МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 1998

УДК 533.72

© 1998 г. М.Н. ГАЙДУКОВ, В.Н. ПОПОВ

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОМ ТЕЧЕНИИ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА ВБЛИЗИ СЛАБО ИСКРИВЛЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Представлен аналитический метод решения полупространственной краевой задачи для неоднородного кинетического уравнения Больцмана с оператором столкновений в форме эллипсоидально-статистической модели (ЭС-модели уравнения Больцмана) в задаче о неизотермическом течении потока разреженного газа вблизи слабо искривленной поверхности. Получено точное аналитическое выражение для скорости теплового скольжения одноатомного газа вдоль поверхности твердой сферической аэрозольной частицы. Найдено численное значение газокинетического коэффициента, учитывающего влияние кривизны поверхности на коэффициент теплового скольжения. Проведено сравнение с литературными данными.

Зависимость коэффициента теплового скольжения k_{TS} от кривизны поверхности впервые получена в [1]. В линейном приближении такую зависимость можно записать в виде $k_{TS} = k_{TS}^{(0)}(1 + \beta \mathrm{Kn})$, где $k_{TS}^{(0)}$ – коэффициент теплового скольжения вдоль плоской поверхности. До настоящего времени нет единого мнения о величине коэффициента β. Так, в [2] из решения в слое Кнудсена кинетического уравнения Больцмана с оператором столкновений в форме Больцмана с использованием метода полупространственных моментов для молекул, взаимодействующих как твердые сферы, получено значение $\beta = -2{,}103$. В [1] из решения интегральных уравнений, к которым сведена исходная БГК-модель кинетического уравнения Больцмана, найдено $\beta = -1{,}18$. В [3] для ЭС-модели уравнения Больцмана методом полупространственных моментов получено $\beta = -0{,}701$. В [4] вариационным методом вычислено значение $\beta = -1{,}26$. В [4] и [5] путем пересчета экспериментально полученной зависимости эффекта тепловой поляризации тел в потоке разреженного газа от числа Кнудсена получены значения β соответственно $-2{,}6 \pm 0{,}4$ и $-2{,}6 \pm 0{,}15$.

Целью настоящей работы является получение с использованием метода элементарных решений (метода Кейза) поправки к скорости теплового скольжения, обусловленной зависимостью коэффициента теплового скольжения от кривизны межфазной поверхности.

1. Постановка задачи. Вывод основных уравнений. Рассмотрим сферическую аэрозольную частицу, обтекаемую потоком неоднородного по температуре разреженного газа при малых отклонениях от равновесного состояния. Течение газа будем описывать уравнением Больцмана с линеаризованным оператором столкновений в форме ЭС-модели [6–9], записанным в сферической системе координат, центр которой совпадает с центром частицы и полярная ось которой направлена вдоль градиента температуры вдали от частицы.

Линеаризуем функцию распределения, описывающую состояние газа, относительно локально-равновесной функции распределения в приближении Чепмена – Энскога [10]. Раскладывая функцию $Y(r, \theta, C_i)$, учитывающую отклонение функции распределения газовых молекул по скоростям и координатам в слое Кнудсена от функции распределения в объеме газа, в ряд по малому параметру $1/R$

$$Y(r,\theta,C_i)=Y^{(1)}(r,\theta,C_i)+R^{-1}Y^{(2)}(r,\theta,C_i)+\ldots \tag{1.1}$$

придем к системе одномерных интегродифференциальных уравнений

$$C_r\frac{\partial Y^{(1)}}{\partial r}+Y^{(1)}=\omega^{(1)}+2C_\theta u_\theta^{(1)}+\left(C^2-\frac{3}{2}\right)\tau^{(1)}-\frac{1}{p}p_{ij}^{(1)}C_iC_j \tag{1.2}$$

$$C_r\frac{\partial Y^{(2)}}{\partial r}+Y^{(2)}=\omega^{(2)}+2C_\theta u_\theta^{(2)}+\left(C^2-\frac{3}{2}\right)\tau^{(2)}-\frac{1}{p}p_{ij}^{(2)}C_iC_j- \tag{1.3}$$

$$-\left[(C_\theta^2+C_\varphi^2)\frac{\partial Y^{(1)}}{\partial C_r}+(C_\varphi^2\operatorname{ctg}\theta-C_rC_\theta)\frac{\partial Y^{(1)}}{\partial C_\theta}-(C_\varphi C_\theta\operatorname{ctg}\theta+C_rC_\varphi)\frac{\partial Y^{(1)}}{\partial C_\varphi}\right]-C_\theta\frac{\partial Y^{(1)}}{\partial\theta}$$

$$\omega^{(i)}=\pi^{-3/2}\int\int\int Y^{(i)}(r,\theta,C_i)\exp(-C^2)d^3C_i$$

$$\tau^{(i)}=\frac{2}{3}\pi^{-3/2}\int\int\int\left(C^2-\frac{3}{2}\right)Y^{(i)}(r,\theta,C_i)\exp(-C^2)d^3C_i$$

$$u_\theta^{(i)}=\pi^{-3/2}\int\int\int C_\theta Y^{(i)}(r,\theta,C_i)\exp(-C^2)d^3C_i$$

$$p_{ij}^{(i)}=2p\pi^{-3/2}\int\int\int\left(C_iC_j-\frac{1}{3}\delta_{ij}C^2\right)Y^{(i)}(r,\theta,C_i)\exp(-C^2)d^3C_i$$

с граничными условиями

$$Y^{(1)}(R,\theta,C_i)=-2C_\theta u_\theta^{(1)}(R,\theta)+C_\theta\left(C^2-\frac{5}{2}\right)\frac{\partial\ln T}{R\partial\theta},\quad C_r>0$$

$$Y^{(2)}(R,\theta,C_i)=-2C_\theta u_\theta^{(2)}(R,\theta),\quad C_r>0$$

$$\lim_{r\to\infty}Y^{(1)}(r,\theta,C_i)=0,\quad \lim_{r\to\infty}Y^{(2)}(r,\theta,C_i)=0$$

из которых находим вид двух первых членов разложения (1.1).

Здесь $r(3\mu/2p)(2kT/m)^{1/2}$ – размерный радиус-вектор; $u_i(2kT/m)^{1/2}$ и $C_i(2kT/m)^{1/2}$ – компоненты среднемассовой скорости потока и собственной скорости молекул газа; ω и τ – возмущения концентрации и температуры; p_{ij} – тензор вязких напряжений; μ – динамическая вязкость газа; p – статическое давление. Способ обезразмеривания величин совпадает с принятым в [9].

Уравнение (1.2) описывает процессы, происходящие на границе твердой плоской поверхности, а (1.3) позволяет учесть влияние кривизны поверхности.

Решение (1.2) ищем в виде разложения по двум ортогональным многочленам

$$Y^{(1)}(r,\theta,C_i)=C_\theta Y_a^{(1)}(r,\theta,C_r)+C_\theta(C_\theta^2+C_\varphi^2-2)Y_b^{(1)}(r,\theta,C_r) \tag{1.4}$$

Заметим, что ортогональность понимается здесь в смысле скалярного произведения

$$(f,g)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(r,\theta,C_i)g(r,\theta,C_i)\exp(-C^2)d^3C_i$$

Решение (1.3) ищем в виде

$$Y^{(2)}(r,\theta,C_i)=C_\theta Y_a^{(2)}(r,\theta,C_r)+\sum_k b_k(C_\theta,C_\varphi)Y_k^{(2)}(r,\theta,C_r) \tag{1.5}$$

где C_θ в совокупности с $b_k(C_\theta, C_\varphi)$ образует полную систему ортогональных (в смысле скалярного произведения) многочленов.

Обозначим $\mu = C_r$. Тогда, подставляя разложения (1.4) и (1.5) в (1.3), домножая полученное соотношение на $C_\theta \exp(-C_\theta^2 - C_\varphi^2)$ и интегрируя по C_θ и C_φ от $-\infty$ до $+\infty$, получим уравнение для функции $Y_a^{(2)}(r, \theta, \mu)$

$$\mu \frac{\partial Y_a^{(2)}}{\partial r} + Y_a^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Y_a^{(2)} \exp(-\mu'^2) d\mu' - \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mu' Y_a^{(2)} \exp(-\mu'^2) d\mu' +$$

$$+\left[\mu Y_a^{(1)} - 2\frac{\partial Y_a^{(1)}}{\partial \mu} + 4\mu Y_b^{(1)} - 2\frac{\partial Y_b^{(1)}}{\partial \mu}\right] \tag{1.6}$$

с граничными условиями

$$Y_a^{(2)}(R,\theta,\mu) = -2u_\theta^{(2)}(R,\theta), \quad \mu > 0, \quad \lim_{r\to\infty} Y_a^{(2)}(r,\theta,\mu) = 0 \tag{1.7}$$

Учитывая, что в случае сдвигового течения газа вдоль твердой плоской поверхности результаты, полученные на основе ЭС- и БГК-моделей кинетического уравнения Больцмана, совпадают [7], для функций $Y_a^{(1)}(r, \theta, C_r)$ и $Y_b^{(1)}(r, \theta, C_r)$ имеем [8]

$$Y_a^{(1)}(x,\theta,\mu) = \int_0^{\infty} a(\eta,\theta) f(\eta,\mu) \exp(-x/\eta) d\eta \tag{1.8}$$

$$Y_b^{(1)}(x,\theta,\mu) = k\int_0^{\infty} \exp(-x/\eta)\delta(\eta-\mu) d\eta$$

$$f(\eta,\mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \eta P \frac{1}{\eta-\mu} + \exp(\eta^2)\lambda_c(\eta)\delta(\eta-\mu) \tag{1.9}$$

$$\lambda_c(\eta) = 1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \eta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\mu^2)}{\mu-\eta} d\mu = 1 - 2\eta\exp(-\eta^2)\int_0^{\eta} \exp(u^2) du$$

$$x = r - R, \quad k = \frac{\partial \ln T}{R\partial\theta} \tag{1.10}$$

$$Y_a^{(1)}(0,\theta,\mu) = -2u_\theta^{(1)}(R,\theta) + \left(\mu^2 - \frac{1}{2}\right)k, \quad \mu > 0; \quad \lim_{r\to\infty} Y_a^{(1)}(r,\theta,\mu) = 0$$

$$Y_b^{(1)}(0,\theta,\mu) = k, \quad \mu > 0; \quad \lim_{r\to\infty} Y_a^{(1)}(r,\theta,\mu) = 0$$

Здесь $P(1/x)$ – распределение в смысле главного значения [11], $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

Таким образом, задача свелась к решению уравнения (1.6) с граничными условиями (1.7).

2. Учет влияния кривизны поверхности на коэффициент теплового скольжения. Будем искать решение уравнения (1.6) в виде разложения по собственным векторам дискретного и непрерывных спектров.

Анзац Кейза

$$Y_{a\eta}^{(2)}(x,\theta,\mu) = \psi(\eta,\theta,\mu)\exp(-x/\eta)$$

переводит (1.6) в неоднородное характеристическое уравнение

$$\left(1 - \frac{\mu}{\eta}\right)\psi(\eta,\theta,\mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\eta,\theta,\mu')\exp(-\mu'^2) d\mu' +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mu \int_{-\infty}^{\infty} \mu'\psi(\eta,\theta,\mu')\exp(-\mu'^2) d\mu' + F(\eta,\theta,\mu) \tag{2.1}$$

$$F(\eta,\theta,\mu)=\mu a(\eta,\theta)f(\eta,\mu)-2\frac{\partial}{\partial\mu}a(\eta,\theta)f(\eta,\mu)+4\mu k\delta(\eta-\mu)-2k\frac{\partial}{\partial\mu}\delta(\eta-\mu) \tag{2.2}$$

Домножая (2.1) на $\exp(-\mu^2)$ и интегрируя по μ от $-\infty$ до ∞, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mu\psi(\eta,\theta,\mu)\exp(-\mu^2)d\mu=-\int_{-\infty}^{\infty}\eta F(\eta,\theta,\mu)\exp(-\mu^2)d\mu$$

Найдем значение последнего интеграла, учитывая вид $f(\eta,\mu)$, задаваемый выражением (1.9). Для этого вычислим интеграл от каждого слагаемого в отдельности. Последовательно имеем

$$a(\eta,\theta)\int_{-\infty}^{\infty}\mu\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\eta P\frac{1}{\eta-\mu}+\exp(\eta^2)\lambda_c(\eta)\delta(\eta-\mu)\right]\exp(-\mu^2)d\mu=$$

$$=\eta a(\eta,\theta)\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\mu^2)\frac{\mu}{\eta-\mu}d\mu+\lambda_c(\eta)\right]=0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}(a(\eta,\theta)f(\eta,\mu))'_\mu\exp(-\mu^2)d\mu=a(\eta,\theta)f(\eta,\mu)\exp(-\mu^2)\Big|_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty}+$$

$$+2\int_{-\infty}^{\infty}\mu a(\eta,\theta)f(\eta,\mu)\exp(-\mu^2)d\mu=0$$

$$-2k\int_{-\infty}^{\infty}(\delta(\eta-\mu))'_\mu\exp(-\mu^2)d\mu=-2k[\delta(\eta-\mu)\exp(-\mu^2)\Big|_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty}+$$

$$+2\int_{-\infty}^{\infty}\mu\delta(\eta-\mu)\exp(-\mu^2)d\mu]=-4k\eta\exp(-\eta^2)$$

$$4k\int_{-\infty}^{\infty}\mu\delta(\eta-\mu)\exp(-\mu^2)d\mu=4k\eta\exp(-\eta^2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(\eta,\theta,\mu)\exp(-\mu^2)d\mu=0$$

С учетом полученных результатов характеристическое уравнение (2.1) запишется в виде

$$(\eta-\mu)\psi(\eta,\theta,\mu)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\eta m(\eta,\theta)+\eta F(\eta,\theta,\mu) \tag{2.3}$$

$$m(\eta,\theta)=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\eta,\theta,\mu)\exp(-\mu^2)d\mu \tag{2.4}$$

Общее решение уравнения (2.3) в пространстве обобщенных функций имеет вид [12]

$$\psi(\eta,\theta,\mu)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\eta P\frac{1}{\eta-\mu}m(\eta,\theta)+\eta P\frac{1}{\eta-\mu}F(\eta,\theta,\mu)+g(\eta,\theta)\delta(\eta-\mu) \tag{2.5}$$

Явный вид функции $g(\eta,\theta)$ находим, подставляя (2.5) в (2.4)

$$g(\eta,\theta)=m(\eta,\theta)\left[1-\eta\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\mu^2)\frac{d\mu}{\eta-\mu}\right]\exp(\eta^2)-$$

$$-\eta\exp(\eta^2)\int_{-\infty}^{\infty} P\frac{1}{\eta-\mu}F(\eta,\theta,\mu)\exp(-\mu^2)d\mu$$

Интегралы в последнем выражении вычисляются аналитически. Для первого имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\mu^2)\frac{d\mu}{\eta-\mu}=2\sqrt{\pi}\exp(-\eta^2)\int_0^{\eta}\exp(u^2)du$$

Значение второго найдем с использованием выражений, приведенных в Приложении. Последовательно имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} P\frac{1}{\eta-\mu}\mu f(\eta,\mu)\exp(-\mu^2)d\mu=-\left[\frac{\eta}{\sqrt{\pi}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\mu P\frac{1}{\eta-\mu}\exp(-\mu^2)d\mu\right)'_{\eta}+\right.$$

$$\left.+\exp(\eta^2)\lambda_c(\eta)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\mu\exp(-\mu^2)\delta(\eta-\mu)d\mu\right)'_{\eta}\right]=\eta\lambda_c'(\eta)-\exp(\eta^2)\lambda_c(\eta)(\eta\exp(-\eta^2))'_{\eta}=-1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} P\frac{1}{\eta-\mu}(f(\eta,\mu))'_{\mu}\exp(-\mu^2)d\mu=\frac{1}{2}\left[\frac{\eta}{\sqrt{\pi}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}P\frac{1}{\eta-\mu}\exp(-\mu^2)d\mu\right)''_{\eta\eta}+\right.$$

$$\left.+\exp(\eta^2)\lambda_c(\eta)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\eta-\mu)\exp(-\mu^2)d\mu\right)''_{\eta\eta}\right]=$$

$$=\eta(\exp(\eta^2)\int_0^{\eta}\exp(-u^2)du)''_{\eta\eta}-\exp(\eta^2)\lambda_c(\eta)(\eta\exp(-\eta^2))'_{\eta}=$$

$$=\eta\lambda_c'(\eta)-\exp(\eta^2)\lambda_c(\eta)(\eta\exp(-\eta^2))'_{\eta}=-1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} P\frac{1}{\eta-\mu}\mu\delta(\eta-\mu)\exp(-\mu^2)d\mu=-\left(\int_{-\infty}^{\infty}\mu\exp(-\mu^2)\delta(\eta-\mu)d\mu\right)'_{\eta}=$$

$$=-(\eta\exp(-\eta^2))'_{\eta}=2\exp(-\eta^2)\left(\eta^2-\frac{1}{2}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} P\frac{1}{\eta-\mu}(\delta(\eta-\mu))'_{\mu}\exp(-\mu^2)d\mu=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(\delta(\eta-\mu)\exp(-\mu^2)d\mu)''_{\eta\eta}=$$

$$=-(\eta\exp(-\eta^2))'_{\eta}=2\exp(-\eta^2)\left(\eta^2-\frac{1}{2}\right)$$

Отсюда после несложных преобразований получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} P\frac{1}{\eta-\mu}F(\eta,\theta,\mu)\exp(-\mu^2)d\mu=a(\eta,\theta)+4k\exp(-\eta^2)\left(\eta^2-\frac{1}{2}\right)$$

Здесь $a(\eta,\theta)$ – коэффициенты непрерывного спектра в задаче о тепловом скольжении одноатомного газа вдоль твердой плоской поверхности, которые могут быть представлены в виде [11]

$$a(\eta,\theta)=\frac{p(\eta)}{p^2(\eta)+\pi\eta^2}\chi(\eta,\theta)-\frac{1}{X^-(\eta)p^+(\eta)}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{X^-(t)}{p^-(t)}\frac{t\chi(t,\theta)}{t-\eta}dt$$

$$p^{\pm}(\eta)=\exp(\eta^2)\lambda_c^{\pm}(\eta)=\exp(\eta^2)\lambda_c(\eta)\pm\sqrt{\pi}i\eta \tag{2.6}$$

$$X^{-}(\eta)=-\frac{1}{\eta}\left(\frac{\lambda_c^{-}(\eta)}{\lambda_c^{+}(\eta)}\right)^{1/2}\exp\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\Omega(\tau)-\pi}{\tau-\eta}d\tau\right\} \tag{2.7}$$

$$\Omega(\tau)=\begin{cases}\operatorname{Arctg}\dfrac{\sqrt{\pi}\tau}{p(\tau)}, & 0<\tau<0,9240\\ \operatorname{Arctg}\dfrac{\sqrt{\pi}\tau}{p(\tau)}+\pi, & \tau>0,9240\end{cases} \tag{2.8}$$

$$\chi(\eta,\theta)=Y_a^{(1)}(0,\theta,\eta)=(\eta^2+Q_2)k \tag{2.9}$$

Здесь $\Omega(\tau)=\arg\lambda_c(\tau)$ – главное значение аргумента функции $\lambda_c^{+}(\tau)$.

При записи (2.9) учтено, что выражение для $u_\theta^{(1)}(R,\theta)$, полученное в [1], может быть представлено в виде

$$u_\theta^{(1)}(R,\theta)=-\frac{1}{2}\left(Q_2+\frac{1}{2}\right)k \tag{2.10}$$

где символ Q_n используется для обозначения лоялковских интегралов [13]

$$Q_n=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{X^{-}(t)}{\lambda_c^{-}(t)}\exp(-t^2)t^{n+1}dt$$

С учетом полученных результатов запишем решение уравнения (1.6)

$$Y_a^{(2)}(x,\theta,\mu)=\int_0^{\infty}\psi(\eta,\theta,\mu)\exp(-x/\eta)d\eta \tag{2.11}$$

$$\psi(\eta,\theta,\mu)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\eta P\frac{1}{\eta-\mu}m(\eta,\theta)+\eta P\frac{1}{\eta-\mu}F(\eta,\theta,\mu)+$$
$$+\left[m(\eta)\exp(\eta^2)\lambda_c(\eta)-\eta\left(a(\eta,\theta)\exp(\eta^2)+4k\left(\eta^2-\frac{1}{2}\right)\right)\right]\delta(\eta-\mu)$$

где $\psi(\eta,\theta,\mu)$ – собственные функции непрерывного спектра.

Учитывая вид граничных условий, которым удовлетворяет функция $Y_a^{(2)}(x,\theta,\mu)$, от (2.11) перейдем к характеристическому сингулярному уравнению с ядром типа Коши

$$-2u_\theta^{(2)}(R,\theta)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{\eta m(\eta,\theta)}{\eta-\mu}d\eta+\int_0^{\infty}\eta F(\eta,\theta,\mu)\frac{d\eta}{\eta-\mu}+$$
$$+m(\mu,\theta)\exp(\mu^2)\lambda_c(\mu)-\left(\mu a(\mu)\exp(\mu^2)+4k\mu\left(\mu^2-\frac{1}{2}\right)\right),\quad \mu>0 \tag{2.12}$$

Для вычисления второго интеграла, входящего в (2.12), воспользуемся соотношениями, приведенными в Приложении. Принимая во внимание вид функции $F(\eta,\theta,\mu)$, задаваемый (2.2), а также (2.9) и (1.8), имеем

$$\int_0^{\infty}\eta P\frac{1}{\eta-\mu}a(\eta,\theta)f(\eta,\mu)d\eta=\left(\mu\int_0^{\infty}a(\eta,\theta)f(\eta,\mu)d\eta\right)'_{\mu}=(\mu\chi(\mu,\theta))'_{\mu}$$

$$\int_0^{\infty}\eta P\frac{1}{\eta-\mu}(f(\eta,\mu))'_{\mu}d\eta=\frac{1}{2}\left(\mu\int_0^{\infty}a(\eta,\theta)f(\eta,\mu)d\eta\right)''_{\mu\mu}=\frac{1}{2}(\mu\chi(\mu,\theta))''_{\mu\mu}$$

$$\int_0^\infty \eta P\frac{1}{\eta-\mu}\delta(\eta-\mu)d\eta=\left(\int_0^\infty \eta\delta(\eta-\mu)d\eta\right)'_\mu=1$$

$$\int_0^\infty \eta P\frac{1}{\eta-\mu}(\delta(\eta-\mu))'_\mu d\eta=\frac{1}{2}\left(\int_0^\infty \eta\delta(\eta-\mu)d\eta\right)''_{\mu\mu}=0$$

В результате получаем

$$\int_0^\infty \eta P\frac{1}{\eta-\mu}F(\eta,\theta,\mu)d\eta=\mu(\mu\chi(\mu,\theta))'_\mu-(\mu\chi(\mu,\theta))''_{\mu\mu}+4\mu k$$

Обозначим

$$\chi_1(\mu,\theta)=-2u_\theta^{(2)}(R,\theta)-(\mu(\mu\chi(\mu,\theta))'_\mu-(\mu\chi(\mu,\theta))''_{\mu\mu}+4\mu k)+$$

$$+\left(\mu a(\mu,\theta)\exp(\mu^2)+4k\mu\left(\mu^2-\frac{1}{2}\right)\right) \tag{2.13}$$

и перепишем (2.12) в виде

$$\chi_1(\mu,\theta)=m(\mu,\theta)\exp(\mu^2)\lambda_c(\mu)+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\frac{\mu m(\mu,\theta)}{\eta-\mu}d\eta,\quad \mu>0 \tag{2.14}$$

Введем вспомогательную функцию

$$M(z,\theta)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty\frac{\eta m(\eta,\theta)}{\eta-z}d\eta$$

и сведем (2.14) к полупространственной краевой задаче Римана

$$M^+(\mu,\theta)\lambda_c^+(\mu)-M^-(\mu,\theta)\lambda_c^-(\mu)=\mu\chi_1(\mu,\theta)\exp(-\mu^2),\quad \mu>0 \tag{2.15}$$

Коэффициент краевой задачи (2.15) совпадает с коэффициентом краевой задачи о скольжении газа вдоль твердой плоской поверхности [8]. С учетом этого сведем (2.15) к задаче о скачке [11]

$$M^+(\mu,\theta)X^+(\mu)-M^-(\mu,\theta)X^-(\mu)=\mu\chi_1(\mu,\theta)\exp(-\mu^2)\frac{X^-(\mu)}{\lambda_c^-(\mu)},\quad \mu>0$$

которая имеет исчезающее на бесконечности решение при выполнении условия [8]

$$\int_0^\infty\frac{X^-(t)}{\lambda_c^-(t)}t\exp(-t^2)\chi_1(t,\theta)dt=0 \tag{2.16}$$

Здесь $\chi_1(t,\theta)$ определяется выражением (2.13), которое с учетом (2.9) принимает вид

$$\chi_1(\eta,\theta)=-2u_\theta^{(2)}(R,\theta)+\eta(\eta^2-Q_2)k+\left(\frac{p(\eta)}{p^2(\eta)+\pi\eta^2}\eta\exp(\eta^2)(\eta^2+Q_2)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\eta\exp(\eta^2)}{X^-(\eta)p^+(\eta)}\int_0^\infty\frac{X^-(t)}{p^-(t)}\frac{t(t^2+Q_2)}{t-\eta}dt\right)k \tag{2.17}$$

Подставляя (2.17) в (2.16), получим аналитическое выражение для поправки к скорости скольжения, обусловленной зависимостью коэффициента теплового скольжения от кривизны поверхности

$$u_\theta^{(2)}(R,\theta)=\frac{1}{2Q_0}\left[(Q_3-Q_2Q_1)+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\frac{X^-(t)}{p^-(t)}\frac{p(t)}{p^2(t)+\pi t^2}t^2\exp(t^2)(t^2+Q_2)dt-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{t^2\exp(t^2)}{p^2(t)+\pi t^2}dt\int_0^\infty\frac{X^-(u)}{p^-(u)}\frac{u(u^2+Q_2)du}{u-t}\right]k \qquad (2.18)$$

Здесь k, $p^\pm(u)$, $X^-(u)$ определены соответственно выражениями (1.10), (2.6), (2.7).

Интегралы в (2.18) вычислены с использованием квадратурных формул типа прямоугольников путем сведения к последовательному вычислению определенных интегралов [14]. Значения особых интегралов найдены в смысле главного значения [11]. Методика вычисления подобного рода интегралов изложена в [15]. Вычисление несобственных интегралов в (2.18) облегчается тем, что их подынтегральные выражения достаточно быстро сходятся, обращаясь в нуль уже при значениях t и u равных 5. В [13] для вычисления подобных интегралов в качестве ∞ принималось значение 4,5.

В результате получены следующие значения интегралов в (2.18):

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\frac{X^-(t)}{p^-(t)}\frac{p(t)}{p^2(t)+\pi t^2}t^2\exp(t^2)(t^2+Q_2)dt=3,441 \qquad (2.19)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{t^2\exp(t^2)}{p^2(t)+\pi t^2}dt\int_0^\infty\frac{X^-(u)}{p^-(u)}\frac{u(u^2+Q_2)du}{u-t}=-0,716$$

Подставляя (2.19) в (2.18), окончательно имеем

$$u_\theta^{(2)}(R,\theta)=-0,525k \qquad (2.20)$$

3. Вычисление скорости теплового скольжения одноатомного газа вдоль слабо искривленной поверхности. Учитывая (1.1), (2.10) и (2.20), получим выражение для скорости теплового скольжения разреженного газа вдоль поверхности твердой сферической аэрозольной частицы

$$u_\theta(R,\theta)=\left(0,383-\frac{0,525}{R}\right)\frac{\partial\ln T}{R\partial\theta} \qquad (3.1)$$

С учетом принятых в работе обозначений для безразмерных величин после несложных преобразований получаем

$$u_\theta(R,\theta)=1,149\nu\left(\frac{m}{2kT}\right)^{1/2}(1-2,32\,\mathrm{Kn})\frac{\partial\ln T}{R\partial\theta} \qquad (3.2)$$

Сравнивая (3.2) с результатами [1–5], имеем: $k_{TS}^{(0)}$ = 1,149, β = –2,32.

Заключение. Полученная в линейном приближении по числу Кнудсена зависимость коэффициента теплового скольжения одноатомного газа от радиуса кривизны имеет тот же вид, что и зависимость, полученная ранее в [1–3], а значение коэффициента β хорошо согласуется с результатами, найденными в [2, 4, 5].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Для вычисления встречающихся в работе интегралов воспользуемся основными свойствами функций $P(1/x)$ и $\delta(x)$ [8]

$$(\eta-\mu)\delta(\eta-\mu)=0,\quad (\eta-\mu)P\frac{1}{\eta-\mu}=1$$

дифференцируя которые, получаем

$$\delta'_\mu(\eta-\mu)=\delta(\eta-\mu)P\frac{1}{\eta-\mu},\quad \left(P\frac{1}{\eta-\mu}\right)'_\mu=P\frac{1}{\eta-\mu}P\frac{1}{\eta-\mu}$$

$$\delta''_{\mu\mu}(\eta-\mu)=2\delta'_\mu(\eta-\mu)P\frac{1}{\eta-\mu},\quad \left(P\frac{1}{\eta-\mu}\right)''_{\mu\mu}=2P\frac{1}{\eta-\mu}\left(P\frac{1}{\eta-\mu}\right)'_\mu$$

$$\left(\mu P\frac{1}{\eta-\mu}\right)'_\mu=\eta P\frac{1}{\eta-\mu}P\frac{1}{\eta-\mu},\quad (\mu\delta(\eta-\mu))'_\mu=\eta\delta(\eta-\mu)P\frac{1}{\eta-\mu}$$

$$\left(P\frac{1}{\eta-\mu}\right)''_{\eta\eta}=2P\frac{1}{\eta-\mu}\left(P\frac{1}{\eta-\mu}\right)'_\mu,\quad \delta''_{\eta\eta}(\eta-\mu)=2P\frac{1}{\eta-\mu}\delta'_\eta(\eta-\mu)$$

$$\delta'_\eta(\eta-\mu)=-\delta'_\mu(\eta-\mu),\quad \left(P\frac{1}{\eta-\mu}\right)'_\eta=-\left(P\frac{1}{\eta-\mu}\right)'_\mu$$

$$\delta''_{\eta\eta}(\eta-\mu)=\delta''_{\mu\mu}(\eta-\mu),\quad \left(P\frac{1}{\eta-\mu}\right)''_{\eta\eta}=\left(P\frac{1}{\eta-\mu}\right)''_{\mu\mu}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sone Y.* Asymptotic theory of flow of rarefied gas over a smooth boundary. 1 // Rar. Gas Dynam. 1969. N.Y.: Acad. Press. V. 1. P. 243–253.
2. *Маясов Е.Г., Юшканов А.А., Яламов Ю.И.* О термофорезе нелетучей сферической частицы в разреженном газе при малых числах Кнудсена // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14. № 6. С. 498–502.
3. *Поддоскин А.Б., Юшканов А.А., Яламов Ю.И.* Теория термофореза умеренно крупных аэрозольных частиц // ЖТФ. 1982. Т. 52. № 11. С. 2253–2261.
4. *Ролдугин В.И.* К теории тепловой поляризации тел в потоке разреженного газа // Коллоид. журн. 1987. Т. 49. № 1. С. 45–53.
5. *Баканов С.П., Высоцкий В.В., Некрасов А.Н.* Тепловая поляризация тел в потоке газа и термофорез аэрозолей при малых числах Кнудсена // Коллоид. журн. 1986. Т. 48. № 5. С. 851–855.
6. *Holway L.H.* New statistical models in kinetic theory: method of constructions // Phys. Fluids. 1966. V. 9. № 9. P. 1658–1673.
7. *Cercignani C., Tironi G.* Some applications of a linearized kinetic model with correct prandtl number // Nuovo Cim. Ser. B. 1966. V. 43. № 1. P. 64–66.
8. *Черчиньяни К.* Математические методы в кинетической теории газов. М.: Мир, 1973. 245 с.
9. *Латышев А.В.* Аналитическое решение эллипсоидально-статистического модельного уравнения Больцмана // Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 2. С. 151–164.
10. *Чепмен С., Каулинг Т.* Математическая теория неоднородных газов. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 512 с.
11. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
12. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988. 512 с.
13. *Loyalka S.K.* The Q_n and F_n integrals for the BGK model // Transp Theory and Stat. Phys. 1975. V. 4. № 2. P. 55–65.
14. *Турчак Л.И.* Основы численных методов. М.: Наука, 1987. 318 с.
15. *Белоцерковский С.М., Лифанов И.К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука, 1985. 253 с.

Москва,
Архангельск

Поступила в редакцию
19.VI.1996