xi=\pm\frac{V}{\gamma}(d_1(y)-d_2(y))$$

$$d_1(y)=\mathrm{arch}\left(\frac{V}{\gamma y_0}\right)-\mathrm{arch}\left(\frac{V}{\gamma y}\right)$$

$$d_2(y)=\sqrt{1-\left(\frac{\gamma y_0}{V}\right)^2}-\sqrt{1-\left(\frac{\gamma y}{V}\right)^2}$$

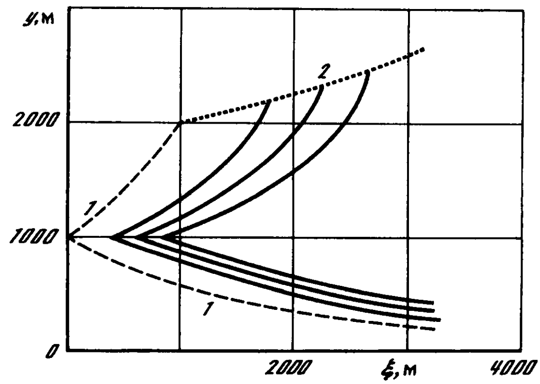
Эйконал $S^*$ имеет вид

$$S^*=\omega(t-t_0)+\int_{t_0}^{t}\frac{K(\omega,y(\tau,t_0,\omega))}{K'_\omega(\omega,y(\tau,t_0,\omega))}d\tau=\omega(t-t_0)-\omega\alpha(t-t_0)=\frac{\omega^3}{N^2}(t-t_0)$$

Тогда в движущейся вместе с источником системе координат линии равной фазы, т.е. линии постоянного значения эйконала $S^*$, имеют вид

$$y=\frac{V}{\gamma\sqrt{\alpha}}\left[\mathrm{ch}\left(\pm\mathrm{arch}\left(\frac{V}{\gamma\sqrt{\alpha}y_0}\right)-\gamma\alpha^{3/2}T\right)\right]^{-1}$$

$$\xi=VT-\frac{\gamma\sqrt{\alpha}}{V}yy_0\,\mathrm{sh}(\gamma\alpha^{3/2}T), \quad T=\frac{S^*N^2}{\omega^3} \tag{2.8}$$




Фазовая структура волнового поля в движущейся системе координат. Штриховая линия 1 – волновой фронт; сплошные линии – изолинии фазы, соответствующие первым трем корням уравнения $\Phi'(S) = 0$, т.е. первым трем пучностям волны Френеля; пунктирная линия 2 – огибающая семейства лучей

На фигуре представлены результаты расчетов для следующих параметров, близких к параметрам реального шельфа [6]: $\beta = 0{,}1$, $N = 0{,}01$ с$^{-1}$, $y_0 = 1000$ м, $V = 2N\beta y_0/\pi$. Представленная на фигуре огибающая семейства лучей, каустика, суть геометрическое место точек $\xi = \xi(y)$, удовлетворяющих (2.8) и условию $\xi'(y) = 0$. Следовательно, волна Френеля с определенным значением фазы $S^*$ имеет соответствующие критические значения по переменной $y$, ограничивающие ее область распространения от траверза движения источника. Как видно из представленных численных результатов, с ростом фазы $S^*$ расширяется (по переменной $y$) зона проникновения лучей.

Таким образом, с увеличением расстояния $y$ от траверза движения источника в приходящем волновом поле уменьшается доля низкочастотных составляющих, т.е. волн Френеля с малыми значениями фазы (групповая скорость уменьшается с ростом частоты) и выбранной зависимостью рельефа дна (групповая скорость растет с удалением от берега $y = 0$), в связи с чем относительно высокочастотные компоненты поля с меньшей групповой скоростью имеют возможность распространяться на бóльшие расстояния по $y$ от берега, чем низкочастотные.

**3. Закон сохранения энергии и определение амплитудной зависимости**. Для определения амплитудной зависимости $A$ подставим (1.3), (1.4) в (1.1), (1.2) и приравняем члены порядка $\varepsilon^{3/2}$. В результате, воспользовавшись свойствами интегралов Френеля, получим

$$\omega^2 B''_{zz} + |\mathbf{k}|^2 (N^2(z) - \omega^2) B = (N^2(z) - \omega^2)(2\nabla S \nabla^* A + A\Delta S) + \tag{3.1}$$

$$+2\omega\left(\frac{\partial^*}{\partial t} A''_{zz} - |\mathbf{k}|^2 \frac{\partial^* A}{\partial t}\right) + \frac{\partial^* \omega}{\partial t}(A''_{zz} - |\mathbf{k}|^2 A) - 4\omega A \nabla S \nabla^* \omega$$

$$B = 0, \quad z = 0 \tag{3.2}$$

$$B = 2\nabla S \nabla HA'_z \sqrt{S}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2\right)^{-1}, \quad z = -H(x, y)$$

$$\nabla^* = \nabla + \frac{\partial}{\partial \omega}\nabla\omega, \quad \frac{\partial^*}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial t}$$

Представим далее функцию $A(x, y, z, t)$ в виде

$A(x, y, z, t) = \psi(x, y, \omega(x, y, t))f(x, y, z, \omega(x, y, t))$

где $f$ есть нормированная собственная функция задачи (2.2)

$$\int\limits_{-H(x,y)}^{0} (N^2(z)-\omega^2)f^2(x,y,z,\omega)dz = 1$$

Далее рассмотрим уравнение (3.1) на характеристиках (2.4), в этом случае функция $|\mathbf{k}| = K(\omega, x, y)$ считается известной. Умножим (3.1) на $A$ и проинтегрируем по переменной $z$ в пределах от $-H(x, y)$ до нуля. В результате после довольно громоздких преобразований получим

$$\psi^2 \frac{\partial^*}{\partial t}(KK'_\omega) + KK'_\omega \frac{\partial^* \psi^2}{\partial t} + 2\omega K'_\omega \psi^2 \frac{\partial^*}{\partial t}\left(\frac{K}{\omega}\right) + 2\frac{\omega}{K}\psi^2 \nabla S \nabla^* \left(\frac{K}{\omega}\right) +$$
$$+\psi^2 \Delta S + \nabla S \nabla^* \psi^2 = 2 \nabla H \nabla S \frac{\omega^2}{K^2}(A'_z(x,y,-H(x,y),t))^2 \qquad (3.3)$$

Воспользуемся далее горизонтальными свойствами задачи (2.2), считая $\omega$ фиксированным спектральным параметром. Применим оператор $\nabla$ к (2.2), в результате получим

$$(\nabla A)''_{zz} + K^2(\omega,x,y)\left(\frac{N^2(z)}{\omega^2}-1\right)\nabla A + A \nabla \left(K^2(\omega,x,y)\left(\frac{N^2(z)}{\omega^2}-1\right)\right) = 0 \qquad (3.4)$$

Умножим (3.4) на $A$, проинтегрируем по $z$ в пределах от $-H(x, y)$ до нуля. Тогда с учетом (3.2) будем иметь

$$(A'_z(x,y,-H(x,y),t))^2 \nabla H(x,y) =$$
$$= -\nabla\left(\frac{K^2}{\omega^2}\right) \int\limits_{-H(x,y)}^{0} (N^2(z)-\omega^2)A^2(x,y,z,t)dz = -\nabla\left(\frac{K^2}{\omega^2}\right)\psi^2$$

В результате выражение (3.3) можно представить в виде

$$\frac{d\ln\psi^2}{dt} + \frac{d}{dt}\ln\frac{K^2}{\omega^2} - 2\frac{\nabla S \nabla \ln(K^2\omega^{-2})}{KK'_\omega} - \frac{\partial^*}{\partial t}\ln(KK'_\omega) - \frac{\Delta S}{KK'_\omega} = 0$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial^*}{\partial t} + \frac{\nabla S}{KK'_\omega}\nabla^*$$

Здесь $d/dt$ – производная вдоль характеристик (2.4). Так как вдоль характеристик частота $\omega$ сохраняется, то

$$\frac{d}{dt}\ln\left(\frac{K^2}{\omega^2}\right) = \frac{\nabla S \nabla \ln(K^2\omega^{-2})}{KK'_\omega}$$

Отсюда можно получить

$$\frac{d}{dt}\ln\left(\frac{\psi^2}{K^2}\right) + \frac{\Delta S}{KK'_\omega} + \frac{\partial^*}{\partial t}\ln(KK'_\omega) = 0$$

Далее имеем

$$\frac{\Delta S}{KK'_\omega} + \frac{\partial^*}{\partial t}\ln(KK'_\omega) = \frac{\Delta S}{KK'_\omega} + \frac{\partial^*}{\partial t}\ln(KK'_\omega) + \frac{\nabla S}{KK'_\omega}\nabla^* \ln(KK'_\omega) - \frac{\nabla S}{KK'_\omega}\nabla^* \ln(KK'_\omega) =$$
$$= \frac{d}{dt}\ln(KK'_\omega) + \frac{\Delta S}{KK'_\omega} - \frac{\nabla S}{KK'_\omega}\nabla^* \ln(KK'_\omega) = \frac{d}{dt}\ln(KK'_\omega) + \nabla^* \mathbf{c}, \quad \mathbf{c} = -\frac{\nabla S}{KK'_\omega}$$

где $\mathbf{c}$ – вектор групповой скорости распространения внутренних волн. Тогда с учетом того, что на характеристиках (2.4) $\nabla^*\mathbf{c} = \operatorname{div}\mathbf{c}$, окончательно получаем

$$\frac{d}{dt}\ln\left(\frac{\psi^2 K'_\omega}{K}\right) + \operatorname{div}\mathbf{c} = 0 \tag{3.5}$$

Согласно теореме Лиувилля [13, 14], уравнение (3.5) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}\ln(D\psi^2 K'_\omega K^{-1}) = 0 \tag{3.6}$$

Здесь $D$ – якобиан перехода от лучевых координат к декартовым координатам.

Необходимо подчеркнуть, что полученный закон сохранения (3.6), в отличие от случая движения источника в стратифицированной среде с плотностью $\rho = \rho(x, y, z)$ [12], можно трактовать как закон сохранения волновой энергии вдоль лучевой трубки. Действительно, из осредненных уравнений гидродинамики следует, что если невозмущенная плотность является функцией горизонтальных координат, то из существования стационарного распределения плотности $\rho = \rho(x, y, z)$ следует существование стационарных течений. Однако вследствие медленности этих течений ими можно пренебречь в первом приближении. Поэтому обычно считается, что $\rho = \rho(x, y, z)$ есть некоторое фоновое поле плотности, сформировавшееся под воздействием массовых сил и неадиабатических источников и задается а приори, например, из эксперимента [1]. Поэтому вследствие неравновесности среды при $\rho = \rho(x, y, z)$ поток энергии непостоянен вдоль лучевой трубки. Однако рассматриваемая в настоящей работе система источник – неровное дно является консервативной, нет притока энергии извне, поэтому закон (3.6) есть закон сохранения волновой энергии вдоль лучевой трубки.

**4. Лучевая и амплитудная структуры решения в слое постоянной глубины.** Перейдем к описанию лучевой и амплитудной структур решения при движении источника возмущений в слое стратифицированной жидкости постоянной глубины, что даст в дальнейшем возможность построить равномерную асимптотику отдельной моды. Пусть точечный источник массы, движущийся в отрицательном направлении оси $x$ со скоростью $V$, проходит начало координат в момент $t = 0$. В каждый момент времени источник излучает волны всех частот в диапазоне $0 < \omega < \max_z N(z)$. Частота $\omega$ сохраняет свое значение вдоль луча, имеющего направление вектора $\mathbf{k} = (p, q)$, где

$$p = \frac{\omega}{V}, \quad q = (K^2(\omega) - \omega^2 V^{-2})^{1/2} \equiv \lambda(\omega)$$

Далее необходимо выписать уравнения лучей. В качестве лучевых координат удобно взять частоту $\omega$ и момент выхода луча из источника $t_0$. Лучи в данном случае ($H(x, y) = \text{const}$) суть прямые линии

$$x = -Vt_0 - \frac{\omega(t - t_0)}{VK(\omega)K'(\omega)}, \quad y = \frac{\lambda(\omega)(t - t_0)}{K(\omega)K'(\omega)} \tag{4.1}$$

Используя (4.1), выпишем выражение для якобиана $D$ и эйконала $S^*$ в лучевых координатах

$$D(t, t_0, \omega) = D(t - t_0, \omega) = V\frac{\partial^2\lambda(\omega)}{\partial\omega^2}\left(\frac{\lambda(\omega)}{K(\omega)K'(\omega)}\right)^2 (t - t_0) \tag{4.2}$$

$$S(x, y, t) = S^*(t, t_0, \omega) = S^*(t - t_0, \omega) = \left(\omega - \frac{K(\omega)}{K'(\omega)}\right)(t - t_0)$$

Необходимо отметить, что в движущейся вместе с источником системе координат семейство лучей является однопараметрическим с параметром $\omega$ и представляет собой веер лучей, исходящих из источника и заключенных внутри угла с полураствором, равным $\mathrm{arctg}(c_0/\sqrt{V^2-c_0^2}$, $c_0 = 1/K'(0)$. Уравнения лучей в этой системе координат имеют вид

$$\xi = \frac{\omega(t-t_0)}{VK(\omega)K'(\omega)}, \quad y = \frac{\lambda(\omega)(t-t_0)}{K(\omega)K'(\omega)}$$

где $\xi = x + Vt$ – расстояние от источника до точки наблюдения, измеренное вдоль оси $x$ в движущейся системе координат.

Выражение для эйконала $S^*$ в движущейся системе координат имеет вид

$$S^* = \frac{\omega}{V}\xi - \lambda(\omega)y \equiv \mu(\lambda)\xi - \lambda y$$

Равномерная асимптотика возвышения $\eta$ при движении источника в стратифицированном слое постоянной глубины имеет вид [10]

$$\eta = Q(\xi, \lambda, z, z_0)\Phi(\sigma), \quad \sigma = \sqrt{2\xi(\mu(\lambda) - \mu'(\lambda)\lambda)}$$

$$Q(\xi,\lambda,z,z_0) = \frac{V\mu^2(\lambda)\varphi(z,\lambda)}{\sqrt{2\mu''(\lambda)\xi}(\mu^2(\lambda)+\lambda^2)}\frac{\partial\varphi(z_0,\lambda)}{\partial z_0}$$

$$\int\limits_{-H}^{0} N^2(z)\varphi^2(z,\lambda)dz = 1, \quad \varphi^2 = f^2\frac{K(\omega)}{\omega K'(\omega)}$$

Далее, воспользовавшись следующими равенствами

$$\mu'(\lambda) = \frac{1}{V\lambda'(\omega)}, \quad \mu''(\lambda) = -\frac{\lambda''(\omega)}{V(\lambda'(\omega))^3}$$

$$K'(\omega) = \frac{\lambda(\omega)\lambda'(\omega) + \omega V^{-2}}{K(\omega)}$$

получим выражение для $\eta$ в лучевых координатах

$$\eta(t,t_0,\omega) = Q^*(t,t_0,\omega)\Phi(\sigma^*), \quad \sigma^* = \sqrt{2S^*(t,t_0,\omega)} \tag{4.3}$$

$$Q^*(t,t_0,\omega) = \frac{\omega f(z,\omega)\sqrt{K(\omega)K'(\omega)}}{V\lambda(\omega)\sqrt{2|\lambda''(\omega)|\lambda(\omega)(t-t_0)}}\frac{\partial f(z_0,\omega)}{\partial z_0}$$

Отсюда имеем явное выражение для амплитуды $\psi$ для случая слоя постоянной глубины

$$\psi = \frac{\omega\sqrt{K(\omega)K'(\omega)}}{V\lambda(\omega)\sqrt{2|\lambda''(\omega)|\lambda(\omega)(t-t_0)}}\frac{\partial f(z_0,\omega)}{\partial z_0} \tag{4.4}$$

**5. Равномерная асимптотика отдельной моды**. Закон сохранения (3.6) можно переписать в лучевых координатах $l$, $t_0$ в виде

$$D(t,t_0,l)\psi^2(t,t_0,l)\frac{K'_\omega(t,t_0,l)}{K(t,t_0,l)} = E(t_0,l) \tag{5.1}$$

где $E(t_0, l)$ – некоторая функция, определяемая конкретным видом решаемой задачи и которую можно найти, используя решение задачи о движении точечного источника массы в слое стратифицированной жидкости постоянной глубины. Для этого воспользуемся принципом локальности, т.е. будем считать, что на типичных расстояниях, на которых верна равномерная асимптотика (4.3) в слое постоянной глубины (порядка нескольких толщин слоя (5, 10, 11]), глубину дна можно считать локально-постоянной. Таким образом, на этих расстояниях слой стратифицированной жидкости имеет локально-постоянную глубину. В этом случае функцию, стоящую в правой части (5.1), можно вычислить, предполагая локальное постоянство глубины с "замороженными" горизонтальными параметрами.

Пусть в момент $t = t_0$ движущийся источник находится в точке $x_0$, $y_0$, $z_0$. Тогда, используя (4.2), (4.4), можно получить

$$E(t_0,\omega)=\frac{\omega^2}{2V\lambda(\omega,x_0,y_0)K^2(\omega,x_0,y_0)}\left(\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0,\omega)}{\partial z_0}\right)^2$$

В результате первый член равномерной асимптотики возвышения волны Френеля при движении источника в слое стратифицированной жидкости с медленноменяющимся дном будет иметь вид

$$\eta = \eta_0\Phi(\sigma^*)f(x, y, z, \omega), \quad \sigma^* = \sqrt{2S(t, t_0, \omega)}$$

$$\eta_0(t,t_0,\omega)=\omega\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0,\omega)}{\partial z_0}(2V\lambda(\omega,x_0,y_0)K^2(\omega,x_0,y_0))^{-1/2}\left(\frac{K(\omega,x,y)}{K'_\omega(\omega,x,y)D(t,t_0,\omega)}\right)^{1/2}$$

$$x = x(t, t_0, \omega), \quad y = y(t, t_0, \omega)$$

Таким образом, полученное решение в наиболее общем виде описывает равномерную асимптотику дальнего поля внутренних гравитационных волн при движении источника над медленноменяющимся дном, так как при $H(x, y) = \mathrm{const}$ это решение совпадает с равномерной асимптотикой [10]. При больших значениях $\sigma^*$ (вдали от волнового фронта), воспользовавшись асимптотическим поведением интегралов Френеля при больших значениях аргумента [15], можно получить представление решения в виде разложения по локально-гармоническим волнам [7]. При малых значениях $\sigma^*$ полученные решения описывают асимптотику поля в окрестности волнового фронта отдельной моды.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01120).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Миропольский Ю.З.* Динамика внутренних гравитационных волн в океане. Л.: Гидрометеоиздат, 1981. 302 с.
2. *Мельников В.А.* Влияние рельефа дна на внутренние волны // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1982. Т. 18. № 7. С. 775–778.
3. *Бежанов К.А., Заец П.Г., Онуфриев А.Т., Тер-Крикоров А.М.* Пространственная задача обтекания неровности дна потоком экспоненциально стратифицированной жидкости конечной глубины // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 3. С. 101–111.
4. *Булатов В.В.* Установившееся движение стратифицированной жидкости над неровным дном // ПМТФ. 1991. № 5. С. 34, 39.
5. *Borovikov V.A., Bulatov V.V., Vladimirov Y.V.* Internal gravity waves excited by a body moving in a stratified fluid // Fluid Dynam. Res. 1995. V. 15. № 5. P. 325–336.
6. *Навроцкий В.В., Лазарюк А.Ю., Малышев А.А.* Особенности структуры гидрофизических характеристик и внутренних волн вблизи границ шельфа // Докл. АН СССР. 1989. Т. 309. № 1. С. 187–191.
7. *Keller J.B., Van C. Mow.* Internal wave propagation in a inhomogeneous fluid of non-uniform depth // J. Fluid Mech. 1969. V. 38. Pt 2. P. 365–374.
8. *Владимиров Ю.В.* Поле внутренних волн в окрестности фронта, возбужденное источником, движущимся над плавно меняющимся дном // ПМТФ. 1989. № 4. С. 89–94.
9. *Боровиков В.А., Владимиров Ю.В., Кельберт М.Я.* Поле внутренних гравитационных

волн, возбуждаемых локализованными источниками // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1984. Т. 20. № 6. С. 526–532.
10. *Боровиков В.А., Булатов В.В., Кельберт М.Я.* О промежуточной асимптотике дальнего поля внутренних волн в слое стратифицированной жидкости, лежащем на однородном слое // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 3. С. 158–162.
11. *Боровиков В.А., Булатов В.В.* О границах применимости асимптотических формул для поля внутренних волн, возбуждаемых движущимся источником // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1986. Т. 22. № 6. С. 658–661.
12. *Булатов В.В., Владимиров Ю.В.* Внутренние гравитационные волны, возбуждаемые источником в стратифицированных, неоднородных по горизонтали средах // Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 1. С. 124–128.
13. *Бабич В.М., Булдырев В.С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972. 456 с.
14. *Федорюк М.В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985. 447 с.
15. *Люк Ю.Л.* Специальные математические функции и их аппроксимации. М.: Мир, 1980. 608 с.

Москва

Поступила в редакцию
30.IX.1996