

УДК 532.59:517.958

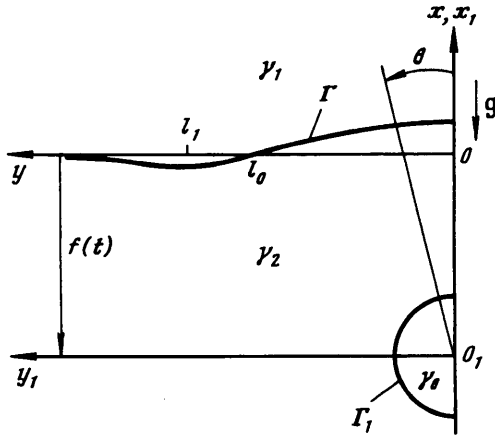
© 1998 г. О.А. ГИЛЬМАН, И.М. МИНДЛИН

## ВОЛНЫ В ТЯЖЕЛОЙ ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ, ВОЗБУЖДАЕМЫЕ КОЛЕБЛЮЩИМСЯ ШАРОМ

Построено пригодное на полуоси  $t > 0$  ( $t$  – время) приближенное решение начально-краевой задачи для системы интегродифференциальных уравнений, описывающих волны, возбуждаемые в первоначально покоящейся неограниченной тяжелой двухслойной жидкости вертикально колеблющимся шаром, удаленным от границы раздела на расстояние, значительно превосходящее его радиус. Предельным переходом при неограниченно растущем времени найдена форма установившейся волны. Исследуется зависимость волнового сопротивления, испытываемого шаром во время переходного процесса и в установившемся режиме, от частоты.

Рассматриваются волны в идеальной несжимаемой тяжелой двухслойной жидкости, возбуждаемые вертикально колеблющимся твердым телом. Основная проблема при решении такого рода задач – обеспечить выполнение граничных условий на поверхности тела и на эволюционирующих границах раздела. Предлагаемые в литературе аналитические методы обеспечения этих условий (в случае свободной поверхности) описаны в [1]. Эти методы применяются в случае относительно малых колебаний тела, что позволяет задачу линеаризовать и перенести граничные условия со свободной поверхности на неподвижную горизонтальную плоскость. В [1] линеаризованная задача сводится к интегральному уравнению с интегральными операторами высокой кратности (не менее четырех в осесимметричном случае). Решение этого интегрального уравнения описывает установившуюся волну. В [1] не имеется ни одного примера, когда это решение удается найти аналитически. Если амплитуда колебаний тела мала по сравнению с его размерами и тело находится достаточно далеко от границы раздела, то граничные условия переносятся с поверхности тела на неподвижную поверхность – среднее положение колеблющегося тела – и пренебрегается влиянием границы раздела на поле скоростей в окрестности тела [1, 2]; при этом получаются асимптотические формулы, описывающие форму свободной поверхности вдали от вертикальной оси колеблющегося тела, где поле скоростей мало отличается от поля, создаваемого точечным источником периодического дебита.

Применяемый ниже метод отличается от описанного тем, что сформулированные интегродифференциальные уравнения определяют поля скоростей, которые (поля) внутри каждого однородного слоя удовлетворяют уравнениям Эйлера для однородной жидкости. Уравнения (1.1)–(1.4) обеспечивают выполнение точных граничных условий на эволюционирующей границе раздела и на поверхности тела, не требуют малости амплитуды (по сравнению с размерами тела), не приводят к росту кратности интегральных операторов. Этими уравнениями описывается задача с начальными условиями и произвольным законом движения тела. Аналитические результаты получены для случая, когда расстояние от тела до границы раздела значительно превосходит размеры тела; это предположение не требует, чтобы амплитуда колебаний была мала по сравнению с размерами тела. В статье для границы раздела получены формулы, пригодные во всем пространстве на положительной полуоси  $t$ .



Фиг. 1. Системы отсчета и схема осесимметричного течения

**1. Волны, возбуждаемые вертикально движущимся осесимметричным телом: основные уравнения.** Рассматриваются осесимметричные (с осью симметрии  $x$ ) течения идеальной несжимаемой жидкости. Сила тяжести направлена вниз вдоль оси  $x$  (фиг. 1). Жидкая поверхность  $\Gamma$  разделяет две однородные жидкости ("верхнюю" и "нижнюю") плотностью  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  соответственно ( $\gamma_1 < \gamma_2$ ). Поверхностным натяжением и диффузией через границу  $\Gamma$ -пренебрегаем. Твердое тело, ограниченное поверхностью  $\Gamma_1$ , имеет вертикальную ось симметрии и может двигаться только поступательно вдоль вертикали. Жидкость занимает неограниченную область – внешность твердого тела.

Рассматриваются течения, при которых граница раздела жидкостей может быть поверхностью разрыва касательной к ней составляющей скорости – вихревой пеленой. Эта пелена формируется в силу различия плотностей жидких фракций.

В начальный момент поверхности  $\Gamma$  и  $\Gamma_1$  разнесены в пространстве, т.е. твердое тело полностью погружено в одну из двух однородных жидких фракций.

Пусть  $x, y$  – абсолютные (неподвижные) оси,  $x_1, y_1$  – подвижные оси, связанные с телом,  $t$  – время,  $f(t)$  – абсолютная координата подвижного полюса  $O_1$ ;  $r, \theta, \phi$  – сферические координаты с полюсом  $O_1$ ;  $\phi = \text{const}$  – уравнение меридиональной полуплоскости;  $u(t) = \dot{f}(t)$  – скорость тела;  $\mathbf{q}$  – абсолютная скорость жидкости,  $\zeta = \text{rot } \mathbf{q}$ .

Предполагается, что внутри каждой жидкости  $\zeta = 0$ . При этом циркуляция скорости вдоль замкнутого контура, пересекающего границу раздела между фракциями, отлична от нуля и, следовательно, потенциала скорости не существует. Но можно построить обобщенный потенциал  $\Phi$ , такой, что поле скоростей  $\mathbf{q}$  внутри каждой фракции будет определяться соотношением  $\mathbf{q} = \text{grad } \Phi$ . При переходе через границу раздела обобщенный потенциал  $\Phi$  (и, следовательно,  $\mathbf{q} = \text{grad } \Phi$ ) изменяется скачком. При этом уравнение (1.1) обеспечивает непрерывность нормальной к границе раздела составляющей скорости, а эволюционное уравнение (1.2) автоматически обеспечивает непрерывность давления в окрестности границы раздела.

Пусть границы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma$  описываются уравнениями  $r = r_*(\theta)$  и  $x = W(\theta, t)$  соответственно. Введем в меридиональной полуплоскости две системы криволинейных координат  $(\rho, \theta)$  и  $(\sigma, \theta)$  так, что

$$r = \rho r_*(\theta); \quad x = W(\theta, t) + \sigma, \quad \sigma = \rho r_*(\theta) \cos \theta + f(t) - W(\theta, t).$$

Границы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma$  описываются уравнениями  $\rho = 1$  и  $\sigma = 0$  ( $\rho < 1$  – внутренность твердого тела; в области  $\sigma < 0$  плотность жидкости равна  $\gamma_2$ ). Для любой функции  $F$  по-

ложим  $F(\rho, \theta, t) = F^*(\sigma, \theta, t)$ . Введем обозначения для односторонних пределов

$$F_+ = \lim_{\rho \rightarrow 1+0} F(\rho, \theta, t), \quad F_+^* = \lim_{\sigma \rightarrow +0} F^*(\sigma, \theta, t)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \rho_+} = \lim_{\rho \rightarrow 1+0} \frac{\partial F}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial F^*}{\partial \sigma_-} = \lim_{\sigma \rightarrow -0} \frac{\partial F^*}{\partial \sigma} \text{ и т.п.}$$

Следующие ниже уравнения записаны в безразмерных переменных. Размерные единицы плотности  $\gamma_0$ , длины  $R_0$  и времени  $T_0$  выбираются из условий  $\gamma_0 = \gamma_2$ ,  $4\pi R_0^3 = 3V$ ,  $gT_0^2 = R_0$ , где  $V$  – объем тела,  $g$  – ускорение свободного падения. Если тело – шар, то  $R_0$  – радиус шара,  $r_* = 1$ ,  $f(t)$  – вертикальная координата центра шара.

Обобщенный потенциал  $\Phi$  представляется суммой двух интегралов типа потенциала двойного слоя источников, распределенных на поверхностях  $\Gamma_1$  и  $\Gamma$  соответственно

$$\Phi(M) = \Phi_1(M) + \Phi_2(M) \quad (1.1)$$

$$\Phi_k(M) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Gamma_k} g_k(Q_k) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R_k} \right) dS \quad (k=1, 2; \Gamma_2 = \Gamma)$$

Здесь  $Q_1$  и  $Q_2$  – точки на  $\Gamma_1$  и  $\Gamma$  соответственно,  $M$  – точка, не принадлежащая поверхностям  $\Gamma_1$  и  $\Gamma$ ,  $R_1$  и  $R_2$  – расстояния  $|Q_1M|$  и  $|Q_2M|$  соответственно.

Давление непрерывно на  $\Gamma$ , если плотность  $g_2(\theta, t)$  распределения источников удовлетворяет уравнению [3]

$$\frac{\partial}{\partial t} g_2 + \left[ u(t)D_2 + \frac{1}{2}D_1^2 \left( \frac{\partial \Phi^*}{\partial \theta_+} + \frac{\partial \Phi^*}{\partial \theta_-} \right) - \frac{1}{2}D_3 \left( \frac{\partial \Phi^*}{\partial \sigma_+} + \frac{\partial \Phi^*}{\partial \sigma_-} \right) \right] \frac{\partial}{\partial \theta} g_2 + \quad (1.2)$$

$$+ \alpha \left[ \frac{\partial \Phi^*}{\partial t_-} + u(t)D_2 \frac{\partial \Phi^*}{\partial \theta_-} - \frac{1}{2}D_4 \left( \frac{\partial \Phi^*}{\partial \sigma_-} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( D_1 \frac{\partial \Phi^*}{\partial \theta_-} \right)^2 + W(\theta, t) \right] = 0$$

$$D_1 = \frac{\cos \theta}{W - f}, \quad D_2 = \sin \theta D_1, \quad D_3 = D_2 + \frac{\partial W}{\partial \theta} D_1^2, \quad D_4 = 1 + (D_2 + D_3) \frac{\partial W}{\partial \theta}, \quad \alpha = 1 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} < 0$$

Плотность  $g_1(\theta, t)$  определяется из условия равенства нормальных к поверхности тела составляющих скорости соприкасающихся точек тела и жидкости

$$(1 + c^2) \frac{\partial \Phi}{\partial \rho_+} - c \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_+} = u(t)r_*(\theta)(\cos \theta + c \sin \theta), \quad c = \frac{1}{r_*} \frac{\partial r_*}{\partial \theta} \quad (1.3)$$

Уравнение эволюции поверхности  $\Gamma$  следует из условия неразрывности жидкости и имеет вид

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -u(t)D_2 \frac{\partial W}{\partial \theta} + D_4 \frac{\partial \Phi^*}{\partial \sigma_+} - D_3 \frac{\partial \Phi^*}{\partial \theta_+} \quad (1.4)$$

Жидкость на бесконечности покоится, если функция  $g_1(\theta, t)$  ограничена, функции  $g_2(\theta, t)$  и  $W(\theta, t)$  таковы, что производная  $\partial \Phi^*/\partial \theta$  ограничена и  $\partial \Phi^*/\partial \sigma \rightarrow 0$  при  $\cos \theta \rightarrow 0$ . Оценки показывают, что эти производные удовлетворяют сформулированным требованиям, если, например

$$\lim_{\cos \theta \rightarrow 0} W = \lim_{\cos \theta \rightarrow 0} \frac{\partial W}{\partial \theta} = 0, \quad |g_2(\theta, t)| < a \cos^2 \theta$$

где  $a$  – некоторая положительная, не зависящая от  $\theta$  величина.

Если  $|W(\theta, t)| < a |\cos^3 \theta|$ , то объем жидкости, перемещаемой колеблющимся шаром через равновесную границу раздела  $x = 0$ , остается конечным [3].

Равенства (1.1)–(1.4) представляют собой систему интегродифференциальных уравнений относительно неизвестных функций  $g_1(\theta, t)$ ,  $g_2(\theta, t)$ ,  $W(\theta, t)$ ,  $u(t)$ . Систему нужно замкнуть уравнением, определяющим вертикальную скорость твердого тела  $u(t)$ . Уравнения сохраняют силу на интервале  $t > 0$ , пока каждый луч  $\theta = \text{const}$  пересекает границу не более чем в одной точке.

Давление  $P(\rho, \theta, t)$  и обобщенный потенциал  $\Phi(\rho, \theta, t)$  связаны соотношением

$$P(\rho, \theta, t) = P_* - \gamma \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{u(t)}{r_*} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} (\cos \theta + c \sin \theta) + u(t) \frac{\sin \theta}{\rho r_*} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{1}{2\rho^2} \left( \frac{1}{r_*} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{c}{\rho r_*^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1+c^2}{2r_*^2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right)^2 + f(t) + \rho r_* \cos \theta \right] \quad (1.5)$$

Здесь  $P_* = \text{const}$ ,  $\gamma = 1$  в области  $\sigma < 0$ ,  $\gamma = \gamma_1/\gamma_2$  в области  $\sigma > 0$ .

В случае естественно всплывающего (тонущего) тела замыкающим служит уравнение Ньютона

$$M_0 \frac{du}{dt} = -M_0 + G, \quad G = -2\pi \int_0^\pi P_* r_*^2(\theta) \sin \theta (\cos \theta + c \sin \theta) d\theta \quad (1.6)$$

где  $M_0$  – масса тела,  $\gamma_0$  – его средняя плотность,  $3M_0 = 4\pi\gamma_0$ ,  $G$  – равнодействующая сил давления на поверхность тела. В частности, для шара

$$r_* = 1, \quad G = G_a + R, \quad G_a = 4\pi\gamma = M \quad (1.7)$$

$$R = 2\pi\gamma \int_0^\pi \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial t_+} + u(t) \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_+} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_+} \right)^2 \right] \sin \theta \cos \theta d\theta$$

где  $\gamma$  – плотность жидкости, прилегающей к шару,  $M$  – масса жидкости, вытесненной шаром. Слагаемое  $G_a$  представляет собой архимедову силу, действующую на покоящееся тело, погруженное в покоящуюся однородную жидкость плотности  $\gamma$ ; слагаемое  $R$  – динамическую силу, включающую волновое сопротивление, обусловленное существованием границы раздела. Результаты аналитического исследования поставленной задачи для естественно всплывающего шара содержатся в [4].

**2. Волны, возбуждаемые колеблющимся шаром.** Если волны возбуждаются (почти периодически) колеблющимся шаром, то его движение (и, следовательно, замыкающее уравнение) описывается равенством

$$f(t) = H + ah(t), \quad h(t) = \sum_j (\alpha_j \cos \Omega_j t + \beta_j \sin \Omega_j t) \quad (2.1)$$

$$\sum_j (\alpha_j^2 + \beta_j^2)^{1/2} < \infty, \quad \max h(t) = 1, \quad u(t) = au_*(t) = ah'(t)$$

Движение шара и жидкости начинается из состояния покоя, так что начальные условия имеют вид

$$t = 0: g_1 = 0, \quad g_2 = 0, \quad W = 0, \quad f'(0) = 0 \quad (2.2)$$

Рассмотрим случай  $|\epsilon| = |a/H| \ll 1$ , когда амплитуда колебаний шара мала по сравнению с расстоянием от шара до невозмущенной границы раздела  $x = 0$ . Решение задачи ищем в виде рядов по степеням параметра  $\epsilon$

$$g_i(\theta, t) = a[g_{i,0} + \epsilon g_{i,1} + \epsilon^2 g_{i,2} + \dots] \quad (i = 1, 2) \quad (2.3)$$

$$W(\theta, t) = a[W_0(\theta, t) + \varepsilon W_1(\theta, t) + \varepsilon^2 W_2(\theta, t) + \dots]$$

$$\Phi(\rho, \theta, t) = a[\Phi_{(0)}(\rho, \theta, t) + \varepsilon \Phi_{(1)}(\rho, \theta, t) + \varepsilon^2 \Phi_{(2)} \dots]$$

Подставив  $r_* = 1$  в уравнения (1.2)–(1.4), разложив с помощью (2.3) обе части каждого уравнения в ряды по степеням  $\varepsilon$ , приравняв коэффициенты при одинаковых степенях параметра, получим последовательность систем линейных интегродифференциальных уравнений относительно  $g_{p,k}(\theta, t)$  ( $p = 1, 2$ ),  $W_k(\theta, t)$ ,  $u_k(t)$ . Техника построения решений такого рода линейных систем в виде рядов со слагаемыми  $c_j(t)f_j(\theta)$  по собственным функциям соответствующих интегральных операторов описана в [5]. Коэффициенты  $c_j(t)$  являются решением задачи Коши для счетной системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

В частности, решения уравнений первых приближений представляются формулами

$$g_{1,0}(\theta, t) = a_0(t) - \frac{3}{2} u_*(t) \cos \theta - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2k+1}{(-H)^k} a_k(t) P_k(\cos \theta)$$

$$g_{2,0}(\theta, t) = 4 \cos^3 \theta \sum_{k=0}^{+\infty} v_k(t) (2k+1) P_k(\cos 2\theta) \quad (2.4)$$

$$W_0(\theta, t) = \cos^3 \theta \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(t) (2k+1) P_k(\cos 2\theta)$$

$$k \geq 1: a_k(t) = \sum_{j=0}^{k+1} v_j(t) \frac{1}{2^{k+1}} \frac{(k+1)!}{j!(k+1-j)!} \quad (2.5)$$

$$n \geq 0: m_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a_k(t)}{H^{2k+1}} \frac{1}{2^{k-1}} \frac{(k-1)!}{n!(k-1-n)!}$$

$$b_n(t) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{a_k(t)}{H^{2k+2}} \frac{k}{2^k} \frac{k!}{n!(k-n)!}$$

Здесь и ниже  $P_k(x)$ ,  $P_0(x) = 1$ ,  $P_1(x) = x$  – полиномы Лежандра [6]. Функции  $v_k(t)$ ,  $c_k(t)$  являются решением задачи Коши для счетной системы дифференциальных уравнений

$$v'_0(t) = \frac{1}{2} \varepsilon_* \left[ c_0(t) + m'_0(t) - \frac{1}{2} \frac{1}{H^2} u'_*(t) \right]$$

$$n \geq 1: v'_n(t) = \frac{1}{2} \varepsilon_* [c_n(t) + m'_n(t)] \quad (2.6)$$

$$c'_0(t) = -\frac{1}{|H|} [v_0 + v_1] + b_0(t) - \frac{1}{4} \frac{1}{H^3} u_*(t)$$

$$c'_1(t) = -\frac{1}{|H|} [v_0 + 3v_1 + 2v_2] + b_1(t) - \frac{1}{4} \frac{1}{H^3} u_*(t)$$

$$n \geq 2: c'_n(t) = -\frac{1}{|H|} [nv_{n-1} + (2n+1)v_n + (n+1)v_{n+1}] + b_n(t)$$

$$c_n(0) = 0, \quad v_n(0) = 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots), \quad \varepsilon_* = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1}$$

Предлагаются два способа приближенного решения задачи Коши. Первый способ – решение "усеченной" системы. Положим  $c_{N+j}(t) \equiv 0$ ,  $v_{N+j}(t) \equiv 0$  ( $j = 1, 2, \dots; N$  – произвольно выбираемое натуральное число). Полученная "усеченная" система уравнений невырожденным линейным преобразованием приводится к  $(N+1)$  взаимно несвя-

занным системам, состоящим из двух уравнений первого порядка каждая. Решение задачи Коши для каждой из этих систем второго порядка строится легко, после чего осуществляется обратное преобразование к функциям  $v_k(t)$ ,  $c_k(t)$ . Элементы матрицы упомянутого линейного преобразования описываются с помощью полиномов Лагерра.

Пусть  $L_k(u)$  – полином Лагерра степени  $k$ ,  $L_0 = 1$ ,  $L_1(u) = 1 - u$ ;  $0 < u_1 < u_2 < u_3 < \dots < u_{N+1}$  – нули полинома  $L_{N+1}(u)$ . Формулы, задающие прямое и обратное преобразование в зависимости от  $u_k$ , могут быть явно построены в виде рядов, сходящихся быстрее геометрической прогрессии со знаменателем  $1/H^2$ , т.е. найдены с любой степенью точности. Описанная процедура решения усеченной системы приводит к следующим формулам:

$$c_{k-1}(t) = \frac{1}{4H^3} \left(1 - \varepsilon_* \frac{H}{|H|}\right) \sum_{j=1}^{N+1} G_{kj} g_j \Phi_j(t)$$

$$v_{k-1}(t) = -\frac{1}{4} \varepsilon_* \frac{1}{H^2} \left(1 + \frac{1}{8} \frac{\varepsilon_*}{H^3} + o\left(\frac{1}{H^4}\right)\right) \delta_{k,1} u_*(t) + \varepsilon_* \frac{1}{8H^3} \left(1 - \varepsilon_* \frac{H}{|H|}\right) \sum_{j=1}^{N+1} Q_{kj} g_j F_j(t) \quad (2.7)$$

$$\Phi_j(t) = \sum_p \frac{\Omega_p^2}{\omega_j^2 - \Omega_p^2} \left[ \alpha_p (\cos \Omega_p t - \cos \omega_j t) + \beta_p \left( \sin \Omega_p t - \frac{\Omega_p}{\omega_j} \sin \omega_j t \right) \right]$$

$$F_j(t) = \int_0^t \Phi_j(s) ds, \quad Q_{kj} = G_{kj} + \frac{\varepsilon_*}{8H^3} (G_{1j} + 2G_{2j} + G_{3j}) \delta_{k,1}$$

Здесь  $\delta_{k,j}$  – символ Кронекера. Постоянные в (2.7) определяются формулами

$$B_{kj} = (-1)^{k-1} L_{k-1}(u_j) e_j, \quad e_j > 0, \quad \sum_{k=1}^{N+1} B_{kj}^2 = 1, \quad (k \neq j), \quad \sum_{n=1}^{N+1} B_{nk} B_{nj} = 0$$

$$G_{kj} = B_{kj} + e \sum_{p=1}^{N+1} B_{kp} s_{pj} + e^2 \sum_{p=1}^{N+1} B_{kp} l_{pj} + o\left(\frac{1}{H^7}\right), \quad \omega_j^2 = \frac{\varepsilon_*}{2|H|} (u_j - e V_{jj})$$

$$V_{kj} = B_{1k} B_{1j} u_k u_j^2 \left[ 1 + \frac{\varepsilon_*}{8H^3} + \frac{1}{12H^2} u_k u_j^2 + \frac{1}{384H^4} u_k^2 u_j^3 \right]$$

$$e = \frac{1}{16|H|^3} \left(1 - \varepsilon_* \frac{H}{|H|}\right), \quad s_{kk} = 0, \quad l_{kk} = 0; \quad (k \neq j), \quad s_{kj} = \frac{V_{kj}}{u_k - u_j} \quad (2.8)$$

$$l_{kj} = \frac{1}{u_k - u_j} (V_{kj} V_{jj} - R_{kj}), \quad R_{kj} = \sum_{p=1}^{N+1} V_{kp} s_{pj}, \quad \sigma_{kj} = \sum_{p=1}^{N+1} s_{kp} s_{pj}$$

$$g_j = B_{1j} u_j \left(1 + \frac{1}{8H^3} + \frac{\varepsilon_*}{64H^6}\right) + \frac{1}{32H^2} B_{1j} u_j^2 + \frac{1}{256H^7} B_{1j} u_j^3 -$$

$$- \left(1 + \frac{1}{8H^3}\right) e \sum_{p=1}^{N+1} s_{jp} B_{1p} u_p - e^2 \sum_{p=1}^{N+1} l_{jp} B_{1p} u_p + e^2 \sum_{p=1}^{N+1} \sigma_{jp} B_{1p} u_p, \quad (k, j = 1, 2, \dots, N+1)$$

Операция "усечения" системы приводит к тому, что формулы (2.7)–(2.8) становятся пригодны на ограниченном интервале времени. С ростом  $N$  этот интервал увеличивается. Эти формулы использованы для построения профилей, иллюстрирующих эволюцию во времени границы раздела для  $h(t) = \cos \omega t$ ,  $\omega = 0,5$  и  $\omega = 2$ . Причины, по которым выбраны эти значения частоты, прояснятся после исследования вопроса о волновом сопротивлении, воздействующем на шар. На всем расчетном интервале времени графики при  $N = 20$  и  $30$  практически совпадают.

Второй способ позволяет построить приближенное решение, аппроксимируя счетную систему (2.6) счетной системой

$$\begin{aligned} v'_0(t) &= \frac{1}{2} \varepsilon_* \left[ c_0(t) - \frac{1}{2} \frac{1}{H^2} u'_*(t) \right], \quad n \geq 1: \quad v'_n(t) = \frac{1}{2} \varepsilon_* c_n(t) \\ c'_0(t) &= -\frac{1}{|H|} [v_0 + v_1] - \frac{1}{4} \frac{1}{H^3} u_*(t) \\ c'_0(t) &= -\frac{1}{|H|} [v_0 + 3v_1 + 2v_2] - \frac{1}{4} \frac{1}{H^3} u_*(t) \\ n \geq 2: \quad c'_n(t) &= -\frac{1}{|H|} [nv_{n-1} + (2n+1)v_n + (n+1)v_{n+1}] \\ c_n(0) &= 0, \quad v_n(0) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Система (2.9) мало отличается (по любым стандартным нормам) от системы (2.6), если  $|H| \gg 1$ , поскольку  $m_n(t)$  и  $b_n(t)$  – малые величины порядка не ниже  $1/H^{2n+2}$ .

Непосредственно проверяется (с учетом свойств полиномов Лагерра), что решение системы (2.9) с нулевыми начальными условиями представляется в виде

$$c_n(t) = (-1)^{n+1} \frac{1}{2H^3} \left( 1 - \varepsilon_* \frac{H}{|H|} \right) c_n^*(t) \quad (2.10)$$

$$v_n(t) = -\frac{1}{4} \varepsilon_* \frac{1}{H^2} \left[ \delta_{n,0} u_*(t) + (-1)^n \frac{1}{H} \left( 1 - \varepsilon_* \frac{H}{|H|} \right)' \int_0^t c_n^*(s) ds \right]$$

$$c_n^*(t) = \sum_j \lambda_j^2 [\alpha_j F_n(\tau; \lambda_j) + \beta_j S_n(\tau; \lambda_j)], \quad \sigma = \left( \frac{\varepsilon_*}{2|H|} \right), \quad \tau = \sigma t, \quad \lambda_j \sigma = \Omega_j$$

$$F_n(\tau; \lambda) = \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} L_n(x^2) \frac{\cos(\lambda\tau) - \cos(x\tau)}{\lambda^2 - x^2} dx$$

$$S_n(\tau; \lambda) = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} L_n(x^2) \frac{x \sin(\lambda\tau) - \lambda \sin(x\tau)}{\lambda^2 - x^2} dx$$

Здесь  $L_n(u)$  – полином Лагерра степени  $n$ ,  $L_0(u) = 1$ ,  $L_1(u) = 1 - u$ . Формулы (2.10) дают решение задачи (2.6) с относительной погрешностью порядка  $1/H^4$ .

Нетрудно видеть, что

$$\frac{\partial F_n(\tau; \lambda)}{\partial \tau} + \lambda S_n = f_n(\tau), \quad \frac{\partial S_n(\tau; \lambda)}{\partial \tau} = \lambda F_n \quad (2.11)$$

$$f_n(\tau) = -\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} L_n(x^2) \sin(x\tau) dx = \frac{1}{2} \mu'_{n,0}(\tau)$$

$$F_n(0; \lambda) = 0, \quad S_n(0; \lambda) = 0$$

В [7] введены и изучены функции

$$\mu_{nk}(\tau) = 2 \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} L_n(x^2) L_k(x^2) \cos(x\tau) dx$$

В частности, установлено, что

$$\mu_{n+1,0}(\tau) - \mu_{n,0}(\tau) = -2 \frac{d}{d\tau} \left[ \frac{\mu_{n+1,0}(\tau)}{\tau} \right]$$

$$n \geq 1: \mu_{n0}(\tau) = o(\tau), \quad \mu_{n0}(\tau) = -\frac{2}{\tau^2} + o\left(\frac{1}{\tau^2}\right)$$

Из свойств полиномов Лагерра [6] следует, что

$$f_n(\tau) = -(n+1) \frac{\mu_{n+1,0}(\tau)}{\tau} + n \frac{\mu_{n0}(\tau)}{\tau}$$

Применив метод вариации произвольных постоянных и интегрируя по частям, получим решение задачи (2.11) в виде

$$F_n(\tau; \lambda) = H_n(\tau; \lambda) \cos(\lambda\tau) + G_n(\tau; \lambda) \sin(\lambda\tau) \quad (2.12)$$

$$S_n(\tau; \lambda) = -G_n(\tau; \lambda) \cos(\lambda\tau) + H_n(\tau; \lambda) \sin(\lambda\tau)$$

$$H_n(\tau; \lambda) = \int_0^\tau \frac{n\mu_{n0}(\tau_1) - (n+1)\mu_{n+1,0}(\tau_1)}{\tau_1} \cos(\lambda\tau_1) d\tau_1$$

$$G_n(\tau; \lambda) = \int_0^\tau \frac{n\mu_{n0}(\tau_1) - (n+1)\mu_{n+1,0}(\tau_1)}{\tau_1} \sin(\lambda\tau_1) d\tau_1$$

Из свойств функций  $\mu_{n,0}(\tau)$  следует, что существуют пределы

$$G_n(+\infty; \lambda) = -\frac{1}{2} \pi \lambda^2 L_n(\lambda^2) e^{-\lambda^2}, \quad H_n(+\infty; \lambda) = -\frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} V_n(u) h(u; \lambda) du$$

$$V_n = \frac{d}{du} \left[ \sqrt{u} \frac{d}{du} (2u^{3/2} e^{-u} L_n(u)) \right], \quad (2.13)$$

$$h(u; \lambda) = (\lambda + \sqrt{u}) \ln |\lambda + \sqrt{u}| + (\lambda - \sqrt{u}) \ln |\lambda - \sqrt{u}| - 2\lambda \ln \lambda$$

Из асимптотических свойств полиномов Лагерра следует, что с ростом  $n$  эти пределы убывают (по модулю) как  $1/n^{3/4}$ . Формальные ряды, получаемые из (2.4), если в (2.12) поставить  $H_n(+\infty; \lambda)$ ,  $G_n(+\infty; \lambda)$  вместо  $H_n(\tau; \lambda)$ ,  $G_n(\tau; \lambda)$ , описывают (формальный) установившийся (почти периодический) режим.

Общее решение однородной счетной системы дифференциальных уравнений, которая получается из (2.9) при  $u_*(t) = 0$ , дается формулами

$$c_k(t) = 2 \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} L_k(x^2) [\Phi(x^2) \cos(\tau x) - \frac{2\sigma}{\varepsilon_*} \Psi(x^2) \sin(\tau x)] dx \quad (2.14)$$

$$v_k(t) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} L_k(x^2) \left[ \frac{\varepsilon_*}{2\sigma} \Phi(x^2) \sin(\tau x) + \Psi(x^2) \cos(\tau x) \right] dx$$

$$\sigma = \left( \frac{\varepsilon_*}{2|H|} \right)^{1/2}, \quad \tau = \sigma t, \quad \Phi(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(0) L_k(u), \quad \Psi(u) = \sqrt{u} \sum_{k=0}^{+\infty} v_k(0) L_k(u)$$

Эти формулы (совместно с указанными выше) позволяют решить сформулированную задачу, когда вместо (2.2) задаются ненулевые начальные условия, удовлетворяющие требованиям, сформулированным в [3]. Свойства решений однородной системы изучаются в [7].

**3. Волновое сопротивление, испытываемое колеблющимся шаром.** Чтобы обеспечить движение шара с заданной скоростью  $u(t) = f'(t)$ , нужно приложить к нему силу  $X(t)$ , дополнительную по сравнению с силами, действующими на естественно всплывающее (или тонущее) тело, – силу тяги. Эта сила тяги должна удовлетворять ус-



$$X = -(M - M_0) - R + M_0 \frac{du}{dt}$$

Здесь все слагаемые правой части определены в (1.6), (1.7). Если  $\gamma_1 = \gamma_2$  (т.е. шар движется в однородной жидкости), то потенциал скорости равен

$$\Phi(\rho, \theta, t) = -\frac{1}{2\rho^2} u(t) \cos \theta, \quad R = -\frac{1}{2} M \frac{du}{dt}$$

$$X = -(M - M_0) + M_0 \frac{du}{dt} + \frac{1}{2} M \frac{du}{dt}$$

Если  $u = \text{const}$ , то  $X = -(M - M_0)$ , т.е. сила тяги компенсирует разность между двумя статистическими силами – весом и выталкивающей силой. Если шар движется с ускорением, то сила тяги компенсирует также инерцию шара (слагаемое  $M_0 du/dt$ ) и инерцию жидкости (слагаемое  $0,5 M du/dt$ ). Если  $\gamma_1 \neq \gamma_2$ , то сила тяги должна компенсировать также "волновое" сопротивление, обусловленное тем обстоятельством, что часть энергии движителя "отсасывается" волнами, возбуждаемыми телом, движущимся в неоднородной тяжелой жидкости. Если тело колеблется с периодом  $T = 2\pi/\omega$ , то на интервале в  $n$  периодов средняя мощность силы тяги равна

$$Q_n(\omega) = \frac{1}{nT} \int_0^{nT} X(t)u(t)dt$$

Анализ составляющих силы тяги показывает, что отличная от нуля средняя мощность  $Q_n(\omega)$  расходуется исключительно на преодоление волнового сопротивления. В установившемся режиме средняя мощность силы тяги  $Q(\omega) = \lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n(\omega)$  при  $n \rightarrow +\infty$ . Полученные выше результаты приводят к формулам для  $Q_n(\omega)$  и  $Q(\omega)$  в случае колеблющегося шара при условиях  $|H| \gg 1$  и, в согласии с (2.1),  $u(t) = au_*(t)$ . Периодичность колебаний означает, что в (2.1)  $\Omega_j = j\omega$ , так что

$$u_*(t) = \omega \sum_j [j(-\alpha_j \sin(j\omega t) + \beta_j \cos(j\omega t))]$$

Обобщенный потенциал скорости в области  $\sigma f > 0$  (т.е. внутри жидкости, прилегающей к шару) дается формулой

$$\Phi(\rho, \theta, t) = a[\Phi_{(0)}(\rho, \theta, t) + \varepsilon\Phi_{(1)}(\rho, \theta, t) + \dots]$$

$$\Phi_{(0)} = u_*(t)\rho \cos \theta - \sum_{n=0}^{+\infty} \left[ (n+1)\rho^n + \frac{n}{\rho^{n+1}} \right] \frac{a_n(t)}{(-H)^n} P_n(\cos \theta)$$

Применив формулу (1.7), получим

$$R = 2\pi\gamma_+ \left[ -\frac{1}{3} au'_*(t) + 2\frac{a}{H} a'_1(t) + 2\frac{a^2}{H^2} u_*(t)a_2(t) - \frac{a^2}{H} \sum_{k=1}^{+\infty} k(k+1)(k+2) \frac{1}{H^{2k}} a_k(t)a_{k+1}(t) \right]$$

где  $\gamma_+$  – плотность жидкости, соприкасающейся с шаром.

Из (2.5), (2.6) следует

$$a'_1(t) = \frac{1}{2} \varepsilon_*(c_0 + 2c_1 + c_2) \left( 1 + \frac{\varepsilon_*}{8H^3} \right) - \frac{1}{4} \varepsilon_* \frac{1}{H^2} u'_*(t) \left( 1 + \frac{\varepsilon_*}{8H^3} \right)$$

Опуская относительно малые члены, приходим к равенству

$$Q_n(\omega) = 2\pi\gamma_+ \frac{a^2}{H} \varepsilon_* \frac{1}{nT} \int_0^{nT} (c_0 + 2c_1 + c_2) u_*(t) dt$$

Пусть  $u_*(t) = -\omega \sin \omega t$ . Если воспользоваться формулами (2.7), то получим

$$Q_n(\omega) = -\gamma_+ \frac{a^2}{4H^4} \varepsilon_* \left( 1 - \varepsilon_* \frac{H}{|H|} \right) V_n(\omega) < 0 \quad (3.1)$$

$$V_n(\omega) = \frac{\omega}{n} \sum_{j=1}^{N+1} u_j \left[ B_{1j} u_j \frac{\omega^2}{\omega_j^2 - \omega^2} \sin \left( \pi \frac{\omega_j}{\omega} n \right) \right]^2$$

Если же воспользоваться формулами (2.10), найдем

$$Q_n(\omega) = -\pi \gamma_+ \frac{a^2}{4H^4} \varepsilon_* \left( 1 - \varepsilon_* \frac{H}{|H|} \right) \frac{\omega^3}{nT} I_n$$

$$I_n = - \int_0^{nT} \sin(\omega t) \left[ \int_0^{+\infty} u^3 e^{-u} L_n(u) \frac{\cos \omega t - \cos(\sigma \sqrt{u} t)}{\omega^2 - \sigma^2 u} du \right] dt$$

Отсюда после интегрирования по аргументу  $t$  следует

$$Q_n(\omega) = -\pi \gamma_+ \frac{a^2}{4H^4} \varepsilon_* \left( 1 - \varepsilon_* \frac{H}{|H|} \right) I_n(\omega) < 0$$

$$I_n(\omega) = \frac{\omega}{\pi n} \int_0^{+\infty} u^3 e^{-u} \left[ \frac{\omega^2}{\omega^2 - \sigma^2 u} \sin \left( \pi n \frac{\sigma}{\omega} \sqrt{u} \right) \right]^2 du$$

С другой стороны, согласно (2.10) и (2.12)

$$c_0 + 2c_1 + c_2 = - \frac{1}{2H^3} \left( 1 - \varepsilon_* \frac{H}{|H|} \right) \lambda^2 [\cos(\omega t)H(\tau; \lambda) + \sin(\omega t)G(\tau; \lambda)]$$

$$G(\tau; \lambda) = G_0(\tau; \lambda) - 2G_1(\tau; \lambda) + G_2(\tau; \lambda), \quad G(+\infty; \lambda) = -\frac{\pi}{4} \lambda^6 e^{-\lambda^2}, \quad \lambda = \frac{\omega}{\sigma}$$

и, следовательно

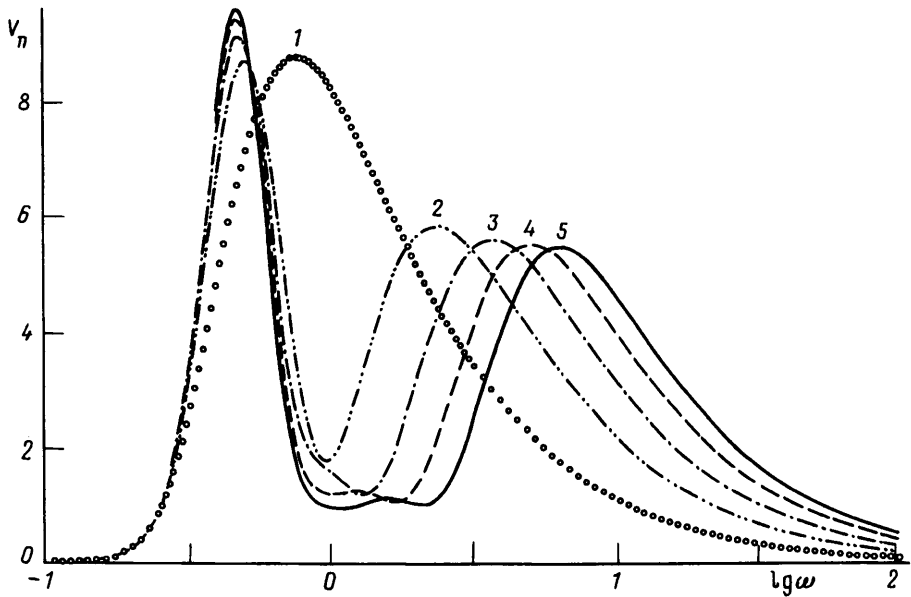
$$Q(\omega) = -a^2 \nu V(\lambda), \quad V(\lambda) = \frac{1}{2} \pi^2 \sigma \lambda^9 e^{-\lambda^2} \quad (3.2)$$

$$\nu = \gamma_+ \frac{1}{4H^4} \varepsilon_* \left( 1 - \varepsilon_* \frac{H}{|H|} \right), \quad \omega = \lambda \sigma$$

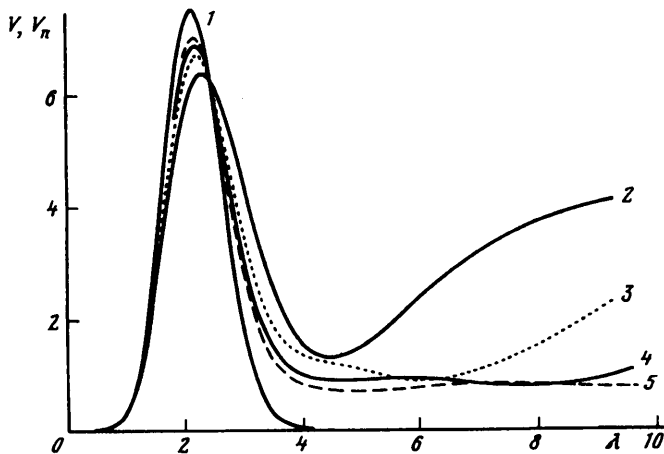
Отсюда следует, что если  $N$  велико, то с ростом  $n$  функция  $V_n(\lambda \sigma)$  должна мало отличаться от  $V(\lambda)$ .

Средняя мощность волнового сопротивления за первые  $n$  периодов и в установившемся режиме равна соответственно  $a^2 \nu V_n(\omega)$  и  $a^2 \nu V(\lambda)$ . На фиг. 2 представлены графики функций  $V_n(\omega)$  (формула (3.1)) для  $n = 1, 2, 3, 4, 5$  (значения  $n$  указаны около соответствующих кривых). С ростом  $n$  одновершинная кривая превращается в двухвершинную. Левая вершина с ростом  $n$  движется влево к некоторому предельному положению. Правая вершина движется вправо. Левые вершины группируются около точки  $\omega = 0,5$ ; правые вершины находятся в диапазоне частот  $\omega > 1$  (примерно).

На фиг. 3 представлены графики функций  $V_n(\sigma \lambda)$  ( $n = 2, 3, 4, 5$  — указаны около соответствующих кривых) и  $V(\lambda)$  (формула (3.2)) при  $\sigma = \sqrt{0,95/20} = 0,22$ . При указанном значении  $\sigma$  диапазону  $0 < \lambda < 10$  отвечает интервал частот  $0 < \omega < 2,2$  (примерно). Кривая  $V(\lambda)$  в диапазоне  $\lambda > 4$  с ростом  $\lambda$  быстро падает до нуля. Существует точка  $\lambda_0 \approx 2,6$  ( $\omega_0 = \lambda_0 \sigma$ ), в которой кривые  $V$  и  $V_n$  пересекаются (для  $n =$



Фиг. 2. Зависимость средней за время  $nT$  мощности  $Q_n(\omega) \sim V_n(\omega)$ , поглощаемой двухслойной жидкостью, от частоты колебаний шара  $\omega$  ( $n = 1-5$ ;  $\omega T = 2\pi$ )



Фиг. 3. Кривые зависимости поглощения  $V(\lambda)$  и  $V_n(\lambda)$  ( $n = 2-5$ ;  $\lambda\sigma = \omega$ ,  $2|H|\sigma^2 = \epsilon^*$ )

$= 2, 3, 4$  – практически в одной точке!). Видно, что левые вершины на кривых  $V_n$  с ростом  $n$  приближаются к  $V$ ; правые вершины на кривых  $V_n$  с ростом  $n$  уходят вправо.

Зафиксировав  $\omega$ , обнаружим, что в диапазоне  $\omega > \omega_0$  с ростом  $n$  сначала  $V_n$  растет, а потом падает (практически до нуля при  $\lambda > 4$ ). Это означает, что волновое сопротивление значительно во время переходного процесса и весьма мало в установившемся режиме; время переходного процесса относительно велико. В диапазоне частот  $\omega < \omega_0$  с ростом  $n$  мощность  $V_n$  растет до  $V$ , т.е. волновое сопротивление с течением времени растет и достигает максимума в установившемся режиме; время переходного процесса относительно мало.

Кривая  $V(\lambda)$  представляет зависимость энергии, передаваемой жидкости колеблющимся шаром за единицу времени (в среднем), от частоты колебаний  $\omega = \lambda\sigma$ . С определенной точки зрения в рассматриваемой задаче неограниченная жидкость эквивалентна линейному осциллятору с кривой поглощения [8]

$$F = v\lambda^9 e^{-\lambda^2}, \quad v = \gamma_+ \frac{\pi}{8} \frac{\epsilon_*}{H^4} \left( \frac{\epsilon_*}{2|H|} \right)^{1/2} \left( 1 - \epsilon_* \frac{H}{|H|} \right)$$

$$F(\omega) = 2\pi^2 \gamma_+ \left( 1 - \epsilon_* \frac{H}{|H|} \right) \frac{\omega^9}{\epsilon_*^3} \exp\left( -2 \frac{|H|}{\epsilon_*} \omega^2 \right)$$

Максимум поглощения достигается на резонансной частоте осциллятора. И хотя жидкость идеальна, эквивалентный осциллятор имеет конечную добротность, равную примерно 2 (судя по фиг. 3).

В пользу подобной аналогии с осциллятором с конечной добротностью говорят следующие результаты для волнового сопротивления в случае, когда шар колеблется по закону достаточно общего вида (без ограничения на частоты  $\Omega_j$  в (2.1)). Средняя мощность силы тяги за время  $t$  равна (с точностью до относительно малых членов)

$$Q_t = 2\pi\gamma_+ \frac{a^2}{4H^4} \epsilon_* \left( 1 - \epsilon_* \frac{H}{|H|} \right) \frac{1}{t} \int_0^t (c_0 + 2c_1 + c_2) u_*(t) dt$$

Используя формулы (2.1), (2.10), (2.12), получим

$$-Q = - \lim_{t \rightarrow +\infty} Q_t = -2\pi v \sigma \sum_j (\alpha_j^2 + \beta_j^2) a^2 \lambda_j^3 g(\lambda_j) = v \sum_j A_j^2 V(\lambda_j)$$

$$\lambda_j \sigma = \Omega_j, \quad A_j^2 = (\alpha_j^2 + \beta_j^2) a^2$$

Сопоставим с формулой (3.2) и обнаружим, что мощность, поглощаемая жидкостью, равна сумме поглощаемых "парциальных" мощностей, соответствующих точкам спектра "входного" возмущения  $ah(t)$ , причем функция  $vV(\lambda)$  выступает в роли квадрата амплитудно-частотной характеристики осциллятора.

В размерных величинах парциальная мощность, поглощаемая жидкостью, равна

$$F_*(\Omega) \cdot A^2 = 2\pi^2 \gamma \left( 1 - \epsilon_* \frac{H}{|H|} \right) \frac{A^2}{\epsilon_*^3} \left( \frac{\Omega^3 R_0^2}{g} \right)^3 \exp\left( -\frac{2l}{g\epsilon_*} \Omega^2 \right)$$

где  $R_0$  – радиус шара,  $A$  – амплитуда гармонической составляющей колебания шара,  $\Omega$  – частота (рад/с),  $l = |H| R_0 \gg R_0$  – расстояние от равновесной границы раздела  $x = 0$  до шара,  $g$  – ускорение свободного падения,  $\gamma$  – плотность прилегающей к шару жидкости. Если шар колеблется под свободной поверхностью, то

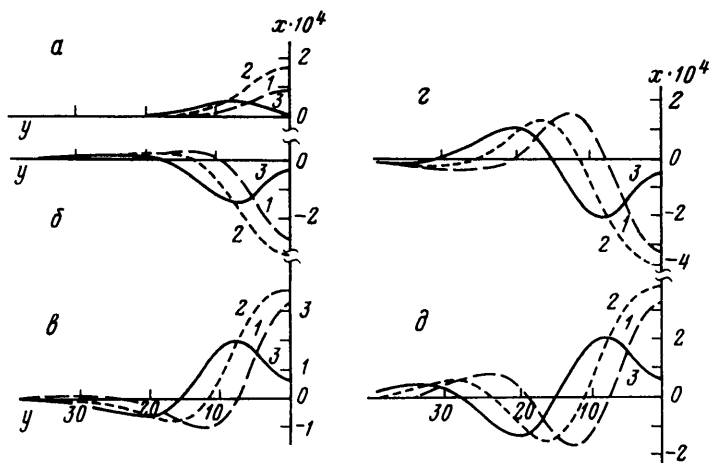
$$F_*(\Omega) \cdot A^2 = 4\pi^2 \gamma A^2 \left( \frac{\Omega^3 R_0^2}{g} \right)^3 \exp\left( -2 \frac{l}{g} \Omega^2 \right)$$

Множитель 4 отличает эту формулу от указанной в [1, с. 512].

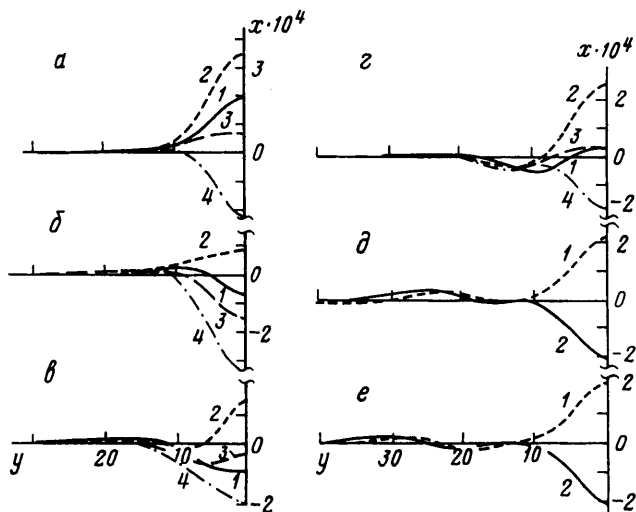
Фигуры 4 и 5 демонстрируют различия в эволюции границы раздела в случаях, когда  $h(t) = \cos \omega t$  и частота колебаний шара лежит в пределах полосы пропускания эквивалентного осциллятора ( $\omega = 0,5$ ) и вне пределов этой полосы ( $\omega = 2$ ). Границы описываются уравнениями

$$x = aW_0(\theta, t), \quad y = (x - H - a \cos \omega t) \operatorname{tg} \theta$$

Расчеты велись по формулам (2.4), (2.7), (2.8) для  $N = 30$ ,  $\epsilon_* = 0,95$ ,  $H = -10$ ,  $a = 1$  и, следовательно,  $\epsilon = -0,1$ ,  $\sigma \approx 0,22$ . Точке максимума  $\lambda_* \approx 2,1$  отвечает частота



Фиг. 4. Эволюция во времени границы раздела, возмущаемой гармонически колеблющимся шаром,  $\omega = 0,5$ ,  $\pi\tau = \omega t$ . Кривым 1-3 соответствуют: а -  $\tau = 1/3, 2/3, 1$ ; б -  $\tau = 4/3, 5/3, 2$ ; в -  $\tau = 7/3, 8/3, 3$ ; г -  $\tau = 10/3, 11/3, 4$ ; д -  $\tau = 13/3, 14/3, 5$ .



Фиг. 5. Эволюция во времени границы раздела, возмущаемой гармонически колеблющимся шаром,  $\omega = 2$ ,  $\pi\tau = \omega t$ . Кривым 1-4 соответствуют: а -  $\tau = 1/2, 1, 3/2, 2$ ; б -  $\tau = 5/2, 3, 7/2, 4$ ; в -  $\tau = 9/2, 5, 11/2, 6$ ; г -  $\tau = 13/2, 7, 15/2, 8$ ; д -  $\tau = 15, 16$ ; е -  $\tau = 17, 18$

$\omega_* = \sigma\lambda_* = 0,5$ . На этой частоте уже к концу второго периода мощность волнового сопротивления практически достигает мощности сопротивления при формальном установившемся режиме (фиг. 3). При частоте  $\omega = 0,5$  часть границы раздела (внутри круга  $y < 10$ ) уже после второго периода практически повторяет свою форму через период; вне этого круга наблюдается уходящая волна с большой (по сравнению с волной на фиг. 5) амплитудой. Этой волной и объясняется относительно большое волновое сопротивление, испытываемое шаром. Когда шар колеблется с частотой  $\omega = 2 (\lambda = 9 > 4)$ , часть границы раздела (внутри круга  $y < 10$ ) только после 8-го периода повторяет свою форму через период. Вне круга  $y < 10$  также наблюдается уходящая

волна, но относительно малой амплитуды, чем и объясняется относительно малое волновое сопротивление.

Полученные формулы сохраняют силу для  $\gamma_1 = 0$  ( $\epsilon_* = 1$ ); при этом граница раздела является свободной поверхностью.

**Заключение.** Формула (2.4) означает, что отклонение границы раздела от равновесной горизонтальной плоскости убывает как  $1/y^3$ . Согласно приведенной в [1, с. 508] асимптотической формуле, это отклонение убывает как  $1/\sqrt{y}$  ( $y$  – горизонтальная декартова координата, расстояние до вертикальной оси симметрии, проходящей через центр шара). Результаты разд. 3 свидетельствуют, что жидкость в любой момент времени обладает ограниченной кинетической энергией и, следовательно, квадрат скорости жидкости убывает быстрее, чем  $1/y^2$  ( $k > 2$ ). Согласно формуле (10) в [1, с. 510], квадрат скорости жидкости убывает как  $1/y$  и жидкость обладает неограниченной кинетической энергией. Отмеченные различия в асимптотическом поведении границы раздела и скорости жидкости объясняются тем, что в [1] для "выделения" установившегося режима используются "условия излучения" для поля скоростей, а в этой статье асимптотика на бесконечности диктуется требованием: объем жидкости, перемещаемой шаром через равновесную границу раздела, остается конечным (в [1] этот объем бесконечен). Различие в асимптотиках вновь поднимает вопрос о роли условий излучения. Уместно отметить, что в [1] неоднократно обсуждается роль условий излучения, отмечается, что возбуждаемое периодическим возмущением установившееся волновое движение следовало бы получить, осуществив предельный переход при  $t \rightarrow +\infty$  в решении задачи с начальными и граничными условиями.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 815 с.
2. Lamb H. On wave resistance // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1926. V. 111. № 757. P. 14–25.
3. Миндлин И.М. Нелинейные волны в тяжелой двухслойной жидкости, порождаемые начальным возмущением горизонтальной границы раздела // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 135–143.
4. Гильман О.А., Миндлин И.М. Нелинейные волны в тяжелой слоистой жидкости, возбуждаемые твердым телом, движущимся под углом к горизонту. Н. Новгород, Нижегород. техн. ун-т, 1995. 64 с. – Деп. в ВИНТИ 26.12.95. № 3476–В95.
5. Миндлин И.М. О вихрях в неограниченной идеальной жидкости. Горький, Горьк. политехн. ин-т, 1982. 38 с. – Деп. в ВИНТИ 24.06.82. № 3269–82.
6. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1976. 327 с.
7. Миндлин И.М. Нелинейные волны в тяжелой двухслойной жидкости, порождаемые протяженным начальным возмущением горизонтальной границы раздела: точное решение // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 6. С. 165–168.
8. Пейн Г. Физика колебаний и волн. М.: Мир, 1979. 389 с.

Нижний Новгород

Поступила в редакцию  
16.VII.1996