

УДК 533.6.011:534.11

© 1998 г. А.А. АГАНИН, М.А. ИЛЬГАМОВ

## НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ГАЗА В ЗАКРЫТОЙ ТРУБЕ ПРИ НЕПЕРИОДИЧЕСКОМ ДВИЖЕНИИ ПОРШНЯ

Изучаются нелинейные колебания газа в закрытой трубе при непериодическом движении поршня в результате воздействия перепада внутреннего и внешнего давлений. Внешнее давление принимает два значения, сменяющие друг друга в момент изменения направления движения поршня. Рассматриваются две модели движения газа. Модель 1 образуется системой уравнений, выражающих законы сохранения массы, импульса и энтропии. Модель 2 отличается от модели 1 тем, что вместо закона сохранения энтропии в ней принимается закон сохранения полной энергии.

В последние десятилетия были выполнены экспериментальные и теоретические исследования нелинейных продольных колебаний газа, заключенного в трубу конечной длины. При этом один конец трубы закрыт или полностью или частично открыт. На другом конце находится возбудитель колебаний. Простейшие возбудители представляют собой плоский поршень, совершающий возвратно-поступательное движение вдоль трубы, периодический тепломассоподвод и т.д. Продольные и преимущественно продольные колебания столба газа изучались при разных частотах возбуждения. Особый интерес был проявлен к резонансным и околорезонансным колебаниям, когда они сопровождаются появлением разрывов параметров газа. обстоятельный обзор исследований содержится в работах [1, 2]. Одними из самых последних являются публикации [3–5].

Во всех известных работах в случае возбудителя в виде поршня задается закон его движения. Рассматриваются периодические режимы колебаний газового столба. Обычно одним из основных допущений является изэнтропичность движения газа. Характерно было стремление в экспериментах и в расчетах увеличивать амплитуду хождения поршня и соответственно колебаний газа. Этим было продиктовано, в частности, применение конусного переходника, начиная с [6].

В данной работе задается закон изменения внешнего давления  $p_e$  на поршень, закрывающий газовый столб. Вопрос о природе этого давления не обсуждается. С внутренней стороны на поршень действует давление  $p_i$  газового столба. Случай, когда  $p_e$  меняется в такт колебаниям поршня ("баскетбольный режим"), рассмотрен применительно к сжатию газового пузыря в [7]. Это позволяет достичь больших амплитуд колебаний поршня и газового столба, чем в случае задания движения поршня.

Предложенный в [7] способ непериодического резонансного возбуждения колебаний пузырька газа в жидкости позволяет получать температуры газа, многократно превышающие температуры, достигаемые при традиционных способах сжатия в гармоническом акустическом поле с заданной частотой. В настоящей работе численно изучается аналогичный механизм возбуждения для случая закрытой резонансной трубы.

**1. Постановка задачи.** Рассматриваются продольные колебания газа в трубе в области между закрытым концом и внутренней поверхностью движущегося плоского

поршня. Колебания поршня происходят в результате воздействия перепада давлений  $p_i - p_e$  и описываются уравнением

$$m_p \frac{dv_p}{dt} + \varepsilon^* v_p = p_i - p_e \quad (1.1)$$

при двух законах изменения внешнего давления

$$p_e = p_0 + p_e^*, \quad v_p \geq 0, \quad p_e = p_0 - p_e^*, \quad v_p < 0 \quad (1.2)$$

$$p_e = p_0 + p_e^* \cos \omega t \quad (1.3)$$

Здесь  $m_p$  – масса поршня, отнесенная к площади поперечного сечения канала трубы,  $\varepsilon^*$  – коэффициент трения,  $v_p$  – скорость движения поршня вдоль осевой координаты  $x$ ,  $t$  – время,  $p_e, p_i$  – внешнее и внутреннее давление на поршень,  $\omega, p_e^*$  – круговая частота и амплитуда колебаний внешнего давления. До момента времени  $t = 0$  газ с давлением  $p_0$ , плотностью  $\rho_0$  и температурой  $T_0$  покоится.

В соответствии с законом (1.2) неперiodические резонансные колебания газа в трубе возбуждаются путем чередования максимального и минимального уровней давления  $p_e$ . Изменение одного уровня на другой производится согласованно с изменением направления движения поршня: в момент максимального расширения газового столба, после которого он начинает движение в сторону закрытого конца трубы, давление  $p_e$  переводится на максимальный уровень. Этот уровень поддерживается до момента наибольшего сжатия газа в трубе, после чего газ начинает расширяться из-за достигнутого высокого давления  $p_i$  в газовом столбе. В этот момент уровень внешнего давления меняется на минимальный. Он поддерживается до следующего максимального расширения газового столба, после чего меняется на максимальный. В дальнейшем процесс повторяется. При определенных условиях в газе могут возникать ударные волны.

Колебания газа в трубе изучаются на основе двух моделей. Первая модель описывается системой уравнений

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(p + \rho v^2)}{\partial x} = 0 \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho S v)}{\partial x} = 0, \quad p = \rho^\gamma S, \quad S = \exp(s/c_v) \quad (1.5)$$

Здесь  $s$  – энтропия,  $c_v$  – удельная теплоемкость при постоянном объеме,  $\gamma = 1,4$ .

Вторая модель отличается от первой тем, что вместо уравнений (1.5) принимаются

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial[(p + E) v]}{\partial x} = 0, \quad p = (\gamma - 1)(E - \rho v^2 / 2) \quad (1.6)$$

Здесь  $E$  – полная энергия, отнесенная к единице объема.

Следует отметить, что речь идет об обобщенных решениях. При этом ударные волны в рамках системы (1.4), (1.5) трактуются упрощенно, без скачка энтропии. Поэтому по величине различия решений по первой и второй моделям можно судить о степени влияния ударных волн в газе на процесс колебаний системы. В случаях, когда разрывы отсутствуют, решения по обеим моделям совпадают.

Решение задачи (1.1), (1.3)–(1.5) (а также (1.1), (1.3), (1.4), (1.6)) для случая малых установившихся колебаний имеет вид

$$v_p = \frac{p_e^*}{\omega m_p} \left[ \left( \frac{m}{\alpha t g \alpha} - 1 \right)^2 + \varepsilon^2 \right]^{-1} \left[ \left( \frac{m}{\alpha t g \alpha} - 1 \right) \sin \omega t - \varepsilon \cos \omega t \right] \quad (1.7)$$

$$m = \frac{\rho_0 L}{m_p}, \quad \alpha = \frac{\omega L}{c_0}, \quad c_0 = \sqrt{\gamma p_0 / \rho_0}, \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon^*}{\omega m_p}$$

где  $L$  – длина газового столба в начальный момент времени.

В отсутствие трения ( $\varepsilon = 0$ ) резонансные частоты определяются из уравнения  $\alpha \operatorname{tg} \alpha = m$ .

При  $m < 1$  получаем первые два корня:  $\alpha \approx \sqrt{m - m^2/3}$ ,  $\alpha \approx \pi(1 + m/\pi^2)$ . В этом случае частоты низших собственных колебаний будут равны

$$\omega_1 = \frac{c_0}{L} \sqrt{m \left(1 - \frac{1}{3} m\right)}, \quad \omega_2 = \frac{\pi c_0}{L} \left(1 + \frac{m}{\pi^2}\right) \quad (m < 1) \quad (1.8)$$

Для системы с тяжелым поршнем ( $m \ll 1$ ) из (1.8) следует

$$\Omega \equiv \omega_1 = \frac{c_0}{L} \sqrt{m}, \quad \Omega^* \equiv \omega_2 = \pi \frac{c_0}{L}$$

При  $m > 1$  приближенное значение низшей частоты можно получить, принимая  $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\pi/2 - \alpha^*) \approx 1/\alpha^* - \alpha^*/3 + \dots$  Тогда

$$\omega_1 = \frac{\pi c_0}{2L} \left( \frac{m}{1+m} + \frac{\pi^2}{12(1+m)^3} \right) \quad (m > 1)$$

Низшая резонансная частота системы с легким поршнем ( $m \gg 1$ ) находится вблизи собственной частоты газового столба в трубе с одним закрытым и с другим открытым концами  $\omega_1 = \pi c_0/2L$ .

Если  $p_i$  определять из уравнения адиабаты  $p_i = p_0(L/l)^{\gamma}$ , где  $l$  – длина газового столба в произвольный момент времени, то вместо (1.7) имеем

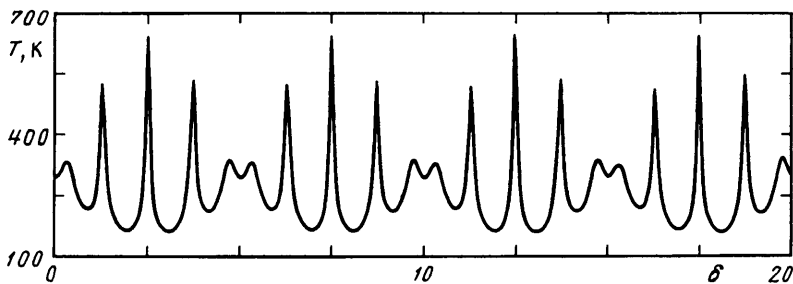
$$v_p = \frac{p_e^*}{\omega m_p} \left[ \left( \frac{m}{\alpha^2} - 1 \right)^2 + \varepsilon^2 \right]^{-1} \left[ \left( \frac{m}{\alpha^2} - 1 \right) \sin \omega t - \varepsilon \cos \omega t \right] \quad (1.9)$$

Таким образом, решения (1.7) и (1.9) совпадают, если в (1.7) принять  $\alpha \ll 1$ . Физически это означает, что за один период колебания поршня происходит многократное отражение волн в газе от закрытого конца трубы и от поршня. Резонансная частота при  $\varepsilon = 0$  из (1.9) равна  $\omega_1 = (c_0/L)\sqrt{m}$ , что совпадает со значением  $\Omega$  из (1.8) при  $m \ll 1$ . Она является единственной в отличие от спектра частот, определяемого уравнением  $\alpha \operatorname{tg} \alpha = m$ . Для малых колебаний системы с тяжелым поршнем ( $m \ll 1$ ) волновой характер решения можно не учитывать.

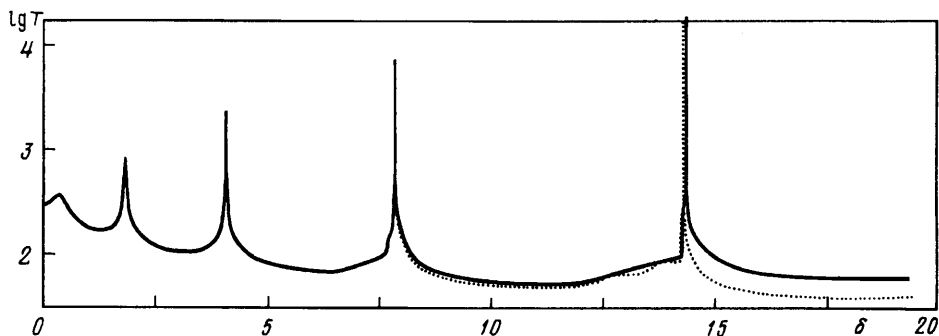
Решение нелинейной задачи находится численно. При этом системы (1.4), (1.5) и (1.4), (1.6) решаются с помощью методики [4], которая основана на TVD-методе второго порядка точности как по времени, так и по пространству.

**2. Случай поршня большой массы.** На фиг. 1, 2 приведены результаты расчета нелинейных колебаний системы поршень–газовый столб при  $\varepsilon = 0$  и  $m = m_1 = 4\pi^2 \cdot 10^{-4}$ , когда из (1.8) следует  $\Omega = 0,02 \Omega^*$ . Даны зависимости абсолютной температуры газа  $T$  возле внутренней поверхности поршня от безразмерного времени  $\delta = \Omega t/2\pi$ . Абсолютная температура рассчитывалась по формуле  $T = T_0(\rho_0 p/p_0)$  в предположении, что начальная температура  $T_0 = 293$  К. Представленный интервал времени соответствует первым 20 периодам колебаний при гармоническом возбуждении (1.3). Амплитуда возбуждения принята равной  $p_e^* = 0,5 p_0$ .

При гармоническом возбуждении (фиг. 1) решения по моделям 1 и 2 полностью совпадают, поскольку ударные волны в газе отсутствуют. Влияние простых волн на



Фиг. 1. Зависимость абсолютной температуры  $T$  газа в трубе возле поверхности тяжелого поршня от безразмерного времени  $\delta$  при гармоническом возбуждении

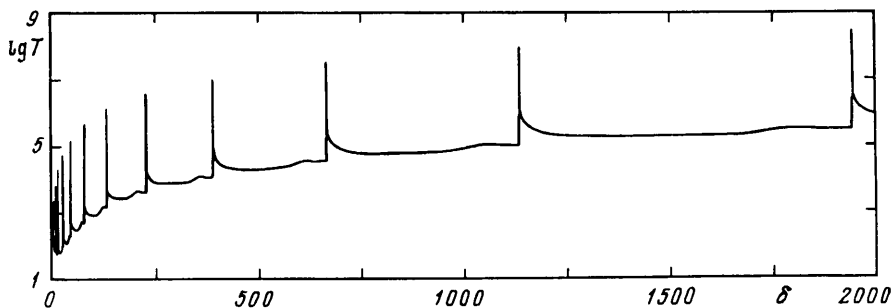


Фиг. 2. То же, что на фиг. 1, для неперидического возбуждения. Пунктирная кривая – модель 1, сплошная – модель 2

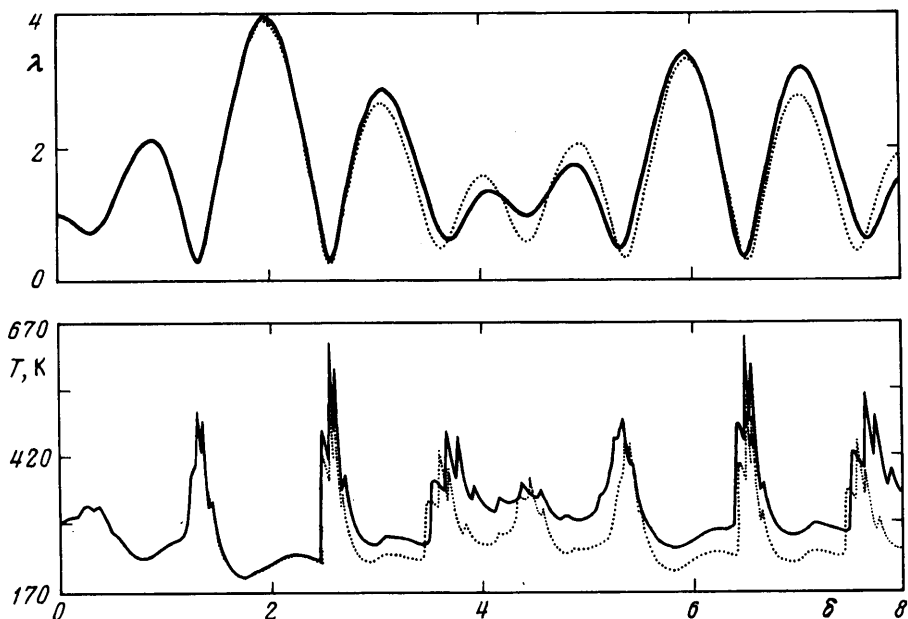
величину давления на поршень  $p_i$  также незначительно. Разрежение-сжатие газового столба близко к равномерному. При малых амплитудах возбуждения на частоте линейного резонанса в начале движения амплитуда колебаний системы от периода к периоду возрастает. В рассматриваемом случае быстрая расстройка резонансного режима связана с проявлением нелинейных эффектов в результате того, что амплитуда возбуждения является значительной. Характерен режим колебаний с биениями.

Синхронизация внешнего воздействия на поршень с направлением его движения в соответствии с (1.2) (неперидическое возбуждение), означающая непрерывную наработку системы механической энергией, принципиально меняет характер колебаний (фиг. 2): пиковые температуры, соответствующие максимальному сжатию газового столба, занимают по времени очень узкие промежутки, периоды колебаний сильно увеличиваются, а амплитуды последовательно и быстро нарастают. Уже на пятой фазе сжатия величина температуры  $T$  достигает значений, превышающих  $10^4$  K, что более чем в 25 раз превосходит величину максимальной температуры на фиг. 1. Влияние продольных волн в газе на величину давления на поршень  $p_i$  здесь несколько больше, чем при гармоническом возбуждении, но при  $\delta < 20$  все еще остается незначительным. Различие между решениями систем (1.4), (1.5) и (1.4), (1.6) (начиная с четвертого периода) означает, что в трубе появились ударные волны, влияние которых на течение в дальнейшем увеличивается.

С течением времени (фиг. 3) вместе с ростом пиковых значений температуры  $T$  происходит преобразование части механической энергии в тепловую. Газ нагревается: от колебания к колебанию в результате прохождения ударных волн среднее значение  $T$  монотонно возрастает. Это вызывает увеличение среднего значения длины газового столба  $\lambda = l/L$ . Продолжается сильный рост периодов колебаний. Порядок их изменения со временем грубо можно представить формулой  $(n - 1)^3/3$ , где  $n$  – номер коле-



Фиг. 3. То же, что и на фиг. 2, для большего интервала  $\delta$  в случае неперического возбуждения

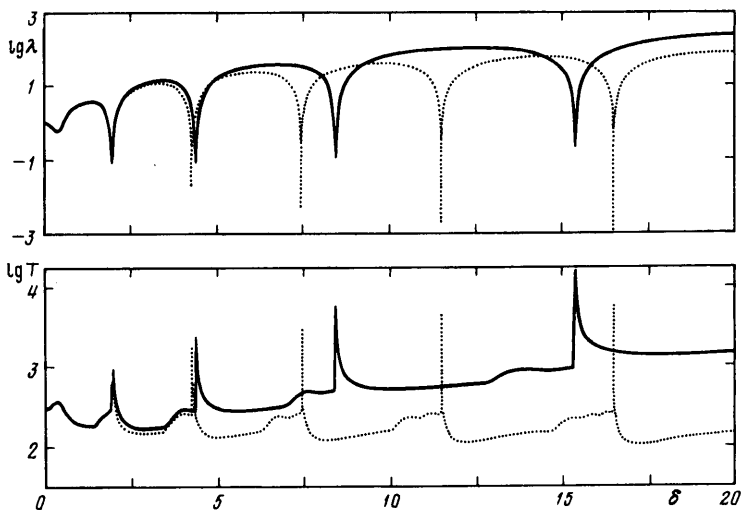


Фиг. 4. Зависимость безразмерной длины газового столба  $\lambda$  и абсолютной температуры  $T$  газа в трубе возле поршня от  $\delta$  для гармонического возбуждения. Масса поршня незначительно превышает массу газового столба. Пунктирные кривые – решение системы (1.4), (1.5), сплошные – решение системы (1.4), (1.6)

бания с начала процесса (за исключением  $n = 1$  и  $2$ ). Например, в интервале  $1150 < \delta < 1950$  находится 13-й период с начала процесса шириной 800. По указанной формуле получается оценка 576.

Справедливое на начальном отрезке времени предположение о равномерном разрежении-сжатии газового столба приводит в дальнейшем (подобно тому, как это имеет место в [7] при анализе "баскетбольного" режима колебаний для пузырька газа) к качественно иному характеру изменения температуры во времени: ее нарастающие пиковые значения каждый период колебаний сопровождаются длительным интервалом низких и все более снижающихся температур.

**3. Случай массы поршня, незначительно превышающей массу столба газа.** На фиг. 4, 5 представлены результаты расчета колебаний системы поршень-газовый столб при отношении масс столба газа и поршня  $m = m_2 = 4\pi^2 \cdot 10^{-2}$ , что на два порядка больше, чем в предыдущем случае (фиг. 1–3). При этом резонансные частоты  $\Omega$  и  $\Omega^*$  на порядок ближе:  $\Omega = 0,2\Omega^*$ . Здесь также принято  $\epsilon = 0$ .



Фиг. 5. Зависимость функций  $\lg \lambda$  и  $\lg T$  от безразмерного времени  $\delta$ . Масса поршня незначительно превышает массу газового столба. Возбуждение неперiodическое. Пунктирные кривые – модель 1, сплошные – модель 2

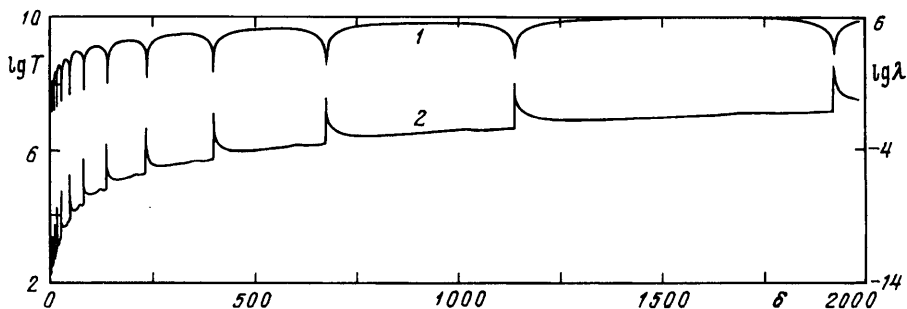
При гармоническом возбуждении (1.3) (фиг. 4) вклад простых волн становится заметным уже в первом периоде. Через небольшой промежуток времени возникают ударные волны. Их влияние начинает проявляться в третьем периоде. Наличие волн в трубе не способствуют выходу системы на резонанс. Амплитуда колебаний в рамках обеих моделей не увеличивается. При этом в результате прохождения ударных волн средний уровень температуры в рамках модели (1.6) возрастает. Колебания происходят с биениями.

Значительно больший рост средней (а также минимальной) температуры для модели 2 наблюдается при неперiodическом резонансном возбуждении (1.2) (фиг. 5). После пятого пикового значения вся ее температурная кривая находится в области  $T > 10^3$  К. Однако рост средней температуры не меняет резонансного характера колебаний: максимальные значения пиковых температур продолжают последовательно возрастать. Вместе с тем они здесь ниже, чем в предыдущем случае более тяжелого поршня (фиг. 1). Меньше и амплитуда колебаний. Это означает, что количество механической энергии, преобразуемой в тепловую, в данном случае больше.

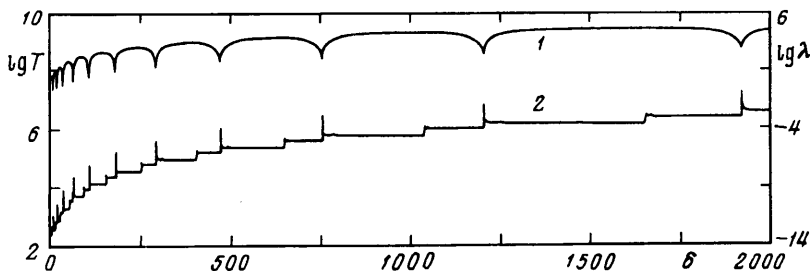
Различие механизмов потерь механической энергии на ударных волнах в моделях с сохранением энтропии (модель 1) и полной энергии (модель 2) проявляется не только в достижении разных уровней средней температуры газового столба, которая при использовании (1.5) не изменяется, оставаясь равной  $T_0$ . В отличие от модели 2 температура газа при разрежении и длина газового столба при сжатии в рамках модели 1 последовательно уменьшаются. Несмотря на большую степень объемного сжатия, пиковые температуры при применении (1.5) получаются ниже. Скорость увеличения интервалов между всплесками у модели 1 меньше.

На фиг. 6 приведено дальнейшее развитие хода колебательного процесса в рамках модели 2. Как видно, отмеченные выше особенности, характерные для начальной стадии, приведенной на фиг. 5, сохраняются и в дальнейшем при  $\delta > 200$ .

**4. Случай массы столба газа, превышающей массу поршня.** На фиг. 7 представлены зависимости, аналогичные приведенным на фиг. 6, но для  $m = m_3 = 4\pi^2$ , что соответствует  $\Omega = 2\Omega^*$ . Использовалась модель 2 ( $\epsilon = 0$ ). В отличие от предыдущих случаев здесь масса поршня меньше, чем масса газового столба. Это не вызвало изменения некоторых закономерностей, общих для двух предыдущих случаев при поршне с  $m_1$  и



Фиг. 6. То же, что и на фиг. 5, для большего интервала безразмерного времени  $\delta$  для модели 2. Кривая 1 – функция  $\lg \lambda$ , кривая 2 – функция  $\lg T$



Фиг. 7. То же, что и на фиг. 6, для поршня, масса которого меньше массы газового столба

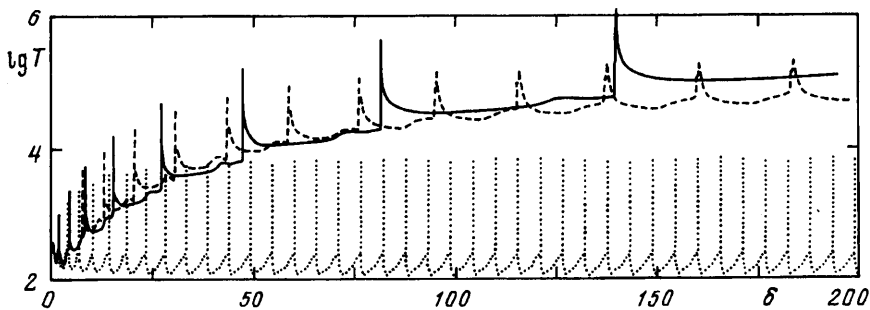
$m_2$ . Здесь, как и ранее, минимальные и пиковые значения температуры последовательно нарастают, интервалы между всплесками увеличиваются, газовый столб в фазе максимального сжатия вследствие нагрева удлиняется.

Вместе с тем дальнейшее уменьшение массы поршня по отношению к массе газа в трубе вызвало ряд изменений в решении. При этом, с одной стороны, сохранились тенденции, наблюдаемые при переходе от тяжелого поршня с  $m_1$  (фиг. 3) к более легкому с  $m_2$  (фиг. 6), а именно в ходе одного периода колебаний еще более уменьшился диапазон изменения длины газового столба  $\lambda$ . Уменьшился также и размах колебаний температуры  $T$ .

С другой стороны, появились новые особенности. В частности, в сравнении с фиг. 6 заметно уменьшились как минимальные, так и максимальные значения температуры. Меньше стала и длина газового столба в фазе его максимального расширения. Кроме того, в дополнение к наблюдаемому раньше быстрому росту температуры на фазе сильного сжатия возникает еще одно резкое ее увеличение при переходе от фазы расширения к фазе сжатия. Причем величина этого скачка на графике лишь в  $\sim 2,5$  раза меньше, чем амплитуда всплеска на фазе сильного сжатия.

**5. Влияние трения.** Во всех рассмотренных выше случаях (фиг. 2, 3, 5–7) применение "баскетбольного" метода возбуждения приводит в рамках модели 2 к сильному росту пиковых температур на фазе сжатия газа и к неограниченному увеличению расстояния на оси абсцисс между пиковыми значениями. Аналогичная ситуация имеет место и в [7] при рассмотрении периодического возбуждения колебаний газового пузырька по модели равномерного разрежения-сжатия газа, где выход на периодически повторяющийся режим также не наблюдается. Очевидной причиной этого является то, что во всех указанных случаях в моделях не были включены механизмы отбора энергии из колебательной системы.

Результаты расчетов по моделям 1 и 2 с учетом потерь энергии в рассматриваемой системе посредством трения поршня о стенки трубы приведены на фиг. 8. В расчетах 140



Фиг. 8. Зависимость функции  $\lg T$  от безразмерного времени  $\delta$  для непериодического возбуждения. Масса поршня незначительно превышает массу газового столба. Сплошная кривая – модель 2 при  $\epsilon = 0$ , штриховая – модель 2 при  $\epsilon = 0,01$ , пунктирная – модель 1 при  $\epsilon = 0,01$

принималось  $m_1 = m_2 = 4\pi^2 \cdot 10^{-2}$  (т.е.  $\Omega = 0,2\Omega^*$ ),  $\epsilon = 0,01$ . Здесь же для сравнения даны результаты расчетов, полученные по модели 2 без учета трения.

На начальном этапе, когда скорость движения поршня еще сравнительно невелика, затраты энергии системой на преодоление силы трения незначительны. Амплитуда и период колебаний быстро нарастают. Возникают ударные волны. С ростом амплитуды колебаний сила трения увеличивается. Нарастание амплитуды и периодов колебаний замедляется. В рамках модели 1 потери энергии на трение и на фронте разрывов выводят систему на периодический режим. В рамках модели 2 этого не происходит. Преобразование механической энергии в тепловую на ударных волнах приводит к непрерывному росту значений средней температуры и длины газового столба. В результате этого амплитуда и период колебаний, хотя и медленно, продолжают увеличиваться. Результаты расчетов при других значениях параметров  $m$  и  $\epsilon > 0$  показывают, что выход рассматриваемой системы на периодический режим при законе возбуждения (1.2) в рамках модели с (1.6) также достигается, если в трубе отсутствуют ударные волны.

**Заключение.** При изменении внешнего давления на поршень, ограничивающий газовый столб в закрытой трубе, согласованно (по закону (1.2)) с непрерывным движением поршня (непериодическое возбуждение) колебания газа в трубе приобретают ряд особенностей, существенно отличных от тех, что имеют место при изменении внешнего давления по гармоническому закону.

В случаях, когда трение поршня о стенки трубы не учитывается, периоды колебаний и максимальные значения пиковых температур быстро и неограниченно нарастают. При этом минимальные значения температуры на фазе разрежения и длины газового столба на фазе сжатия в модели с сохранением энтропии от периода к периоду уменьшаются, а в модели с сохранением полной энергии из-за нагрева газа в трубе в результате преобразования части механической энергии в тепловую, наоборот, увеличиваются.

С уменьшением массы поршня по отношению к массе газового столба при фиксированных уровнях изменяющегося внешнего давления ударные волны в трубе возникают быстрее. Амплитуды колебаний температуры и длины газового столба, а также их максимальные значения, уменьшаются. Это означает, что с уменьшением массы поршня доля механической энергии, преобразующейся в тепловую, увеличивается.

Учет трения поршня о стенки трубы в рамках обеих моделей при отсутствии ударных волн в газовом столбе приводит к выходу системы на периодический режим. При наличии ударных волн режим периодических колебаний наступает лишь при модели с сохранением энтропии. В модели с сохранением полной энергии амплитуда и



период колебаний, а также минимальные значения температуры и длины газового столба продолжают медленно возрастать.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-00484).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галиев Ш.У., Галиев Т.Ш. Линейные и разрывные вынужденные колебания потока пузырьковой жидкости в деформируемом трубопроводе (обзор) // Проблемы прочности. 1994. № 9. С. 3–29.
2. Ilgamov M.A., Zaripov R.G., Galiullin R.G., Repin V.B. Nonlinear oscillations of a gas in a tube // Appl. Mech. Revs. 1996. V. 49. N 3. P. 137–154.
3. Егорушкин С.А., Трошко А.Н. Околорезонансные сильнолинейные колебания газа в трубе // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 4. С. 150–157.
4. Aganin A.A., Ilgamov M.A. Numerical simulation of gas oscillations and flows generated by wave resonators // Proc. Intern. Conf. Methods Aerophys. Res. Novosibirsk, 1994. Pt 1. P. 3–8.
5. Aganin A.A., Ilgamov M.A., Smirnova E.T. Development of longitudinal gas oscillations in a closed tube // J. Sound and Vibrat. 1996. V. 195. N 3. P. 359–374.
6. Zaripov R.G., Ilgamov M.A. Non-linear gas oscillations in a pipe // J. Sound and Vibrat. 1976. V. 46. N 2. P. 245–257.
7. Нигматулин Р.И., Шагапов В.Ш., Вахитова Н.К., Лэхи Р.Т. Метод сверхсильного сжатия газового пузырька в жидкости неперриодическим вибрационным воздействием давления умеренной амплитуды // Докл. РАН. 1995. Т. 341. № 1. С. 37–41.

Казань

Поступила в редакцию  
13.VIII.1996