

УДК 533.6.011.8:532.525.2

© 1998 г. В.В. АРИСТОВ

ИЗУЧЕНИЕ УСТОЙЧИВЫХ И НЕУСТОЙЧИВЫХ СТРУЙНЫХ ТЕЧЕНИЙ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА

С помощью консервативной схемы расщепления прямого метода решения уравнения Больцмана изучаются свободные сверхзвуковые недорасширенные струи. Представлены численные решения для истечения струи в вакуум и в затопленное пространство в диапазоне параметров по числу Кнудсена $10^{-6} < Kn < \infty$ и степени нерасчетности $10 < n < \infty$. Проводится сравнение решений с экспериментальными данными. Для малых чисел Kn обнаружены неустойчивости, ассоциируемые с проявлением свободной турбулентности в слое смешения.

Решение кинетического уравнения для сверхзвуковых свободных струй сталкивается с трудностями, поскольку в таких течениях есть зоны, сильно различающиеся по плотности, сложные системы ударных волн и т.д. В [1, 2] изложены модифицированные схемы консервативного метода расщепления [3] и представлены результаты по описанию свободных струй, в частности трехмерных. В данной работе используется и развивается этот сквозной метод решения в широком диапазоне параметров задачи. Исследование продвинуто в сторону достаточно малых чисел Kn (вплоть до 10^{-6}): помимо устойчивых ламинарных отмечаются неустойчивые течения, что можно связать с проявлением свободной турбулентности.

1. Постановка задачи и численный метод решения. Задача о недорасширенной сверхзвуковой свободной струе (при истечении как в вакуум, так и в затопленное пространство) ставится в параллелепипеде: $0 < x < L_x$, $0 < y < L_y$, $0 < z < L_z$ (в расчетах $L_x = 6d - 8d$, $L_y, L_z = 2d - 3d$). Используется декартова система координат x, y, z , ось x направлена по оси струи. В плоскости $x = 0$ расположен экран с прямоугольным или круглым отверстием соответственно в трехмерной или осесимметричной задаче (d – диаметр круга или большая сторона прямоугольника), струя выходит из отверстия в направлении $x > 0$.

Уравнение Больцмана для простого однокомпонентного газа записывается в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{Kn} I \quad (1.1)$$

Здесь $f = f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ – функция распределения, t – время, $\mathbf{x} = (x, y, z)$ – вектор в физическом пространстве, $\boldsymbol{\xi} = (\xi_x, \xi_y, \xi_z)$ – вектор в пространстве скоростей, I – интеграл столкновений. Принята модель взаимодействия упругих сфер, $Kn = \lambda/d$ – число Кнудсена, где λ – длина свободного пробега в плоскости отверстия.

Использовалась трехмерная численная схема, при этом в осесимметричной задаче круглое отверстие приближалось элементами квадратной сетки. На границе счетной области задавались равновесные функции распределения для скоростей, направленных внутрь этой области. В плоскости $x = 0$ для y и z , соответствующих отверстию, задавалась максвелловская функция со средней скоростью на срезе отверстия. На остальной части границы задавалось условие $f = 0$ (истечение в вакуум) или максвелловская функция покоящегося газа (затопленная струя). На плоскостях $y = 0$ и $z = 0$

ставились условия симметрии. Таким образом, рассматривается только четверть возможного физического пространства. В более общей постановке эти условия симметрии снимаются и $-L_y < y < L_y, -L_z < z < L_z$.

Заметим, что в сечении отверстия фактически ставится условие испарения с площади отверстия, т.е. максвелловская функция задается только для вылетающих частиц. Ограниченность ресурсов вычислительной машины не позволила рассмотреть более строгую постановку задачи с учетом влияния внутренней части сопла и образующегося там пристеночного слоя, что дало бы возможность воспроизвести правильные значения функции распределения в сечении отверстия. При используемой модельной постановке распределения параметров в струе могут отличаться от реальных, особенно в радиальном направлении. Однако известно, что на линии симметрии струи указанные изменения сказываются не столь ощутимо, что позволяет здесь проводить и количественное сравнение с экспериментом.

При решении уравнения (1.1) используется процедура дискретных скоростей, интегралы столкновений вычисляются методом Монте-Карло (см. [4]). Применяются схемы расщепления, в которых при малых числах Kn главный член на этапе релаксации стремится к сеточной максвелловской функции. С учетом этапа разлета в пределе правильно аппроксимируются газодинамические уравнения. Используемая неявная схема позволяет проводить расчеты, в которых время вычислений увеличивается незначительно, хотя параметр Kn уменьшается на несколько порядков.

Расчеты проводились при следующих параметрах схемы: число узлов в пространстве скоростей $N_U = 500-1000$, число розыгрышей при вычислении интегралов столкновений $N_c = 22-100$, число пространственных узлов $(N_x, N_y, N_z) = (35, 12, 12) - (42, 16, 16)$, шаг по времени $\Delta t = 0,01-0,001$.

2. Обсуждение результатов. На основе указанных численных схем проведено изучение струйных течений в диапазоне параметров $10^{-6} < Kn < \infty, 10 < n < \infty$. Здесь $n = p_0/p_\infty$ – степень нерасчетности, p_0 – давление на срезе отверстия, p_∞ – давление в окружающей среде.

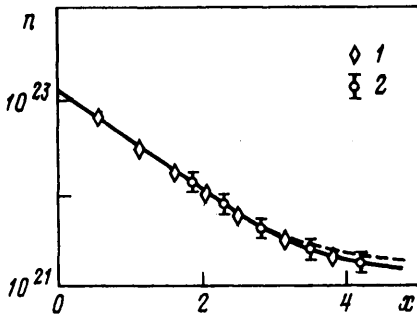
На фиг. 1 представлены результаты сравнения расчетов по уравнениям Больцмана с данными из [5] для осесимметричной струи, истекающей в вакуум. Число Маха на срезе отверстия $M = 1$, число Кнудсена по отверстию $Kn = 2,6 \cdot 10^{-3}$. Видно, что до расстояния $x = 3$ решение уравнения Больцмана совпадает с решением уравнений Эйлера, полученным по асимптотической кинетической схеме.

На фиг. 2 демонстрируется кинетический эффект в этой задаче: поперечной T_{yy} и продольной T_{xx} температур начинает различаться по мере удаления от отверстия и разрежения течения.

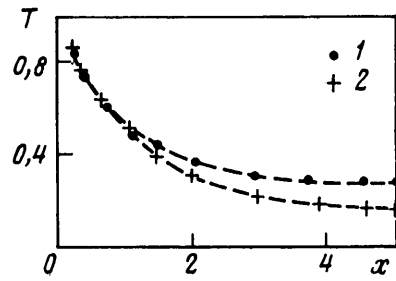
На фиг. 3 сравниваются профили температуры по y (в точке $x = 0,65$), полученные из решения уравнения Больцмана и уравнений Навье – Стокса [6] в осесимметричной струе при $M = 1, n = 10$. В уравнениях Навье – Стокса отношение теплоемкостей $\gamma = 1,4$. Число Рейнольдса $Re_0 = M/Kn$ (с точностью до множителя порядка единицы).

На фиг. 4,а изображены линии уровня плотности в задаче с параметрами эксперимента [7] в аргоне: $M = 1, n = 12,2, Kn = 9,09 \cdot 10^{-5}$. Видна конфигурация, связанная с диском Маха и висячим скачком.

При малых числах Kn в некоторых решениях выявлены неустойчивости, которые ассоциируются с проявлениями турбулентности. Впервые такие нестационарные хаотизированные решения отмечены в [1, 2]. В данной работе получены статистически стационарные движения (на достаточно большом временном интервале вычислений), характер флуктуаций которых качественными и некоторыми количественными чертами соответствует опытным данным из [8]. При исследовании неустойчивостей течения при уменьшении числа Kn основное предположение сводится к утверждению, что уравнение Больцмана является адекватной моделью для описания перехода к турбулентности в газе.



Фиг. 1

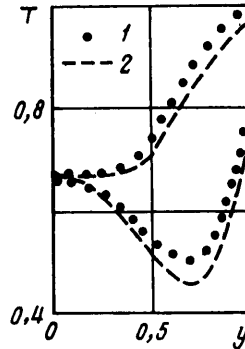


Фиг. 2

Фиг. 1. Распределение плотности на оси струи, истекающей в вакуум: 1 – решение консервативным методом расщепления, штриховая кривая – решение уравнений Эйлера, сплошная кривая – результаты расчетов методом статистического моделирования из [5], 2 – экспериментальные данные [5]

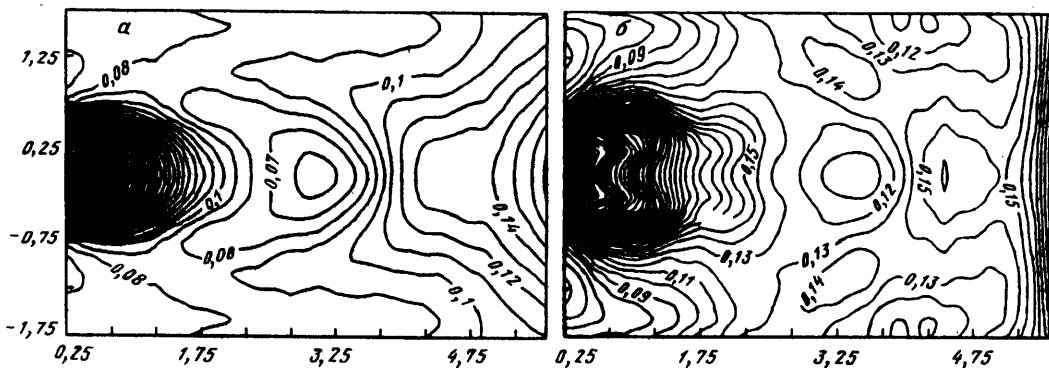
Фиг. 2. Распределение температур на оси струи, истекающей в вакуум: 1 – продольная температура, 2 – поперечная температура

Фиг. 3. Зависимость температуры от поперечной координаты (плоскость $x = 0,65$) в задаче об осесимметричной затопленной струе: 1 – решение уравнения Больцмана, 2 – решение уравнений Навье Стокса; а – $Re_0 = 20$ (верхние кривые), б – $Re_0 = 1000$ (нижние кривые)

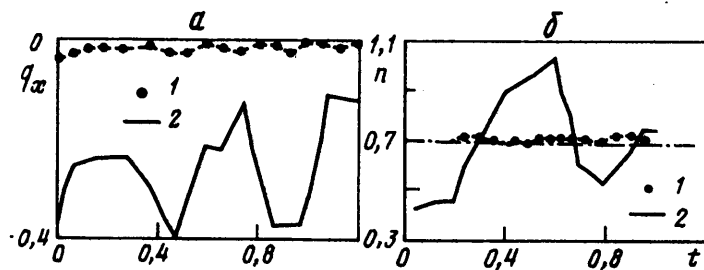


Может быть высказано и более сильное предположение (гипотеза) о том, что уравнение Больцмана в некоторых случаях принципиально необходимо при изучении турбулентности в газе. При уменьшении числа Кн, т.е. при увеличении числа Re (число M фиксировано), перенос импульса и энергии, согласно решению Чепмена – Энскога, уменьшается (если считать, что градиенты скорости и температуры ограничены), в то время как турбулентные вязкость и теплопроводность характеризуют резко увеличивающиеся переносные характеристики. Разрешение этого противоречия видится в отходе решения от разложения Чепмена – Энскога при некотором критическом числе Кнудсена. Безусловно, эта величина может быть очень малой и соответствовать развитой турбулентности, так что уравнения Навье – Стокса могут правильно описывать переход к турбулентности. Поэтому правильность разложения Чепмена – Энскога зависит от конкретной физической ситуации. В данной работе не исследовалась подробно эта гипотеза, а на основе численного решения уравнения Больцмана изучалась возможность обнаружения критического числа Кнудсена, при котором возникают неустойчивости. В расчетах эта критическая величина зависит от вычислительных ошибок (связанных с шагами сетки в пространстве скоростей, числом розыгрышей при вычислении интегралов столкновений и т.д.), которые, по-видимому, моделируют возмущения, вносимые в поток. Отметим, что неустойчивые решения получены при $N_c = 22$.

Изучение по Re_L проводилось в пределах от 3000 до 300000, где $Re_L = Re_0/(n)^{1/2}$.



Фиг. 4. Линии уровня плотности в задаче о трехмерной затопленной струе; а – устойчивое решение, б – неустойчивое решение



Фиг. 5. Флуктуации величин по времени в устойчивом (1) и неустойчивом (2) численных решениях; а – тепловой поток, б – плотность, штрихпунктир – среднее значение $\langle n \rangle$ плотности

Уровень флуктуаций при увеличении характерного числа Re_L (от критического значения) нарастает и, достигнув некоторой величины по плотности $\sim 20\%$, далее меняется мало. Причем зависимость уровня флуктуаций от Re_L обнаруживается в численном решении и при изменении n , а не только Kn .

На фиг. 4,б приведены линии уровня плотности, аналогичные изображенным на фиг. 4,а при $Kn = 10^{-5}$ и $Re_L = 3 \cdot 10^4$. Согласно эксперименту [8], при таком числе Re_L течение в слое смешения становится турбулентным. На фиг. 4,б видно появление структур, образующихся в слое смешения и имеющих пульсационный характер. При уменьшении числа Kn пульсации захватывают большую область.

На фиг. 5,а представлена зависимость от времени теплового потока в одной и той же точке $(x, y, z) = (2d, 0, 0)$ течения при двух режимах. Видно, что неравновесность функции распределения (характеризующаяся, в частности, величиной отклонения теплового потока от нулевого значения) существенно увеличивается (при $Kn = 10^{-5}$ флуктуации соответствуют счетной ошибке), что и связывается с увеличивающимся переносом в турбулентном течении.

На фиг. 5,б показана аналогичная зависимость в той же точке плотности от времени для $Kn = 10^{-6}$, причем среднеквадратичная величина амплитуды составляет 18%, что соответствует данным [8] (здесь же показаны флуктуации в устойчивом течении для $Kn = 10^{-5}$, величина отклонения от среднего значения, связанная с численной ошибкой, составляет 2%). В решении, которому соответствует фиг. 5,б, условие симметрии задачи было снято, при этом характер флуктуаций существенно не изменился.

Заключение. Консервативные неявные (по правой части уравнения) схемы расщепления для решения уравнения Больцмана позволяют изучать свободные струйные

течения и, несмотря на свойственные сквозному методу заглубления, выявлять эффекты, связанные и с разреженностью, и с переходом к режиму сплошной среды.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-00829).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аристов В.В.* Исследование некоторых течений газа на основе уравнения Больцмана. М.: ВЦ РАН, 1994. 22 с.
2. *Aristov V.V.* Numerical analysis of free jets at small Knudsen numbers // Proc. 19th Intern. Symp. on Rarefied Gas Dynamics. Oxford: Univ. Press, 1995. V. 2. P. 1293–1299.
3. *Аристов В.В., Черемисин Ф.Г.* Консервативный метод расщепления для решения уравнения Больцмана // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1980. Т. 20. № 1. С. 191–207.
4. *Аристов В.В., Черемисин Ф.Г.* Прямое численное решение кинетического уравнения Больцмана. М.: ВЦ РАН, 1992. 192 с.
5. *Weaver D.P., Muntz E.P., Campbell D.H.* Direct simulation Monte Carlo calculations compared with sonic orifice expansion flows of argon and N_2 // Proc. 18th Intern. Symp. on Rarefied Gas Dynamics: Progr. in Astronaut. and Aeronaut. Washington. 1994. V. 158. P. 98–108.
6. *Ковалев Б.Д., Мышенков В.И.* Разлет вязкой сверхзвуковой струи, истекающей в затопленное пространство // Уч. зап. ЦАГИ. 1978. Т. 9. № 2. С. 9–18.
7. *Kobayashi H., Nakagawa T., Nishida M.* Density measurements in freejets by laser interferometry // Proc. 14th Intern. Symp. on Rarefied Gas Dynamics. Tokyo: Univ. Press, 1984. V. 1. P. 501–508.
8. *Novopashin S.A., Perepelkin A.L., Yarygin V.N.* The use of pulse lasers for flow visualization and local density measurements in free jets // Proc. 15th Intern. Symp. on Rarefied Gas Dynamics. Stuttgart: Teubner, 1986. V. 2. P. 623–632.

Москва

Поступила в редакцию
10.VII.1996