

УДК 532.51.013.4

© 1998 г. В.Ф. КОПЬЕВ, С.А. ЧЕРНЫШЕВ

ВЛИЯНИЕ ТОЛЩИНЫ СЛОЯ СМЕШЕНИЯ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ УСТОЙЧИВОСТИ СВЕРХЗВУКОВОЙ СТРУИ

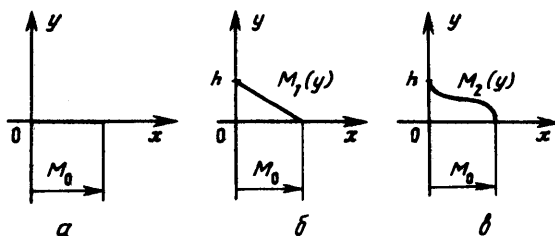
Исследуется устойчивость двумерного сверхзвукового изотермического течения со слоем смешения. Получены асимптотические выражения, описывающие характеристики устойчивости слоя смешения при его малой толщине. Показано, что нейтрально устойчивые волны при учете толщины могут стать неустойчивыми. Отдельно рассмотрены случаи слияния собственных волновых чисел между собой и с точками ветвления дисперсионного уравнения.

Проблема неустойчивости слоя смешения лежит в основе одного из главных направлений исследования акустических характеристик струй. В работах, относящихся к этому направлению, в качестве источника шума рассматривается крупномасштабная турбулентность, которая в свою очередь представляется как сумма пространственно неустойчивых волн, развивающихся в слое смешения [1]. Такое представление оказалось очень плодотворным для сверхзвуковых струй и позволило прояснить [2, 3] и предсказать [4, 5] основные характеристики различных компонент шума.

Формулировка задачи устойчивости сжимаемого слоя смешения дана в [6]. В наиболее простой постановке эта задача была решена в [7], где были исследованы собственные волны в течении с тангенциальным разрывом. Единственный механизм неустойчивости, который проявляется в таком течении, – это неустойчивость Кельвина – Гельмгольца. С увеличением числа Маха струи M инкремент неустойчивости Кельвина – Гельмгольца уменьшается, а при $M \geq 2\sqrt{2}$ двумерные возмущения в течении с тангенциальным разрывом вообще становятся нейтрально устойчивыми [8, § 84]. Поэтому при больших числах M процесс генерации шума крупномасштабной турбулентностью может быть связан с другими неустойчивыми волнами, для исследования которых необходимо более детально учитывать структуру течения.

Устойчивость слоев смешения конечной толщины численно исследовалась в [9–11], где было показано, что собственные волны, нейтрально устойчивые в течении с тангенциальным разрывом, при учете толщины слоя могут стать неустойчивыми. В ряде последующих работ численно анализировалось влияние отношения температур потоков, направления волны [12, 13] и вязкости [14]. Эти работы углубили понимание механизмов неустойчивости, которые могут возникать в высокоскоростных струях.

Результаты численного анализа в цитируемых выше работах делают особенно интересным исследование влияния толщины слоя смешения на устойчивость течения аналитическими методами. Такое аналитическое исследование может быть проведено для случая малой толщины слоя, когда в задаче имеется малый параметр. Наличие асимптотических выражений позволяет легко анализировать влияние различных параметров на положение корней дисперсионного уравнения и, следовательно, на устойчивость потока. Это важно также в связи с проблемой создания перспективных сопел, требующей исследования высокоскоростных струй сложной конфигурации. Задача устойчивости таких струй крайне сложна даже при наличии современных ЭВМ. В этих случаях существенным упрощением является представление слоя смешения в виде



Фиг. 1. Профили скорости среднего течения

тангенциального разрыва [15, 16]. Поскольку такой метод не учитывает влияния структуры слоя смешения на характеристики устойчивости, представляет значительный интерес получение на следующем шаге уточненных решений с помощью асимптотических выражений, учитывающих толщину слоя смешения.

В настоящей работе такая процедура строится для двумерного течения. Исследуется влияние толщины слоя смешения на собственные волны, полученные для течения с тангенциальным разрывом. Получено аналитическое описание известных численных результатов для случая двумерного потока. Кроме того, настоящая работа дает метод учета влияния толщины слоя смешения на свойства собственных волн в трехмерных струях любой конфигурации. Некоторые предварительные результаты исследования опубликованы в [17].

1. Собственные волны в течении с тангенциальным разрывом. Рассмотрим прежде всего хорошо известную задачу [7, 8] о собственных волнах в двумерном изотермическом течении с тангенциальным разрывом (фиг. 1,а). Пусть (x, y) – декартова система координат с осью x , направленной вдоль потока. В области I ($y > 0$) газ покоится, а в области II ($y < 0$) имеется однородный поток со скоростью V_0 . Возмущения давления p в областях I и II удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} - c^2 \Delta p_1 = 0 \quad y > 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{D^2 p_2}{Dt^2} - c^2 \Delta p_2 = 0, \quad \frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + V_0 \frac{\partial}{\partial x} \quad y < 0 \quad (1.2)$$

$$\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$$

где c – скорость звука.

На тангенциальном разрыве ($y = 0$) должны выполняться граничные условия равенства давления p и смещения частиц газа η . С учетом соотношений $p = -D\Phi/Dt$, $\partial\Phi/\partial y = D\eta/Dt$, где Φ – потенциал возмущений скорости, эти граничные условия примут вид

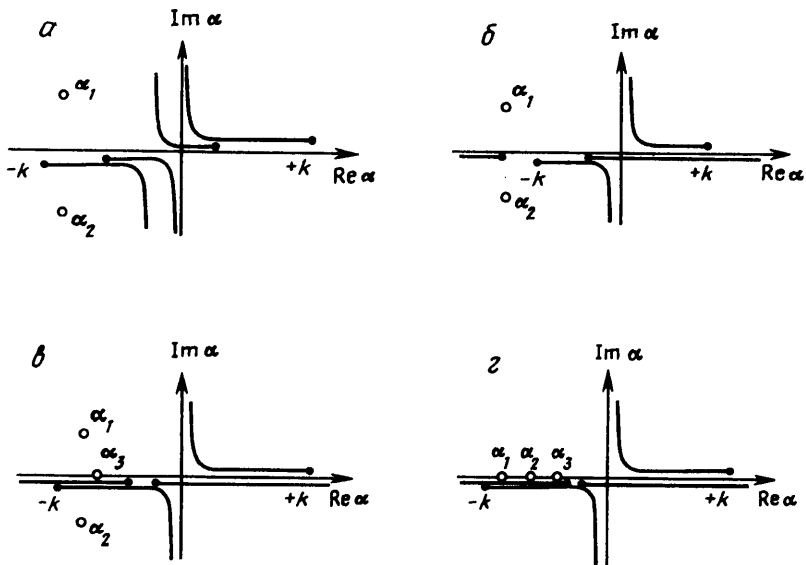
$$p_1 = p_2, \quad \frac{D^2}{Dt^2} \frac{\partial p_1}{\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial p_2}{\partial y} \quad (1.3)$$

Будем рассматривать возмущения вида $\exp(-ikct - i\alpha x)$ при действительных положительных значениях k и комплексных α . Для таких возмущений уравнения (1.1), (1.2) имеют соответственно решения

$$p_1 \sim e^{-\gamma y}, \quad p_2 \sim e^{\beta y}$$

$$\gamma = \sqrt{\alpha^2 - k^2}, \quad \beta = \sqrt{(1 - M_0^2)\alpha^2 - 2M_0\alpha k - k^2}, \quad M_0 = \frac{V_0}{c}$$

Ветви функций γ и β выбираются в соответствии с условием излучения: (i) возмущения должны убывать при $y \rightarrow \pm\infty$ для каждого фиксированного момента времени;



Фиг. 2. Разрезы и нули функции $D_0(k, \alpha)$ в комплексной α -плоскости для действительных $k > 0$; а — $M_0 < 1$, б — $1 < M_0 < 2$, в — $2 < M_0 < 2\sqrt{2}$, г — $M_0 > 2\sqrt{2}$

(ii) возмущения должны создаваться источниками, расположенными на тангенциальном разрыве (причинность). Легко видеть, что для комплексных $k = k_1 + ik_2$ ($k_1 > 0$) это условие выполняется только в случае $k_2 > 0$, $\text{Re } \gamma > 0$, $\text{Re } \beta > 0$. Случай действительных k должен рассматриваться как предел $k_2 \rightarrow +0$.

Разрезы функций γ определим так, чтобы они проходили от точек ветвления $\alpha = \pm k$ вдоль линий $\text{Re } \gamma = 0$, а разрезы функции β — от точек ветвления $\alpha = k/(1 - M_0)$, $\alpha = -k/(1 + M_0)$ вдоль линий $\text{Re } \beta = 0$. Тогда на каждом из листов римановой поверхности $D_0(k, \alpha)$ реальные части функций γ и β будут знакопостоянны. В этом случае риманова поверхность функции $D_0(k, \alpha)$ имеет четыре листа: I — $\text{Re } \gamma > 0$, $\text{Re } \beta > 0$, II — $\text{Re } \gamma < 0$, $\text{Re } \beta > 0$, III — $\text{Re } \gamma > 0$, $\text{Re } \beta < 0$, IV — $\text{Re } \gamma < 0$, $\text{Re } \beta < 0$. Будем интегрироваться только решениями, соответствующими первому листу римановой поверхности функции $D_0(k, \alpha)$, поскольку только на этом листе выполняется условие излучения $\text{Re } \gamma > 0$, $\text{Re } \beta > 0$.

Из граничных условий (1.3) следует дисперсионное уравнение, определяющее собственные волны

$$D_0(k, \alpha) = (k + \alpha M_0)^2 \gamma + k^2 \beta = 0 \quad (1.4)$$

Число решений этого уравнения, лежащих на первом листе римановой поверхности, зависит от числа Маха потока. Эти решения имеют вид [7]

$$\alpha_{1,2} = k \left[-\frac{M_0}{2} \mp i \sqrt{-\frac{M_0^2}{4} - 1 + \sqrt{1 + M_0^2}} \right]^{-1}, \quad M_0 < 2\sqrt{2} \quad (1.5)$$

$$\alpha_{1,2} = k \left[-\frac{M_0}{2} \pm \sqrt{\frac{M_0^2}{4} + 1 - \sqrt{1 + M_0^2}} \right]^{-1}, \quad M_0 > 2\sqrt{2} \quad (1.6)$$

$$\alpha_3 = -k \frac{2}{M_0}, \quad M_0 > 2 \quad (1.7)$$

При $M_0 < 2$ имеются два комплексных корня (1.5) (фиг. 2,а, б), один из которых (α_1) соответствует неустойчивости Кельвина – Гельмгольца. При $M_0 = 2$ происходит перекрытие разрывов функций γ и β , в результате чего еще один корень (α_3) переходит со второго листа римановой поверхности на первый и остается на нем при всех $M_0 > 2$. Таким образом, при $M_0 > 2$ на первом листе имеется три корня: α_1 , α_2 и α_3 . Корни α_1 и α_2 при увеличении M_0 до значения $2\sqrt{2}$ приближаются к действительной оси (1.5) (фиг. 2,в), а при $M_0 > 2\sqrt{2}$ эти корни оказываются действительными (1.6) (фиг. 2,г). Корень α_3 лежит на действительной оси при всех $M_0 > 2$ (1.7).

При больших числах M_0 выражения (1.6) для корней упрощаются и имеют вид

$$\alpha_1 = k \left[-1 + \frac{1}{2M_0^2} + O(M_0^{-3}) \right], \quad \alpha_2 = k \left[-\frac{1}{M_0 - 1} + O(M_0^{-4}) \right] \quad (1.8)$$

Отсюда видно, что при $M_0 \rightarrow \infty$ корень α_1 смещается вдоль действительной оси к точке ветвления функции γ , а корень α_2 смещается к точке ветвления функции β .

Таким образом, в рамках модели тангенциального разрыва поток со слоем смещения при $M_0 > 2\sqrt{2}$ становится устойчивым относительно двумерных возмущений. В таком потоке имеются три нейтрально устойчивые волны, определяемые выражениями (1.6) и (1.7).

2. Асимптотический анализ уравнения Рэлея. Рассмотрим теперь влияние толщины слоя смещения на описанные выше собственные волны. Пусть в слое $0 \leq y \leq h$ скорость потока $V(y)$ плавно изменяется от величины V_0 до нуля (фиг. 1,б, в). В области I ($y \geq h$) возмущения давления p описываются уравнением (1.1), в области II ($y \leq 0$) – уравнением (1.2), а в промежуточной области ($0 \leq y \leq h$) – уравнением Рэлея [6]

$$\frac{d}{ds} \left[\frac{1}{(k + M(s)\alpha)^2} \frac{dp}{ds} \right] - \frac{h^2 \beta^2(s)}{(k + M(s)\alpha)^2} p = 0 \quad (2.1)$$

$$\beta(s) = \sqrt{(1 - M(s)^2)\alpha^2 - 2M(s)\alpha k - k^2}, \quad M(s) = \frac{V(s)}{c}, \quad s = \frac{y}{h}$$

В уравнении (2.1) использована координата s , нормированная на толщину слоя смещения h . Такая запись делает явным влияние величины h на решение уравнения Рэлея. Задание граничных условий на бесконечности и выбор ветвей функций γ и β осуществляются таким же образом, как и в задаче о возмущениях течения с тангенциальным разрывом скорости. Кроме того, на границах $s = 0$ и $s = 1$ должны выполняться условия равенства давления и смещения частиц газа (последнее условие для непрерывного профиля скорости $V(s)$ эквивалентно равенству производной $dp(s)/ds$).

Используя граничные условия на линиях $s = 0$ и $s = 1$, получим дисперсионное уравнение

$$D(k, \alpha) \equiv \left(\frac{dp}{ds} + \gamma h p \right) \Big|_{s=1} = 0 \quad (2.2)$$

где $p(s)$ есть решение уравнения (2.1) с условиями $p|_{s=0} = 1$, $dp/ds|_{s=0} = \beta h$.

Уравнения (2.1), (2.2) описывают волны в слое смещения произвольной толщины. Рассмотрим далее случай тонкого слоя, т.е. будем предполагать, что $kh \ll 1$. Это позволит получить аналитические выражения для собственных волн с учетом толщины слоя. Будем искать решение уравнения (2.1) в виде ряда

$$p = 1 + khP_1(s) + k^2h^2P_2(s) + O(k^3h^3)$$

$$P_1(0) = P_2(0) = 0, \quad P_1'(0) = \beta/k, \quad P_2'(0) = 0$$

Тогда в первом приближении по kh для дисперсионного уравнения получим

$$D_0(k, \alpha) = -khF(M_0, \alpha) + O(k^2h^2) \quad (2.3)$$

$$F(M_0, \alpha) = \frac{\beta\gamma}{k} \int_0^1 [k + M(s)\alpha]^2 ds + k^2(k + M_0\alpha)^2 \int_0^1 \frac{\beta^2(s)}{[k + M(s)\alpha]^2} ds \quad (2.4)$$

где $D_0(k, \alpha)$ определяется уравнением (1.4). Для действительных значений α второй интеграл в (2.4) должен рассматриваться как предельное значение при $\text{Im } k \rightarrow +0$.

При $kh = 0$ дисперсионное уравнение (2.3) сводится к уравнению (1.4), полученному для течения с тангенциальным разрывом. Оставляя в (2.3) члены первого порядка, для каждого из корней α_i , $i = 1, 2, 3$, определяемых выражениями (1.6), (1.7), найдем величины смещения при малых kh

$$\Delta\alpha_i = -khF(M_0, \alpha_i) \left(\frac{\partial D_0(k, \alpha)}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=\alpha_i}^{-1} + O(k^2h^2) \quad (2.5)$$

Так как при $h = 0$, $\text{Im } k \rightarrow \infty$ все рассматриваемые корни находятся в нижней полуплоскости α , а малое изменение h приводит лишь к малому смещению этих корней, то те из корней, которые при $\text{Im } k = 0$, $h > 0$ оказываются в верхней полуплоскости α , соответствуют пространственно неустойчивым волнам [18]. Это означает, что волны, нейтрально устойчивые при $h = 0$, при $h \neq 0$ становятся неустойчивыми, если для них $\text{Im } \Delta\alpha_i > 0$. Таким образом, характер возмущений может качественно измениться даже при малом изменении величины h .

3. Влияние толщины слоя смещения на α_i -волны. Используя (2.5), найдем смещение $\Delta\alpha_i$ волновых чисел при малой толщине слоя смещения для всех корней α_i . Ограничимся только теми значениями M_0 , для которых в течении с тангенциальным разрывом имеются нейтрально устойчивые волны. Это – область значений $M_0 > 2$ для α_3 -волны и область значений $M_0 > 2\sqrt{2}$ для $\alpha_{1,2}$ -волн. В случаях $M_0 \approx 2$ и $M_0 \approx 2\sqrt{2}$ требуется отдельное исследование вследствие слияния корней и особенностей дисперсионного соотношения.

Рассмотрим сначала слой смещения с линейным профилем скорости (фиг. 1,б)

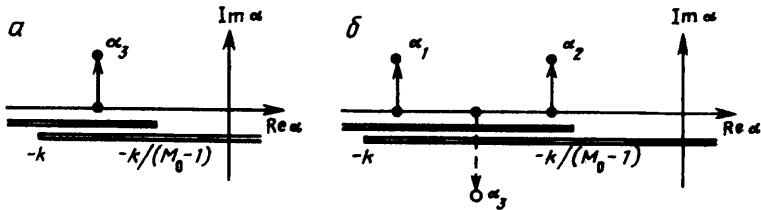
$$M_1(y) = M_0 \left(1 - \frac{y}{h} \right), \quad 0 \leq y \leq h \quad (3.1)$$

Вычисляя функцию F , определяемую уравнением (2.3) для профиля скорости (3.1), и подставляя величину F в (2.5), для α_3 -волны получим

$$\Delta\alpha_3 = i \frac{2}{3} k^2 h \frac{(8 + M_0^2) \sqrt{M_0^2 - 4}}{(8 - M_0^2) M_0^2} + O(k^2h^2)$$

Отсюда следует, что $\text{Im } \Delta\alpha_3 > 0$ при $2 < M_0 < 2\sqrt{2}$ и $\text{Im } \Delta\alpha_3 < 0$ при $M_0 > 2\sqrt{2}$. Это означает, что при $2 < M_0 < 2\sqrt{2}$ α_3 -волна оказывается неустойчивой (фиг. 3,а), а при $M_0 > 2\sqrt{2}$ корень α_3 переходит через разрезы функции $D_0(k, \alpha)$ на четвертый лист (фиг. 3,б).

Корни $\alpha_{1,2}$ при учете толщины слоя смещения смещаются в верхнюю полуплоскость α , т.е. при $M_0 > 2\sqrt{2}$ обе рассматриваемые моды становятся неустойчивыми (фиг. 3,б). При этом корень α_1 соответствует более неустойчивой моде, чем α_2 . Выражения для $\Delta\alpha_{1,2}$ очень громоздки. Выпишем только асимптотические выражения



Фиг. 3. Смещение корней дисперсионного уравнения в комплексную плоскость α при учете толщины слоя смещения; $a - 2 < M_0 < 2\sqrt{2}$, $b - M_0 > 2\sqrt{2}$

для $\Delta\alpha_1$ и $\Delta\alpha_2$ при больших M_0 . Используя (1.8), из (2.5) получим

$$\Delta\alpha_1 = i \frac{2}{3} \frac{k^2 h}{M_0} + O(k^2 h^2), \quad \Delta\alpha_2 = i \frac{2}{3} \frac{k^2 h}{M_0^4} + O(k^2 h^2)$$

Таким образом, в отличие от течения с тангенциальным разрывом ($h = 0$) течение со слоем смещения конечной толщины ($h > 0$) имеет при $M_0 > 2$ две неустойчивые волны. При $2 < M_0 < 2\sqrt{2}$ этим волнам соответствуют корни α_1 и α_3 , а при $M_0 > 2\sqrt{2}$ – корни α_1 и α_2 . Сопоставляя эти результаты с результатами работы [12], где рассматривались так называемые быстрая и медленная неустойчивые волны, видим, что корень α_1 соответствует медленной волне, а быстрой волне соответствуют корни α_3 при $M_0 < 2\sqrt{2}$ и α_2 при $M_0 > 2\sqrt{2}$.

Теперь рассмотрим поведение α -волн вблизи особенностей дисперсионного соотношения. Разложение $D_0(k, \alpha)$ в ряд Тейлора вблизи точки $\alpha = \alpha_i$ справедливо лишь в круге сходимости функции около этой точки. Поэтому проведенный выше анализ непригоден в тех случаях, когда происходит слияние корней и точек ветвления функции $D_0(k, \alpha)$ или слияние корней между собой. В частности, при $M_0 \approx 2$ корень α_3 находится одновременно в окрестности двух точек ветвления γ и β , при $M_0 \approx 2\sqrt{2}$ все три корня оказываются рядом. В этих случаях вместо асимптотики (2.5) должны использоваться другие асимптотические выражения, которые учитывают взаимное расположение особенностей (аналогично тому, как это делается при использовании канонических функций в методе наискорейшего спуска).

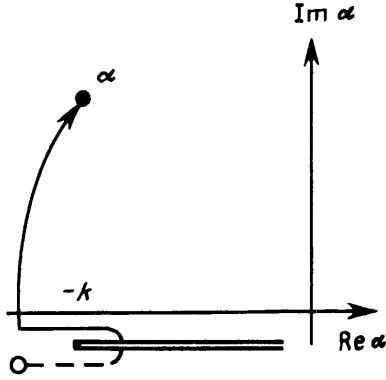
При $M_0 = 2 + \varepsilon$, $\varepsilon \ll 1$, дисперсионное уравнение (2.3) в окрестности корня α_3 сводится к уравнению

$$\sqrt{-\alpha - k} + \sqrt{\alpha + \frac{k}{M_0 - 1}} = -\frac{h}{k\sqrt{2k}} F(M_0, \alpha_3) + O(k^2 h^2)$$

Отсюда

$$\Delta\alpha_3 = -\frac{i}{2} kh \frac{F(M_0, \alpha_3)}{k^2} \sqrt{\frac{F^2(M_0, \alpha_3)}{4k^4} h^2 + \varepsilon} + O(k^2 h^2) \quad (3.2)$$

Из этого выражения, в частности, следует, что в случае $h \neq 0$ корень α_3 может появляться на первом листе римановой поверхности при $M_0 < 2$, поскольку подкоренное выражение в (3.2) может оставаться положительным при отрицательных значениях ε . Например, для линейного профиля скорости выражение (3.2) имеет вид $\Delta\alpha_3 = ik^2 h \sqrt{k^2 h^2 + \varepsilon}$. При положительном значении подкоренного выражения α_3 -волна становится неустойчивой. Для $M_0 = 1,9$ ($\varepsilon = -0,1$) это происходит при $kh > 0,31$, а для $M_0 = 1,8$ ($\varepsilon = -0,2$) – при $kh > 0,42$. При меньших значениях kh этот корень лежит на



Фиг. 4. Смещение корня α_3 в комплексной плоскости α при увеличении kh , $M_0 = 1,9$

действительной оси α . Эти результаты полностью соответствуют численным результатам работ [11–13]. Для линейного профиля скорости эволюция корня α_3 , в том числе его переход со второго листа на первый, представлены на фиг. 4.

При $M_0^2 = 8 + \epsilon$, $\epsilon \ll 1$, дисперсионное уравнение (2.3) в окрестности корней сводится к кубическому уравнению

$$(\alpha - \alpha_1)(\alpha - \alpha_2)(\alpha - \alpha_3) = -\frac{i}{24}khF(M_0, \alpha_3) + O(k^2h^2)$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{k}{\sqrt{2}} \left(-1 \pm \sqrt{\frac{\epsilon}{24}} \right), \quad \alpha_3 = -\frac{k}{\sqrt{2}}$$

Это уравнение следует рассматривать на верхней полуплоскости первого листа римановой поверхности и на его аналитическом продолжении в нижнюю полуплоскость (четвертый лист). В частности, для случая $\epsilon = 0$ из этого уравнения следует

$$\Delta\alpha_1 = e^{i\frac{5}{6}\pi}(kh)^{\frac{1}{3}} \left(-\frac{F(M_0, \alpha_1)}{24k^2} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad \Delta\alpha_2 = e^{i\frac{1}{6}\pi}(kh)^{\frac{1}{3}} \left(-\frac{F(M_0, \alpha_2)}{24k^2} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.3)$$

то есть неустойчивость в точке слияния корней усиливается. Корень α_3 смещается в нижнюю полуплоскость α и оказывается на четвертом листе.

Проведенное выше асимптотическое исследование для случая линейного профиля скорости (3.1) является наиболее простым. Однако возмущения такого течения не имеют критического слоя, поскольку для него $M''(y) = 0$. Для того чтобы исследовать влияние критического слоя на смещение корней, рассмотрим профиль скорости, имеющий более сложную форму (фиг. 1,в)

$$M_2(y) = \frac{M_0}{2} \left(\cos \pi \frac{y}{h} + 1 \right), \quad 0 \leq y \leq h \quad (3.4)$$

Для этого профиля скорости критический слой возникает для $\alpha_{1,2}$ -волн. Для α_3 -волны критический слой не возникает, так как фазовая скорость этой волны совпадает со скоростью потока в точке $y = h/2$, где $M''(y) = 0$. Поскольку выражения для корней α_1 и α_2 очень громоздки, то для иллюстрации приведем выражения для $\Delta\alpha_{1,2}$ только при больших M_0 . Подставляя (1.8) в (2.5) и вычисляя второй интеграл в (2.3) как предельное значение при $\text{Im } k \rightarrow +0$, получим

$$\Delta\alpha_1 = i \frac{k^2h}{M_0} \left[\frac{5}{8} + \frac{i}{2\sqrt{M_0}} \right] + O(k^2h^2), \quad \Delta\alpha_2 = i \frac{k^2h}{M_0^4} \left[\frac{5}{8} - \frac{i}{2\sqrt{M_0}} \right] + O(k^2h^2) \quad (3.5)$$

Сравним выражения (3.5) и (3.3). Для линейного профиля скорости (3.1) критический слой отсутствует и величина правой части в (2.3) действительна. Поэтому смещение корней при малых величинах h оказывается чисто мнимым. Для нелинейного профиля скорости (3.4) второй интеграл в выражении (2.3) имеет отличную от нуля мнимую часть из-за появления критического слоя. Это приводит к тому, что появляется смещение корней также вдоль действительной оси. В то же время изменение формы профиля слабо влияет на величину смещения корней в направлении мнимой оси.

Для оценки точности полученных асимптотических выражений проведено прямое численное интегрирование уравнения Рэлея и найдены корни точного дисперсионного уравнения (2.2) при произвольных величинах h . Поскольку при исследовании неустойчивых возмущений рассматривается только верхняя полуплоскость α ($\text{Im } \alpha > 0$), а коэффициенты уравнения (2.1) имеют особенность при действительных величинах α , то проблем, связанных с интегрированием вблизи критического слоя, не возникает. Численный анализ показывает, что асимптотические выражения обладают приемлемой точностью при $kh < 0,02$.

Заключение. Построена асимптотическая процедура, учитывающая влияние малой толщины слоя смешения h на двумерные возмущения сверхзвукового плоскопараллельного течения. Показано, что в области больших чисел Маха волны, нейтрально устойчивые в течении с тангенциальным разрывом, становятся неустойчивыми при $h \neq 0$, т.е. увеличение толщины слоя смешения в этом случае оказывается дестабилизирующим фактором. При $2 < M_0 < 2\sqrt{2}$ и $h \neq 0$ кроме неустойчивости Кельвина – Гельмгольца появляется дополнительная неустойчивая волна. Более точный анализ показал, что эта волна появляется при значениях числа M_0 , несколько меньших 2. При $M_0 > 2\sqrt{2}$ имеются две неустойчивые волны, инкремент которых пропорционален величине h . Таким образом, при $M_0 > 2$ и $h \neq 0$ имеются две неустойчивые волны (медленная и быстрая моды [12]).

Показано, что при числах Маха, лежащих вблизи значений 2 и $2\sqrt{2}$, влияние толщины слоя смешения на собственные волны имеет нелинейный характер даже при малых h вследствие слияния особых точек дисперсионного соотношения.

Проанализировано влияние структуры течения в слое смешения на расположение корней дисперсионного уравнения и показано, что сдвиг корней вдоль мнимой оси может быть описан с помощью простейшего линейного профиля скорости. Наличие критического слоя, связанного с кривизной формы профиля, приводит дополнительно к сдвигу корней вдоль действительной оси и при малых h не влияет на устойчивость.

Представленная работа выполнена при поддержке Международного научно-технического центра (грант № 200-95).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Tam C.K.W., Chen K.C. A statistical model of turbulence in two-dimensional mixing layers // J. Fluid Mech. 1979. V. 92. Pt 2. P. 303–326.
2. Седельников Т.Х. О частотном спектре шума сверхзвуковой струи // Физика аэродинамических шумов. М.: Наука, 1967. С. 83–88.
3. Tam C.K.W. Directional acoustic radiation from a supersonic jet generated by shear layer instability // J. Fluid Mech. 1971. V. 46. Pt 4. P. 757–768.
4. Tam C.K.W., Burton D.E. Sound generated by instability waves of supersonic flows. Pt 1, 2 // J. Fluid Mech. 1984. V. 138. P. 249–295.
5. Tam C.K.W. Stochastic model theory of broadband shock associated noise from supersonic jets // J. Sound Vibrat. 1987. V. 116. № 2. P. 265–302.
6. Lees L., Lin C.C. Investigation of the stability of the laminar boundary layer in compressible fluid // NASA. TN. 1946. № 1115. 83 p.

7. *Miles J.W.* On the disturbed motion of a plane vortex sheet // *J. Fluid Mech.* 1958. V. 4. Pt 5. P. 538–553.
8. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
9. *Blumen W.* Shear layer instability of an inviscid compressible fluid // *J. Fluid Mech.* 1970. V. 40. Pt 4. P. 769–781.
10. *Blumen W., Drazin P.G., Billings D.F.* Shear layer instability of an inviscid compressible fluid. Pt 2 // *J. Fluid Mech.* 1975. V. 71. Pt 2. P. 305–316.
11. *Michalke A.* The instability of free shear layers // *Progr. Aerospace Sci.* N.Y. et al.: Pergamon Press. 1972. V. 12. P. 213–239.
12. *Jackson T.L., Grosch C.E.* Inviscid spatial stability of an compressible mixing layer // *J. Fluid Mech.* 1989. V. 208. P. 609–637.
13. *Balsa T.F., Goldstein M.E.* On the instabilities of supersonic mixing layers: a high-Mach-number asymptotic theory // *J. Fluid Mech.* 1990. V. 216. P. 585–611.
14. *Ragab S.A., Wu J.L.* Linear instabilities in two-dimensional compressible mixing layers // *Phys. Fluids. A.* 1989. V. 1. № 6. P. 957–966.
15. *Tam C.K.W., Thies A.T.* Instability of rectangular jets // *Proc. 14th DGLR/AIAA Aeroacoustics Conf.* Aachen. Germany. 1992. V. 1. P. 279–286.
16. *Morris P.J., Bhat T.R.S.* Supersonic elliptic jet noise // *AIAA Paper.* 1993. № 4409. P. 14.
17. *Kopiev V.F., Chernyshev S.A.* Effect of the mixing layer structure of a supersonic jet on its resonance features // *AIAA Paper.* 1996. № 1671. P. 11.
18. *Briggs R.J.* Electron-stream interaction with plasmas. Cambridge: MIT Press, 1964. 187 p.

Москва

Поступила в редакцию
25.X.1996