

УДК 532.517.013.4:537.2

© 1998 г. В.Я. ШКАДОВ, А.А. ШУТОВ

## УСТОЙЧИВОСТЬ ПОВЕРХНОСТНО ЗАРЯЖЕННОЙ ВЯЗКОЙ СТРУИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

В линейном приближении исследована устойчивость поверхностно заряженной цилиндрической струи в продольном однородном электрическом поле относительно капиллярных возмущений. Проанализирована эволюция как осесимметричных, так и периодических по азимутальному углу возмущений. В последнем случае рассмотрены первые две моды по азимутальному волновому числу – изгибная и боровская. Осесимметричные и изгибные неустойчивости приводят к поперечному распаду струи на отдельные капли, а боровская мода – к продольному делению исходной струи на две. Найдено, что внешним продольным полем можно полностью подавить осесимметричные неустойчивости и значительно ослабить изгибные. В этом случае возрастает роль боровской моды, которая при определенных условиях приводит к длинноволновому продольному расщеплению струи. В экспериментах с испаряющимися микроструями полимерных растворов зафиксированы события, которые интерпретируются как проявления продольного деления струи (гантелеобразность поперечного сечения, узлы ветвления).

Изучается возможность полной стабилизации вязких струй относительно капиллярных неустойчивостей под влиянием электрических сил. Объемно заряженная и незаряженная диэлектрическая струи в продольном поле и заряженный идеальный проводник относительно осесимметричных возмущений свойством полной стабилизации не обладают [1–3]. В случае объемно заряженного диэлектрика в продольном поле с ростом заряда максимум инкремента сдвигается в сторону коротких волн, а с ростом напряженности поля – в длинноволновую часть. Хотя с ростом напряженности величина наибольшего показателя неустойчивости падает, затухание возмущений на всех длинах волн одновременно ни при каких значениях параметров задачи не наблюдается [1]. У проводящей и диэлектрической струй также всегда существуют области неустойчивости осесимметричной моды, которые расположены соответственно в коротковолновой и длинноволновой частях спектра возмущений, при этом в случае поверхностного заряда проводника в отличие от объемно заряженного диэлектрика длинноволновые возмущения сильно затухают [2–3]. Эти данные позволяют надеяться, что при совместном влиянии как диэлектрических свойств, так и взаимодействий между поверхностными зарядами можно создать условия для подавления неустойчивостей во всем спектре возмущений.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим течение со свободной границей поверхностно заряженной жидкости во внешнем электрическом поле. Анализ будем проводить в приближении замороженного заряда [4, 5].

Поскольку объемный заряд отсутствует, то электрическое воздействие на струю осуществляется через границу и система уравнений в цилиндрических координатах  $r, \theta, z$  имеет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) v - \frac{w^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + v \left( \Delta v - \frac{v}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) w - \frac{vw}{r} &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + v \left( \Delta w - \frac{w}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) u &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + v \Delta u \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} &= 0 \\ \Delta \varphi &= 0 \\ (\mathbf{v} \nabla) \Phi &= v \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + u \frac{\partial \Phi}{\partial z} \\ \Delta \Phi &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $u, v, w$  – продольная, радиальная и азимутальная скорости,  $\varphi$  – потенциал электрического поля,  $\rho$  – плотность,  $v$  – кинематическая вязкость,  $\Phi$  – произвольная функция. На свободной границе  $r = f(t, z, \theta)$  ставятся условия

$$v = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{w}{f} \frac{\partial f}{\partial \theta} \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\sigma f) + \frac{\partial}{\partial z} (\sigma f u) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\sigma w) = 0 \quad (1.3)$$

$$\varphi^e = \varphi^i, \quad D_n^e - D_n^i = \sigma \quad (1.4)$$

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{F}_e - T \mathbf{K} \mathbf{n}, \quad K = \frac{1}{f} - f''_{zz} - \frac{f''_{\theta\theta}}{f^2} \quad (1.5)$$

$$\mathbf{F}_e = D_n^e \mathbf{E}^e - D_n^i \mathbf{E}^i - (D^e E^e - D^i E^i) \mathbf{n} / 2 \quad (1.6)$$

Здесь и далее слагаемые, пропорциональные  $f'^2$  опущены,  $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$  – напряженность электрического поля,  $\mathbf{D} = \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E}$ ,  $\epsilon, \epsilon_0$  – диэлектрические константы,  $\sigma$  – поверхностная плотность заряда,  $T$  – поверхностное натяжение,  $\mathbf{p}_n$  – вектор натяжений жидкости,  $\mathbf{F}_e$  – электрическая сила, действующая на единицу площади,  $\mathbf{n}$  – вектор внешней к струе нормали, верхние индексы  $e, i$  относятся к точкам вне и внутри жидкости соответственно. Уравнение (1.2) служит для определения неизвестной границы, соотношение (1.3) описывает изменение вмороженного заряда вдоль свободной поверхности движущейся жидкости.

**2. Стационарное осесимметричное течение.** В случае осесимметричного течения в струе имеем

$$u = \frac{1}{r} \psi_r, \quad v = -\frac{1}{r} \psi_z, \quad w = 0 \quad (2.1)$$

Кинематические условия на границе (1.2) и (1.3) записываются в виде

$$\psi = Q/2\pi, \quad I = 2\pi f u \sigma = 2\sigma Q_1/f, \quad Q_1 = \pi f^2 u \quad (2.2)$$

где равенство (2.2) для функции тока  $\psi$  эквивалентно соотношению  $f' = v/u$ ,  $I = \text{const}$  – переносимый струей электрический ток,  $Q = \text{const}$  – объемный расход жидкости через произвольное поперечное сечение струи. Предполагаем, что жидкость находится в однородном электрическом поле напряженности  $E_0$ , параллельном оси струи. Суммарное электрическое поле является суперпозицией внешнего однородного поля и поля поверхностных зарядов. В случае слабоменяющегося профиля струи

$f'(z) \ll 1$  последнее близко к полю заряженного цилиндра постоянного радиуса. Тогда, пренебрегая искажением продольного внешнего поля поверхностным зарядом, имеем  $E_n^i = 0$ ,  $E_n^e = \sigma / \epsilon_0$ ,  $E_\tau^i = E_\tau^e = E_0$ , где индекс  $\tau$  обозначает касательное к поверхности направление, лежащее в плоскости  $rz$ .

Для координат, скоростей и давления используем следующие масштабы:

$$r_0, \quad Q / \pi r_0^2, \quad \rho Q^2 / \pi^2 r_0^4$$

где  $r_0 = f(z=0)$  – начальный радиус струи. В безразмерных переменных система (1.1) и граничные условия (1.2), (1.5) с учетом (2.1) принимают вид

$$v \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2.3)$$

$$v \frac{\partial v}{\partial r} + u \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r v + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r v = 0, \quad \psi = 1/2 \quad (2.5)$$

$$-p + \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{2f'}{\text{Re}} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{1}{\text{We}} \left( \frac{1}{f} - f'' \right) + \beta f^2 + \alpha \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} + \left( \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) f' = \gamma \quad (2.7)$$

$$\text{Re} = \frac{\rho Q}{\pi r_0 \mu}, \quad s = \frac{\rho Q^3}{\pi^2 I E_0 r_0^5}, \quad \text{We} = \frac{\rho Q^2}{\pi^2 r_0 T},$$

$$\alpha = \pi^2 r_0^4 \epsilon_0 (\epsilon - 1) \frac{E_0^2}{2\rho Q^2}, \quad \beta = \frac{\pi^2 r_0^6 I^2}{2\rho Q^4 \epsilon \epsilon_0}, \quad \gamma = \frac{\pi \sigma E_0 r_0^3}{\mu Q} \quad (2.8)$$

Условия равенства натяжений (2.6) и (2.7) представлены для нормального и касательного направлений к границе соответственно.

В выражении для  $\gamma$  использовано соотношение  $E_\tau = \sigma E_0$ , которое легко выводится из (1.6) с помощью полученных значений  $E_n^i$ ,  $E_n^e$ ,  $E_\tau^i$ ,  $E_\tau^e$ . Определяя  $\sigma$  из (2.2), можно привести  $\gamma$  к виду

$$\sigma = \frac{If}{2Q} \left( \frac{Q}{Q_1} \right), \quad \gamma = \pi \frac{I E_0 f r_0^3}{2\mu Q^2} \left( \frac{Q}{Q_1} \right)$$

Далее рассмотрим движение жидкости в сильном электрическом поле, т.е. при условии  $s \ll 1$ . В уравнениях (2.4)–(2.8) выполним преобразования, не меняющие вида соотношения (2.5)

$$z \rightarrow z, \quad r \rightarrow s^{1/4} r, \quad u \rightarrow s^{-1/2} u, \quad v \rightarrow s^{-1/4} v, \quad \psi \rightarrow \psi, \quad p \rightarrow s^{-1} p, \quad f \rightarrow s^{1/4} f \quad (2.9)$$

Заменив в (2.3), (2.4), (2.7) переменные по формулам (2.9) и выделив главные слагаемые по малому параметру  $s$ , получаем

$$v \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (2.10)$$

$$\sqrt{s} \left( v \frac{\partial v}{\partial r} + u \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \sqrt{s} \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r v \right)$$

$$-p + \frac{2\sqrt{s}}{\text{Re}} \left( \frac{\partial v}{\partial r} - f' \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{s^{3/4}}{\text{We} f} + s^{3/2} \beta f^2 + s \alpha \quad (2.11)$$

$$\frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{2} f \left( \frac{Q}{Q_1} \right)$$

Из второго уравнения (2.10) следует, что с точностью до членов порядка  $s^{1/2}$  давление постоянно в каждом сечении струи и определяется соотношением (2.11) на свободной поверхности. Из (2.11) находим следующие условия малости вклада давления в первое уравнение (2.10):

$$\sqrt{s}/\text{Re} \ll 1, \quad s^{3/2} \beta \ll 1, \quad s^{3/4} \text{We} \ll 1, \quad \alpha s \ll 1 \quad (2.12)$$

Вдали от начала координат  $z = 0$  продольная скорость асимптотически слабо изменяется в каждом сечении капиллярной струи [6], поэтому граничную скорость в (2.2) можно заменить средней по сечению и положить  $Q_1 = Q$ .

Возвращаясь к исходным безразмерным переменным в (2.3)–(2.7), получаем окончательную постановку для определения скоростей и свободной поверхности

$$\begin{aligned} v \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r v &= 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$r = f: \quad \psi = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\text{Re} f}{2s}$$

$$r = 0: \quad v = 0$$

Аналогичная процедура выделения главных членов в уравнениях Навье – Стокса по малому параметру  $\text{Re}^{-1/2}$  используется при выводе уравнений пограничного слоя [7]. Решение задачи (2.13) для функции тока  $\psi$  имеет вид

$$\psi = ar^2 \sqrt{z} + br^4, \quad a = 1/\sqrt{2s}, \quad b = \text{Re}/16s$$

$$f = \left( \frac{a^2 z}{4b^2} \right)^{1/4} \sqrt{\sqrt{1 + \frac{2b}{a^2 z}} - 1}$$

В данном решении  $f'$  велика на малых расстояниях от начала координат. Это связано с тем, что оставленные в уравнениях члены имеют порядок малости ниже  $f'^2$ . Вследствие этого для коррекции полученных результатов вблизи точки инъекции жидкости необходимо учитывать опущенные слагаемые. Вдали от начала координат  $f = (s/2z)^{1/4}$ . Поскольку радиус струи слабо меняется по  $z$ , то при рассмотрении линейной задачи устойчивости полагаем аналогично случаю устойчивости в поле силы тяжести, что невозмущенная струя имеет постоянные радиус и скорость [8]. Постоянная продольная скорость не оказывает влияния на развитие возмущений, а вызывает лишь их смещение по оси  $z$  и поэтому может быть положена равной нулю.

**3. Возмущенное течение.** Рассмотрим устойчивость цилиндрического столба несжимаемой жидкости к возмущениям, периодическим по переменным  $z, \theta$ . В невозмущенном состоянии цилиндр постоянного радиуса  $r_0$  неподвижен, ось  $z$  совпадает с осью симметрии цилиндра. Положим, что на цилиндре распределен поверхностный заряд постоянной плотности  $\sigma_0$ , который при любых деформациях границы остается на

поверхности, внешнее однородное поле  $E_0$  параллельно оси цилиндра. В этом случае объемные электрические силы отсутствуют и можно пренебречь влиянием индуцированных магнитных полей. В исходном состоянии

$$\varphi_0^i = -E_0 z, \quad \varphi_0^e = -E_0 z - \sigma_0 r_0 \varepsilon_0^{-1} \ln(r/r_0)$$

$$p_0 = \frac{T}{r_0} - \frac{\sigma_0^2}{2\varepsilon_0} - (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 \frac{E_0^2}{2}$$

Введем в (1.1)–(1.6) замены переменных

$$\begin{aligned} u &= \delta v_z, \quad v = \delta v_r, \quad w = \delta v_\theta, \quad p = p_0 + \delta_1 p', \\ \varphi &= \varphi_0 + \delta_1 \varphi', \quad f = r_0 + \delta_1 \chi, \quad \sigma = \sigma_0 + \delta_1 \sigma' \end{aligned} \quad (3.1)$$

Полагая амплитуду возмущений  $\delta_1$  малой величиной ( $\delta_1 \ll 1$ ), после линеаризации (1.1)–(1.6) по  $\delta_1$  получаем следующую систему уравнений и граничных условий:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_r}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left( \Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) \\ \rho \frac{\partial v_\theta}{\partial t} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left( \Delta v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_z}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \Delta v_z \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r v_r + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} &= 0 \\ \Delta \varphi &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$r = r_0: \quad v_r = \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (3.4)$$

$$\varphi^e - \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \chi = \varphi^i, \quad \frac{\partial \varphi^e}{\partial r} - \varepsilon \frac{\partial \varphi^i}{\partial r} = (\varepsilon - 1) E_0 \frac{\partial \chi}{\partial z} - \frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \frac{\chi}{r_0} \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sigma_0 \left( \frac{1}{r_0} \frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{r_0} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (3.6)$$

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{f}_e - T \mathbf{K} \mathbf{n}, \quad K = - \left( \frac{1}{r_0^2} \chi + \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} + \frac{1}{r_0^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} \right) \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_e &= - \left( \frac{\sigma_0^2}{\varepsilon_0} \frac{\chi}{r_0} + 2\sigma_0 E_0 \frac{\partial \chi}{\partial z} + \sigma_0 \frac{\partial \varphi^e}{\partial r} + \varepsilon \varepsilon_0 E_0 \frac{\partial \varphi^i}{\partial z} - \varepsilon_0 E_0 \frac{\partial \varphi^e}{\partial z} \right) \mathbf{n} + \\ &+ \left( \frac{\sigma_0^2}{\varepsilon_0} \frac{\partial \chi}{\partial z} + \varepsilon E_0 - \sigma_0 \frac{\partial \varphi^e}{\partial z} \right) \boldsymbol{\tau} + \left( \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} - \frac{\partial \varphi^e}{\partial \theta} \right) \frac{\sigma_0 \boldsymbol{\kappa}}{r_0} \end{aligned}$$

Здесь  $v_r, v_\theta, v_z, p$  – возмущения скорости и давления,  $\varphi$  и  $\sigma$  – возмущения потенциала и поверхностной плотности заряда, величины с индексом 0 относятся к невозмущенному состоянию, штрихи опущены. Компоненты вектора электрических напряжений записаны для следующих направлений, связанных с точкой поверхности:  $\mathbf{n}$  – вектор внешней нормали,  $\boldsymbol{\tau}$  – ортогональный вектор  $\mathbf{n}$ , лежащий в плоскости, проходящей через ось  $z$  и рассматриваемую точку поверхности, вектор  $\boldsymbol{\kappa}$  ортогонален  $\mathbf{n}$  и  $\boldsymbol{\tau}$ . Будем разыскивать решения линеаризованной системы (3.1)–(3.7) в виде нор-

мальных мод

$$\chi = \delta \exp i(\omega t + kz + m\theta)$$

$$v, p = \Phi_n(r) \exp i(\omega t + kz + m\theta)$$

Для радиальных амплитудных функций  $\Phi_n(r)$  находим ограниченное решение [3] системы уравнений (3.2)

$$\begin{aligned} v_r &= A \frac{r_0}{\mu} x I'_m(kr) - B \frac{r_0}{\mu} x I'_m(lr) + C \frac{r_0}{\mu} my \frac{I_m(lr)}{lr} \\ v_\theta &= A \frac{r_0^2}{\mu} im \frac{I_m(kr)}{r} - B \frac{r_0}{\mu} imx \frac{I_m(lr)}{lr} + iC \frac{r_0}{\mu} y I'_m(lr) \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$v_z = A \frac{r_0}{\mu} ix I_m(kr) - B \frac{r_0}{\mu} iy I_m(lr)$$

$$p = -Ai \frac{\rho \omega r_0^2}{\mu} I_m(kr)$$

$$x = kr_0, \quad y = lr_0, \quad l^2 = k^2 + i\omega\rho/\mu$$

где  $A, B, C$  – константы,  $I_m$  – функция Бесселя. Решение электростатической задачи (3.3), (3.5), (3.6) ищем при условии малости параметра  $xq^{1/2} \ll 1$ , при этом на основании (3.2), (3.4), (3.6) принимается  $\sigma = 0$  в линейном приближении по  $\delta_1$ . Тогда

$$\varphi^e = C_1 I_m(x) K_m(kr) \delta \exp i(\omega t + kz + m\theta),$$

$$\varphi^i = C_2 K_m(x) I_m(kr) \delta \exp i(\omega t + kz + m\theta) \quad (3.9)$$

$$C_1 = \left[ \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 x} + \frac{\varepsilon \sigma_0}{\varepsilon_0} \frac{I'_m}{I_m} - i(\varepsilon - 1) E_0 \right] H^{-1}$$

$$C_2 = \left[ \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 x} + \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \frac{K'_m}{K_m} - i(\varepsilon - 1) E_0 \right] H^{-1}, \quad H(x) = \varepsilon K_m I'_m - I_m K'_m$$

Здесь  $K_m$  – функция Макдональда, штрихом обозначено дифференцирование по  $x$ . Рассматривая проекции сил на направления  $\mathbf{n}, \mathbf{\tau}, \mathbf{\kappa}$  и подставляя (3.8), (3.9) в (3.4), (3.7), получим однородную систему уравнений относительно констант  $A, B, C$

$$\begin{aligned} A2ix^2 I'_m(x) - Bi(x^2 + y^2) I'_m(y) + C imx I_m(y) &= G_1 \frac{\delta}{r_0} \\ -A2im[I_m(x) - x I'_m(x)] - B2imx \frac{y I'_m(y) - I_m(y)}{y} + \\ + Ci[(y^2 + 2m^2) I_m(y) - 2y I'_m(y)] &= \frac{m}{x} G_1 \frac{\delta}{r_0} \\ A[2x^2 I''_m(x) + (y^2 - x^2) I_m(x)] - B2xy I''_m(y) + \\ + C2m[y I'_m(y) - I_m(y)] &= (1 - x^2 - m^2 + G_2) \frac{\delta}{r_0} \\ Ax I'_m(x) - Bx I'_m(y) + Cm I_m(y) &= \frac{\Omega}{2} \frac{\delta}{r_0} \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$G_1 = -\frac{(\varepsilon-1)\sqrt{q\eta}xI_mK_m}{H} - iq\frac{I_mK_m + xI_mK'_m}{H}, \quad \Omega = \frac{2i\omega\mu r_0}{T}$$

$$G_2 = -\left[ q + \frac{qI_mK'_m + \varepsilon qI'_mK'_m + (\varepsilon-1)^2\eta xI_mK_m}{H} \right] - i\left[ x + \frac{(\varepsilon-1)I_mK_m}{H} \right] \sqrt{q\eta}$$

Параметры  $q$ ,  $\eta$ , играющие важную роль в последующем анализе, выражают отношение давлений, создаваемых соответственно зарядом  $\sigma_0$  и внешним полем  $E_0$  к капиллярному давлению

$$q = \frac{\sigma_0^2 r_0}{T\varepsilon_0}, \quad \eta = \frac{\varepsilon_0 E_0^2 r_0}{T}$$

Приравнявая нулю детерминант системы (3.10), получаем дисперсионное уравнение для определения зависимости  $\omega(k)$ . При  $\tau_0 = 0$  и  $m = 0$  дисперсионное уравнение совпадает с уравнением работы [2], а при  $\varepsilon \rightarrow \infty$  – с уравнением работы [3]. Рассмотрим устойчивость струи в безынерционном приближении, когда развитие возмущений определяется в основном вязкостью жидкости. Переходя в (3.8) к пределу  $\gamma_1 = i\omega\rho r_0^2/\mu \rightarrow 0$  так, что  $A\gamma_1 \rightarrow A' \neq 0$ , получаем выражения, совпадающие с решением гидродинамических уравнений при  $\rho = 0$  [3]. Соответствующее дисперсионное уравнение в безынерционном приближении имеет вид

$$\begin{vmatrix} M_1 & M_5 & M_9 & -N_1 \\ M_2 & M_6 & M_{10} & 0 \\ M_3 & M_7 & M_{11} & -N_2 \\ M_4 & M_8 & M_{12} & -\Omega \end{vmatrix} = 0 \quad (3.11)$$

$$M_1 = (m+1)I_{m-1} - \frac{2m(m+1)+x^2}{x}I_m, \quad M_2 = -2m(m+1)I_{m-1} + \frac{4m(m+1)+x^2}{x}I_m$$

$$M_3 = -\frac{(m+1)(m+2)+x^2}{x}I_{m-1} + \frac{m(m+2)+x^2}{x^2}2(m+1)I_m$$

$$M_4 = -\frac{m+2}{x}I_{m-1} + \frac{2m(m+2)+x^2}{x^2}I_m$$

$$M_5 = 2I_{m-1} - \frac{3m}{x}I_m, \quad M_6 = -2mI_{m-1} + \frac{m^2+4m+x^2}{x}mI_m$$

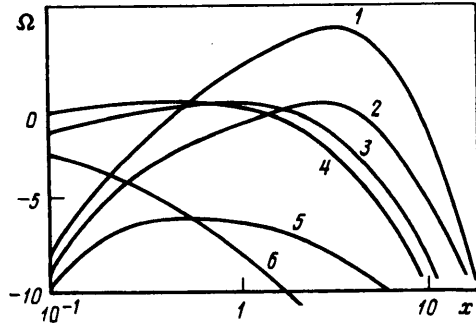
$$M_7 = -\frac{2(m+1)}{x}I_{m-1} + \frac{4m(m+1)+2x^2}{x^2}I_m, \quad M_8 = -\frac{2}{x}I_{m-1} + \frac{4m}{x^2}I_m$$

$$N_1 = q\frac{I_mK_m + xI_mK'_m}{H}, \quad N_2 = x^2 + m^2 - 1 + q\left[\frac{I_mK'_m + \varepsilon xI'_mK'_m}{H} + 1\right] + \eta\frac{(\varepsilon-1)^2 xI_mK_m}{H}$$

$$M_9 = -\frac{I_m}{x}; \quad M_{10} = -2I_{m-1} + \frac{m(m+2)+x^2}{x}I_m$$

$$M_{11} = -\frac{2}{x}I_{m-1} + \frac{2(m+1)}{x^2}I_m; \quad M_{12} = \frac{2I_m}{x^2}$$

Здесь опущенный аргумент в цилиндрических функциях равен  $x$ . Поскольку интересоваться будем только действительной частью показателя неустойчивости  $i\omega$ , то в функциях  $N_1$  и  $N_2$  опускаем мнимые части. Как видно из способа получения (3.11) из



Фиг. 1. Дисперсионные зависимости для осесимметричных возмущений  $m = 0$ . Значениям  $(q; \eta) = (10; 10^{-3})$ ,  $(10; 345 \cdot 10^{-3})$ ,  $(2; 383 \cdot 10^{-4})$ ,  $(5 \cdot 10^{-1}; 44 \cdot 10^{-3})$ ,  $(10; 1)$ ,  $(2; 1)$  соответствуют кривые 1–6

общего решения (3.8), безынерционное приближение справедливо при  $k \sim l$ , т.е. при  $x^2 \gg i\omega r_0^2 / \mu$ . В связи с этим результаты решения (3.11) на длинных волнах (малые  $x$ ) необходимо корректировать, используя более общую систему уравнений (3.10).

*Осесимметричные возмущения  $m = 0$ .* В этом случае дисперсионное уравнение имеет вид

$$\Omega = \left[ 1 - x^2 - q \left( 1 - \frac{I_0 K + \varepsilon x I_1 K_1}{\varepsilon K_0 I_1 + I_0 K_1} \right) - \eta \frac{(\varepsilon - 1)^2 I_0 K_0}{\varepsilon K_0 I_1 + I_0 K_1} \right] \Phi_1 - q \frac{I_0 K_0 - x I_0 K_1}{\varepsilon K_0 I_1 + I_0 K_1} \Phi_2$$

$$\Phi_1 = \frac{I_1^2}{x^2 I_0^2 - I_1^2 - x^2 I_1^2}, \quad \Phi_2 = \frac{x I_0^2 - I_0 I_1 - x I_1^2}{x^2 I_0^2 - I_1^2 - x^2 I_1^2}$$

На фиг. 1 приведены дисперсионные зависимости  $\Omega(x)$  для  $\varepsilon = 15$  при некоторых значениях  $q$  и  $\eta$ . Существуют пары  $q$  и  $\eta$ , при которых дисперсионная кривая  $\Omega(x)$  целиком лежит в отрицательной области  $\Omega < 0$  при всех значениях волновых чисел  $x$ . При таких параметрах любые возмущения затухают и струя будет полностью устойчива относительно осесимметричных возмущений. На фиг. 2 приведены области полной устойчивости для  $m = 0$  при некоторых значениях диэлектрической проницаемости. Области полной устойчивости являются области над соответствующей кривой (для  $\varepsilon = 5$  выделена штриховкой).

*Изгибные неустойчивости  $m = 1$ .* На фиг. 3 изображены некоторые дисперсионные кривые  $\Omega(x)$  при различных значениях  $q$  и  $\eta$  для  $\varepsilon = 15$ . Эта ветвь спектра всегда имеет особенность в области малых  $x$ . При  $m = 1$  и  $x \ll 1$  в безынерционном приближении уравнение (3.11) имеет вид

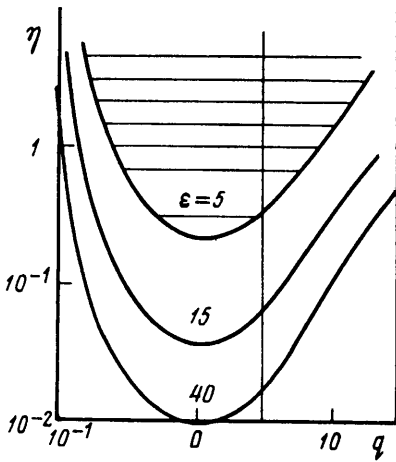
$$\Omega = \frac{A_1 D_1 + A_2 D_2}{D_3}$$

$$D_1 = -\frac{1}{8} - \frac{x^2}{64}, \quad D_2 = -\frac{x}{8} - \frac{5}{64} x^3, \quad D_3 = \frac{3}{64} x^5$$

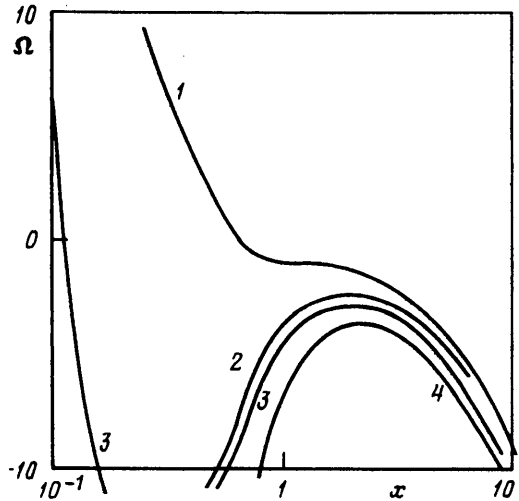
$$A_1 = \frac{q}{\varepsilon + 1} x^2 \left( x \ln \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \right)$$

$$A_2 = q x^2 \left( \frac{\varepsilon - 3}{8(\varepsilon + 1)} + \frac{1}{2} \ln \frac{x}{2} \right) + \eta \frac{(\varepsilon - 1)^2}{\varepsilon + 1} x^2$$





Фиг. 2



Фиг. 3

Фиг. 2. Области полной устойчивости осесимметричных возмущений

Фиг. 3. Дисперсионные зависимости для изгибных колебаний  $m = 1$ . Значениям  $(q; \eta) = (1; 10^{-3}); (10^{-2}; 10^{-2}), (1; 10^{-1}), (10^{-1}; 10^{-1})$  соответствуют кривые 1-4

Видно, что  $\Omega \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow 0$  для любых параметров  $q, \eta, \epsilon$ . Рассмотрим в длинноволновом приближении более общую систему уравнений (3.10). Тогда при малых  $x$  имеем

$$(i\omega)^2 \frac{\rho r_0^3}{T} = -\frac{\epsilon+2}{\epsilon+1} q \frac{x^2}{2} \ln \frac{x}{2} - \eta \frac{(\epsilon-1)^2}{\epsilon+1} x^2 - \frac{i\sqrt{q\eta}}{2} \frac{3\epsilon+1}{\epsilon+1} x \quad (3.12)$$

У одного из решений уравнения (3.12) всегда имеется область, в которой  $\text{Re}(i\omega) > 0$ . Хотя скорректированные спектры безынерционного приближения не имеют особенности при  $x = 0$ , в рассмотренной модели мода  $m = 1$  всегда неустойчива в области больших длин волн. Аналогичная ситуация имеет место в случае идеально проводящего заряженного цилиндра [3].

*Неосесимметричные неустойчивости  $m = 2$ .* На фиг. 4 приведены результаты численного решения уравнения (3.11) для  $\epsilon = 15$ . Так же как в осесимметричном случае, при некоторых параметрах струя может быть полностью устойчивой относительно возмущений  $m = 2$ . При малых  $x$  и  $m = 2$  дисперсионное уравнение (3.11) имеет вид

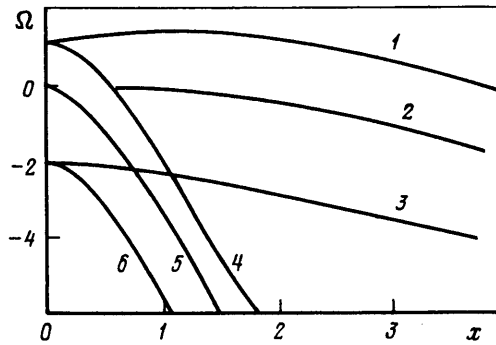
$$\Omega = -\frac{2}{3} \left[ 3 - q \frac{2\epsilon+1}{2(\epsilon+1)} + \eta \frac{(\epsilon-1)^2 x^2}{2(\epsilon+1)} \right]$$

и, по крайней мере на длинных волнах, струя устойчива при условии

$$q \leq \frac{6(\epsilon+1)}{2\epsilon+1} \quad (3.13)$$

Численные данные по спектрам  $\Omega(x)$  при различных  $q, \eta, \epsilon$  и  $m = 2$  показывают, что неравенство (3.13) является также условием полной устойчивости для всех  $x$ . На фиг. 2 этой области соответствует часть плоскости в переменных  $q, \eta$ , расположенная левее вертикальной прямой  $q = 6(\epsilon+1)/(2\epsilon+1)$ .

**4. Обсуждение результатов.** Экспериментальные данные по распаду струй маловязких жидкостей (вода) [9] показывают, что истекающая из капилляра свободная



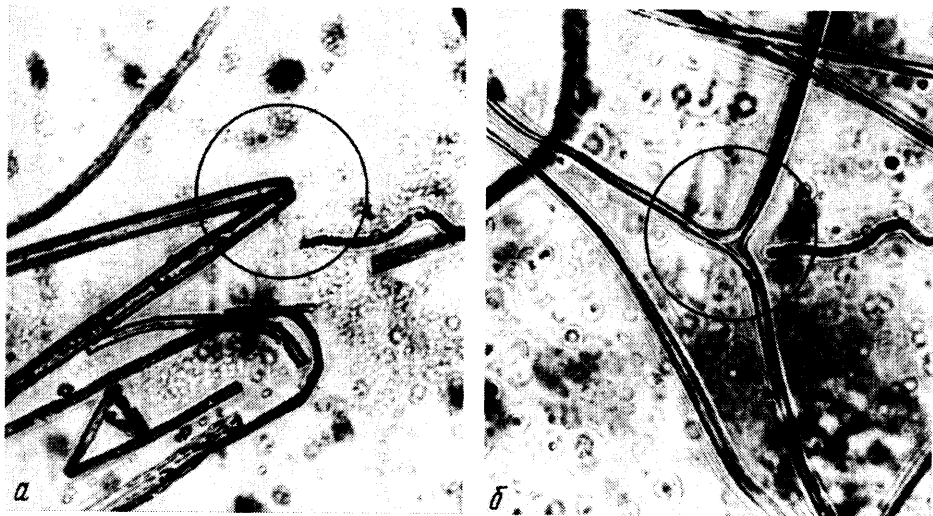
Фиг. 4. Дисперсионные зависимости для неосесимметричных возмущений  $m = 2$ . Значениям  $(q; \eta) = (0; 5)$ ,  $(0; 3096 \cdot 10^{-3})$ ,  $(0; 10^{-1})$ ,  $(1; 5)$ ,  $(1; 3096)$ ,  $(1; 10^{-1})$  соответствуют кривые 1–6

струя, распадающаяся по осесимметричным возмущениям (все остальные моды устойчивы), при наложении поля вдруг начинает распадаться по изгибным неустойчивостям. В [3] с использованием модели идеально проводящей жидкости дана интерпретация этого явления. Найдено, что обе моды  $m = 0$  и  $1$  неустойчивы, однако при некоторых условиях максимальный инкремент моды  $m = 1$  больше и по аналогии с рэлеевской длиной волны максимального нарастания делается вывод о доминантной моде распада, на фоне которой остальные неустойчивости не видны.

В рассмотренной здесь модели и экспериментах с вязкими полимерными жидкостями ( $\mu \sim 0,5\text{--}10$  П) одновременно наблюдаются проявления раскочки различных мод. Осесимметричные неустойчивости, характерным признаком которых является продольная структура струи (и получающегося из нее волокна) типа капля – перетяжка, встречается при относительно малых вязкостях и слабых полях. В сильных неоднородных полях у капилляра всегда наблюдаются изгибные колебания струи, затухающие по мере приближения к противоэлектроду. Однако здесь такие неустойчивости приводят не к распаду струи, а лишь к искривлению первоначально прямолинейной траектории.

В сильных полях наблюдаются проявления неустойчивости моды  $m = 2$ , отличительной чертой которых является гантелеобразное поперечное сечение струи. Волокна нетканых фильтрующих материалов типа ФП (фильтры Петрянова), получаемые в сильных неоднородных электрических полях, имеют, как правило, такое гантелеобразное сечение [10]. Подбором напряженности и заряда струи можно увеличить степень некруглости сечения, при этом волокна приобретают явно выраженную лентовидную форму.

Эксперименты по изучению распада струй проводились на установке, использованной в [11] для исследования стационарных течений. Струи и события распада фиксировались в виде сухих волокон, получающихся при испарении растворителя. На фиг. 5, а зафиксировано предраспадное состояние продольного деления струи, в месте изгиба волокна хорошо видна гантелеобразность поперечного сечения. На фиг. 5, б приведена микрофотография узла продольного деления струи полимерного раствора. Радиус волокон на фотографиях равен 5 мкм. Поскольку содержание полимера в растворе составляет 15%, то максимальный исходный радиус полимерной струи не превышает 13 мкм. Среднее значение этих радиусов  $r_0 = 9$  мкм используем для качественной оценки параметров продольного распада. Электрический ток, переносимый струей, составляет  $10^{-7}$  А, объемный расход  $10$  м<sup>3</sup>/с, поверхностное натяжение жидкости равно 0,03 Н/м. Поверхностная плотность заряда  $\sigma_0 = 4,5 \cdot 10^{-4}$  Кл/м<sup>2</sup> и параметр  $q = 7$ . В соответствии с условием (3.13) мода  $m = 2$  является неустойчивой и струя должна расщепляться вдоль оси. Более того, гантелеобразность поперечного се-



Фиг. 5. Сухие волокна, образовавшиеся из струй после испарения растворителя: а – предраспадное состояние, б – узел продольного деления струи

чения струй, выходящих из узла продольного деления (фиг. 5, б), указывает на способность струи к повторному делению.

**Заключение.** Проведенный анализ отчетливо доказал возможность управления устойчивостью движущейся капиллярной струи продольным электрическим полем. Изменяя диэлектрические свойства жидкости и электрическую напряженность, можно полностью подавить осесимметричную моду неустойчивости, развитие которой обычно вызывает дробление струи на капли. Как результат этого поведение капиллярных струй диэлектрических жидкостей в сильном электрическом поле кардинально изменяется – в первую очередь проявляются неустойчивости, вызывающие изгибы струи и отклонения от осесимметричности. Эти выводы теории качественно вполне согласуются с экспериментальными наблюдениями. В то же время для полного количественного описания явлений, вызываемых неосесимметричными возмущениями, таких, как узлы ветвления и разделения струи на две, требуется усовершенствование теории [12], в частности учет продольной неоднородности струи и нелинейных членов уравнений.

Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (код проекта 97-01-00153).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гиневский А.Ф. Особенности капиллярного распада заряженных струй диэлектриков // Сб. науч. тр. МЭИ. 1986. № 119. С. 18–27.
2. Глонти Г.А. К теории устойчивости жидких струй в электрическом поле // ЖЭТФ. 1958. Т. 34. № 5. С. 1329–1330.
3. Saville D.A. Stability of electrically charged viscous cylinders // Phys. Fluids. 1971. V. 14. № 6. P. 1095–1099.
4. Тамм И.Е. Основы теории электричества. М.: Наука, 1976. 616 с.
5. Куликовский А.Г., Любимов Г.А. Магнитная гидродинамика. М.: Физматгиз, 1962. 246 с.
6. Шкадов В.Я. Некоторые методы и задачи теории гидродинамической устойчивости // Науч. тр. Ин-та механ. МГУ. 1973. № 25. 192 с.
7. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1984. 560 с.

8. *Маркова М.П., Шкадов В.Я.* О нелинейном развитии капиллярных волн в струе жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1972. № 3. С. 30–37.
9. *Huebner A.L.* Disintegration of charged liquid jets // J. Fluid Mech. 1969. V. 38. Pt. 4. P. 679–688.
10. *Петрянов И.В., Козлов В.И., Басманов П.И., Огородников В.И.* Волокнистые фильтрующие материалы. М.: Знание, 1968. 78 с.
11. *Шутов А.А.* Форма несжимаемой слабопроводящей струи в сильном электрическом поле // ПМТФ. 1991. № 2. С. 20–25.
12. *Герценштейн С.Я., Шкадов В.Я.* Устойчивость неосесимметричных жидких струй // Изв. АН СССР. МЖГ. 1973. № 1. С. 43–52.

Москва

Поступила в редакцию  
15.VII.1996