МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 1998

УДК 532.527

© 1998 г. Ю.Д. ШМЫГЛЕВСКИЙ

О ЦЕПОЧКАХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ВИХРЕЙ

В аналитической форме представлены цепочки соосных вихревых образований типа "разрушения вихря" в осесимметричных закрученных потоках несжимаемой вязкой и идеальной жидкости.

Одиночным вихревым образованиям посвящена обширная литература. Статьи [1–8] помимо оригинальных результатов содержат обзоры исследований "разрушения вихря". В [9] дано аналитическое представление такого вихря в потенциально закрученном потоке несжимаемой жидкости и проведен краткий обзор работ [1–8].

В [1, 6] приведены фотографии осесимметричных течений, в которых на оси потока фигурирует по два "разрушения вихря". Все эти вихри в экспериментах наблюдались в потоках, закрученных вокруг оси симметрии. Одно из решений [10], удовлетворяющих как уравнениям Эйлера, так и уравнениям Навье – Стокса, позволяет выделить из него представления цепочек вихревых образований.

Уравнения Навье – Стокса в осесимметричном случае имеют вид

$$u_x + v_r + \frac{v}{r} = 0, \quad u_r - v_x = \omega$$

$$u\omega_x + v\omega_r - \frac{v\omega}{r} + \frac{(w^2)_x}{r} = \varepsilon\left(\omega_{xx} + \omega_{rr} + \frac{\omega_r}{r} - \frac{\omega}{r^2}\right)$$

$$uw_x + vw_r + \frac{vw}{r} = \varepsilon\left(w_{xx} + w_{rr} + \frac{w_r}{r} - \frac{w}{r^2}\right)$$

где x, r – составляющие цилиндрических координат, u, v, w – осевая, радиальная и азимутальная составляющие вектора скорости, ω – вихрь, ε – кинематический коэффициент вязкости. Упомянутые решения для w, ω и функции тока ψ имеют вид [10]

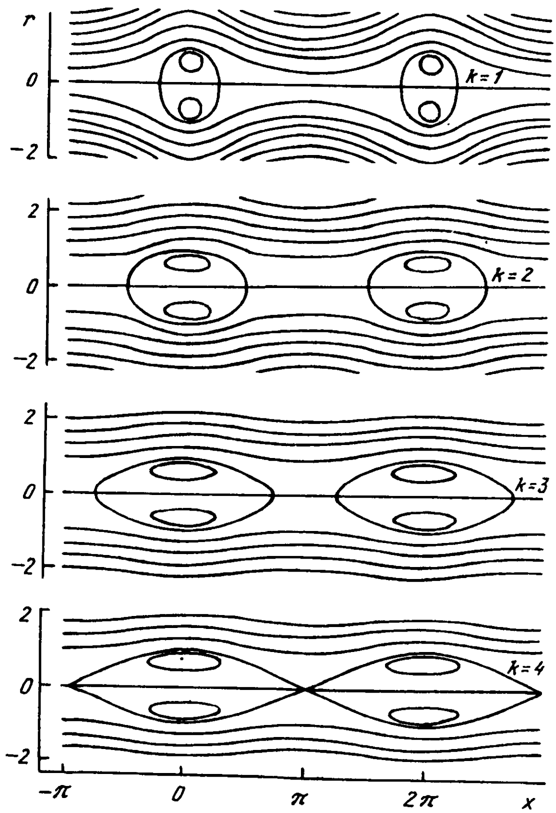
$$d\psi = rudr - rvdx$$

$$w = \frac{c}{r}, \quad \omega = mr$$

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r}{\lambda_n}\left[c_{n1}\cos(\lambda_n x) - c_{n2}\sin(\lambda_n x)\right]\left[(\sin c_{n3})\times\right.$$

$$\left.\times I_1(\lambda_n r) + (\cos c_{n3})K_1(\lambda_n r)\right] + \frac{c}{2}r^2 + \frac{m}{8}r^4$$

где c, m, λ_n, c_{n1}, c_{n2}, c_{n3} – произвольные постоянные, I_1 и K_1 – модифицированные функции Бесселя. Постоянная c не входит в выражение для ψ. Это означает, что при любых c, но при фиксированных других постоянных, картина линий ψ = const в меридиональной плоскости x, r остается неизменной. Эти линии определяются пересечением



Линии тока течений с вихревыми цепочками

осесимметричных поверхностей тока с меридиональной плоскостью. При $c \neq 0$ течения имеют на оси особенность потенциального вихря.

Выбор $\lambda_1 = 1$, $\lambda_n = 0$ при $n \neq 1$, $c_{11} = 1$, $c_{n1} = 0$ при $n \neq 1$, $c_{n2} = 0$, $c_{13} = \pi/2$ позволяет построить примеры цепочек вихрей. При этом

$$\psi = rI_1(r)\cos x + \frac{c}{2}r^2 + \frac{m}{8}r^4$$

$$u = \frac{1}{r}\psi_r = I_0(r)\cos x + c + \frac{m}{2}r^2, \quad v = -\frac{1}{r}\psi_x = I_1(r)\sin x$$

где I_0 – модифицированная функция Бесселя. На оси $r = 0$ величина $\psi = 0$. Каждое вихревое образование на оси должно быть окружено также линией $\psi = 0$. Точка пересечения этой линии с осью является точкой торможения. В ней $u = v = 0$. На оси, как это видно из последних формул, $v = 0$. Требование обращения в нуль величины u при $r = 0$ и заданном $x = x_0$ приводит к равенству $c = -\cos x_0$. Наконец, пусть при $x = 0$ радиус вихревого образования $r = 1$. Тогда из последнего выражения для ψ следует, что $m = 4\cos x_0 - 8I_1(1)$. В этом случае

$$\psi = rI_1(r)\cos x + \tfrac{1}{2}(r^4 - r^2)\cos x_0 - I_1(1)r^4$$

На фигуре помимо шкал x и r изображены линии $\psi = \text{const}$ при $x_0 = k\pi/4$, $k = 1, ..., 4$. Во внешнем по отношению к вихревым образованиям потоке $u < 0$.

При $k = 1, 2, 3$, т. е. при $x_0 = 0{,}7854$, $1{,}5708$, $2{,}3562$, возникают бесконечные периодические цепочки "разрушений вихря" и картины линий $\psi = \text{const}$ топологически эквивалентны. Эта эквивалентность имеет место при $\pi > x_0 > \arccos[4I_1(1) - I_0(1)] = 0{,}1043$. При $k = 4$ вихревые образования смыкаются на оси симметрии.

Изменение постоянных в выражении для ψ позволяет получать течения иных типов. Например, при $k = 0$, $c = -0{,}9987$, $m = 0{,}5213$ вместо цепочки "разрушений вихря" возникает периодическая цепочка вихревых колец.

Форма вихревых образований, естественно, изменится, если изменить выбранное значение λ_1, а также если использовать не одно слагаемое в сумме, входящей в выражение для ψ. Если, например, отношение λ_1/λ_2 не есть рациональная дробь, то можно получить непериодическую систему вихрей.

Как и в случае одиночного вихревого образования [9], в представленном здесь решении вектор вихря скорости сохраняется на прямых, параллельных оси симметрии.

Заключение. Помимо широких возможностей варьирования формы расположенных цепочкой осесимметричных вихревых образований полученное аналитическое решение уравнений Навье – Стокса создает также возможность исследования структуры одного из видов "разрушения вихря" и, в частности, характера особенности в его точках, расположенных на оси симметрии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gartshore I.S.* Recent work in swirling incompressible flow // Nat. Res. Coun. Canada. Aeronaut. Rep. 1962. LR-343. 53 p.
2. *Hall M.G.* Vortex breakdown // Annu. Rev. Fluid Mech. 1978. V. 4. P. 195–218.
3. *Leibovich S.* The structure of vortex breakdown // Annu. Rev. Fluid Mech. 1978. V. 10. P. 221–246.
4. *Leibovich S.* Vortex stability and breakdown: survey and extension // AIAA Journal. 1984. V. 22. № 9. P. 1192–1206.
5. *Тригуб В.Н.* К вопросу о разрушении вихревой нити // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 2. С. 220–226.
6. *Escudier M.* Vortex breakdown: observations and explanations // Progr. Aerospace. Sci. 1988. V. 25. № 2. P. 189–229.
7. *Spall R.E., Gatski T.B., Ash R.L.* The structure and dynamics of bubble-type vortex breakdown // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1990. V. 429. № 1877. P. 613–637.
8. *Сычев Вик.В.* Асимптотическая теория разрушения вихря // Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 3. С. 78–90.
9. *Шмыглевский Ю.Д.* О "разрушении вихря" // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 3. С. 167–169.
10. *Шмыглевский Ю.Д.* О закрученных течениях идеальной и вязкой жидкости // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1993. Т. 33. № 12. С. 1905–1911.

Москва

Поступила в редакцию
17.X.1996