

УДК 532.528:536.2

© 1998 г. С.А. ОЧЕРЕТЯНЫЙ, В.В. ПРОКОФЬЕВ

### МНОГОСКОРОСТНЫЕ ЭФФЕКТЫ В РАЗРЕЖЕННЫХ ПУЗЫРЬКОВЫХ СРЕДАХ ПРИ ТЕЧЕНИИ С БОЛЬШИМИ ГРАДИЕНТАМИ ДАВЛЕНИЯ

Рассматриваются многоскоростные эффекты, связанные с поведением пузырьков пара или газа в области больших градиентов давления, характерных для течений около каверны с повышенным по отношению к окружающему пространству давлением. Для случая малой объемной концентрации пузырьковой среды рассмотрена задача о возмущении течения жидкости пузырьками. Показано, что для газовых пузырьков учет многоскоростных эффектов существенно уменьшает добавочный импульс струи. Обнаружено, что с течением времени распределение температуры в следе за паровым пузырем становится немонотонным, причем максимальная температура может даже превосходить начальную температуру пара в пузыре. Показано, что может происходить кумуляция пузырей и образование режима течения с резко выраженной двухфазной струей, достигающей внешней границы основной струи жидкости.

Ранее исследовалась задача инициации кавитации в струе холодной жидкости путем поддува пузырьков горячего пара в область повышенного давления (каверну) внутри сходящейся струи жидкости (в плоском случае имеются две симметричные сходящиеся струи) [1]. Изучалась динамика паровых пузырьков, переносимых течением вдоль оси симметрии со скоростью жидкости. В рамках такой постановки исследована область параметров течения и пара, в которой реализуется режим интенсивного роста пузырьков за счет быстрого падения внешнего для пузырька давления в жидкости. Для рассматриваемых условий (характерный перепад давления  $\Delta p \approx 2$  МПа, характерная длина  $\Delta = 2$  мм) для пузырей меньших  $10^{-3}$  мм скольжение несущественно. Для успешной работы рассматриваемой схемы требуется, чтобы характерное время конденсации пузыря радиуса  $a_0$  при постоянном давлении в системе  $\tau_T$  было бы много больше характерного времени эволюции этого пузыря за счет перепада давлений  $\tau_i$  (рэлеевское время) и характерного времени изменения давления при движении пузыря в струе  $\tau_j$

$$\tau_T = \left( \frac{\rho_v L a_0}{\Delta T \sqrt{\rho_l C_l \lambda_l}} \right)^2, \quad \tau_i = a_0 \sqrt{\frac{\rho_l}{\Delta p}}, \quad \tau_j = \Delta \sqrt{\frac{\rho_l}{2(p - p_a)}}$$

$$\Delta T = T_s(p_k) - T_0, \quad \Delta p = p_k - p_a$$

Здесь  $\rho_v, \rho_l$  – плотности пара и жидкости,  $L, C_l, \lambda_l$  – удельная теплота конденсации, удельная теплоемкость и коэффициент теплопроводности жидкости,  $T_s(p_k)$  – температура насыщения при давлении  $p_k$ ,  $T_0$  – температура жидкости,  $p_k, p_a, p$  – давление в каверне, во внешнем пространстве и напор струи,  $a_0$  – радиус пузыря,  $\Delta$  – ширина струи.

Если пузырь достаточно быстро проходит зону больших градиентов давления ( $\tau_i \geq \tau_j$ ), то при  $\tau_i \ll \tau_T$  будет происходить рост пузыря за счет начального перепада давления, а затем его коллапс вдали от места инициации. Именно такой режим будет

в дальнейшем рассматриваться. Например, для пузыря водяного пара радиусом  $a_0 = 0,5$  мм при давлении в камере  $p_k = 2$  МПа, внешнем давлении  $p_a = 0,1$  МПа и температуре воды  $T_0 = 300$  К отношение  $\tau_l/\tau_i \cong 100$ , но для таких пузырей существенны многоскоростные эффекты.

В настоящей работе нами учтены двухскоростные эффекты как в уравнениях для одиночных паровых пузырей, так и в общих уравнениях двухфазной среды. В уравнениях движения смеси учтены члены порядка  $\alpha|W|^2$  ( $\alpha$  – объемная концентрация,  $|W|$  – модуль относительной скорости пузыря). Для выписывания этих членов используется модель осредненного течения двухфазной смеси, описанная в [3, 5, 12]. Используя метод малых возмущений [7] (при малых  $\alpha$ ), в линейном приближении выписываются уравнения для возмущений поля скоростей течения жидкости. При этом достаточно иметь решение уравнений движения отдельных пузырьков в нулевом приближении. Траектории пузырей находились путем совместного решения уравнений динамики пузыря с нестационарным осесимметричным уравнением конвективной теплопроводности. Состояние пара внутри пузыря считается однородным и равновесным ( $T_v = T_s(p_v)$ , где  $T_s(p_v)$  – температура насыщения при давлении в пузыре  $p_v$ ).

При построении модели парового конденсирующегося пузыря со скольжением возникает трудность, связанная с тем, что движущийся сферический пузырь не коллапсирует до нулевого размера, а совершает пульсации [4]. Наличие такого механизма иллюстрируют экспериментальные данные о пульсационном коллапсе кавитационного пузыря на цилиндре с оживальной головной частью, приведенные в [6]. В настоящей работе предложены некоторые критерии разрушения пузыря, основанные на критическом числе Вебера, но учитывающие особенности процесса (считается, что пузырь в стадии роста не разрушается) и конечность времени разрушения.

1. Для движения разреженной смеси (когда расстояние между пузырями много больше размеров пузырей и много меньше характерного размера макротечения) уравнения сохранения массы и количества движения для средних характеристик смеси можно записать в виде (для стационарной двумерной задачи)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial n u_1}{\partial x} + \frac{\partial n v_1}{\partial y} &= 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} \right) \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $\rho = \rho_l(1 - \alpha)$  – плотность смеси в пренебрежении плотностью пара или газа в пузыре ( $\rho_l = \text{const}$  – плотность жидкости). Среднемассовая скорость смеси  $\mathbf{V}(u, v)$  в пренебрежении массой пузырей равна средней скорости жидкости. Объемная концентрация  $\alpha = (4/3)\pi n a^3$ , где  $n$  – числовая плотность пузырей,  $a$  – радиус пузырей (пузыри считаются сферическими и внутри элементарного объема одинакового радиуса). Для установившегося движения в предположении, что тензор напряжений  $\tau_{ij}$ , связанный со скольжением, есть тензорная функция относительно вектора  $\mathbf{W} = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}$  ( $\mathbf{V}_1(u_1, v_1)$  – средняя в элементарном объеме скорость пузырей), можно написать [3]

$$\tau_{ij} = -\frac{1}{2}\alpha \left( W_i W_j - \frac{1}{3} W^2 \delta_{ij} \right), \quad i, j = 1, 2$$

где  $W_1, W_2$  – компоненты относительной скорости. Для замыкания системы требуется выписать уравнение движения пузырьков в двухфазном потоке. Это будет сделано ниже в нулевом приближении по  $\alpha$ .

Рассмотрим случай малого возмущения пузырьками основного течения жидкости. Будем считать, что стационарное невозмущенное течение жидкости известно ( $V_0$  – после скоростей,  $p_0$  – давления невозмущенного течения жидкости). Пусть поле скоростей пузырьков задано в лагранжевой системе координат  $(l, t)$ , где  $l$  – координата начала траектории пузырька (на поверхности каверны),  $t$  – время. Невозмущенное поле течения удовлетворяет уравнениям движения идеальной несжимаемой жидкости. Первое и второе уравнения (1.1) в линейном приближении принимают вид:

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = \frac{\partial \alpha U_0}{\partial x} + \frac{\partial \alpha V_0}{\partial y}, \quad \frac{\partial \rho u_1}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_1}{\partial x} = 0 \quad (1.2)$$

Здесь штрихами обозначены возмущения гидродинамических величин ( $\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{v}'$ ,  $p = p_0 + p'$  и  $|v'| \ll |V_0|$ ,  $p' \ll p_0$ ). Пользуясь первым уравнением (1.2), можно ввести функцию тока возмущенного течения, а из второго уравнения (переходя к лагранжевым переменным) получим квадратуру

$$J_1 n = f(l), \quad J_1 = U_1 \frac{\partial y}{\partial l} - V_1 \frac{\partial x}{\partial l} \quad (1.3)$$

где  $f(l)$  определяется из граничных условий. Уравнения движения (третье и четвертое уравнения (1.1)) также линеаризуем и запишем в форме Громеки – Лэмба

$$\frac{\partial P}{\partial x} + V_0 \Omega = -\frac{\alpha}{\rho_l} \frac{\partial p_0}{\partial x} + F_x \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} - U_0 \Omega = -\frac{\alpha}{\rho_l} \frac{\partial p_0}{\partial y} + F_y$$

$$P = u' U_0 + v' V_0 + \frac{p'}{\rho_l}, \quad \Omega = \frac{\partial u'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial x}$$

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x}(\alpha T) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha T_{11}) + \frac{\partial}{\partial y}(\alpha T_{12}), \quad F_y = \frac{\partial}{\partial y}(\alpha T) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha T_{12}) + \frac{\partial}{\partial y}(\alpha T_{22})$$

$$T = (W_1^2 + W_2^2) / 6, \quad T_{ij} = -W_i W_j / 2, \quad W_1 = u_1 - U_0, \quad W_2 = v_1 - V_0$$

В правой части уравнения (1.4) члены порядка  $\alpha |W|^2$  при малой скорости скольжения малы по сравнению с членами порядка  $\alpha \Delta p_0 / \rho_l$  (где  $\Delta p_0$  – характерный перепад давления в невозмущенном течении). Однако в рассматриваемом случае скорости скольжения не малы и правые части уравнения (1.4) должны быть учтены. Умножая первое уравнение (1.4) на  $U_0$ , а второе на  $V_0$  и складывая их, получим уравнение только для одной неизвестной функции  $P$

$$U_0 \frac{\partial P}{\partial x} + V_0 \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\alpha}{\rho_l} \left( U_0 \frac{\partial p_0}{\partial x} + V_0 \frac{\partial p_0}{\partial y} \right) + U_0 F_x + V_0 F_y \quad (1.5)$$

Отметим, что  $U_0 \partial / \partial x + V_0 \partial / \partial y$  есть производная вдоль линии тока невозмущенного течения  $\psi(x, y) = \text{const}$ . В правой части уравнения (1.5) первый член есть результат возмущения плотности жидкости  $\rho_l(1 - \alpha)$  и определяется величиной  $\alpha$  и изменением невозмущенного давления  $p_0$  вдоль линии тока. Неизвестная функция  $P$  выражается в виде квадратуры (после перехода от переменных  $(x, y)$  к  $(x, \psi)$ ) вдоль линии тока  $\psi = \text{const}$

$$P(x, \psi) = -\frac{1}{\rho_l} \int_{x_0(\psi)}^x \left( \alpha(x, \psi) \frac{\partial p_0(x, \psi)}{\partial x} \right) dx + \int_{x_0(\psi)}^x \left( F_x + F_y \frac{V_0}{U_0} \right) dx$$

где  $x_0(\Psi)$  – некоторая начальная координата на линии тока  $\Psi$ , соответствующая крайней траектории области, заполненной пузырьковой средой. Учтено, что на границе двухфазной области величина  $P$  непрерывна, а в натекающем потоке ( $\alpha = 0$ ) константа Бернулли не возмущена, следовательно,  $P = 0$ . Зная распределение функции  $P$ , можно прогнозировать результат воздействия пузырьков на течение жидкости в струе (при удалении вниз по потоку невозмущенная струя становится равномерной  $U_0 \rightarrow V_\infty$ ,  $V_0 \rightarrow 0$ , давление в струе однородным  $p' \rightarrow 0$  и, следовательно,  $P \rightarrow V_\infty u'$ ). В рассматриваемом случае даже в отсутствие градиента невозмущенного давления функция  $P$  может меняться за счет градиентов объемной концентрации  $\alpha$  и относительной скорости.

Уравнение движения центра сферически-симметричного пузыря в нулевом приближении (пренебрегая массой пузыря) выпишем в виде

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0 \quad (1.6)$$

$$\mathbf{F}_1 = -\frac{2}{3} \pi a^3 \rho_l \left( \frac{d_1 \mathbf{V}_1}{dt} - 3 \frac{d_0 \mathbf{V}_0}{dt} \right) - 2 \pi a^2 \rho_l \dot{a} (\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0), \quad \mathbf{F}_2 = 12 \pi \mu_l a (\mathbf{V}_0 - \mathbf{V}_1)$$

$$\frac{d_i \mathbf{V}_i}{dt} = U_i \frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial x} + V_i \frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial y}, \quad i = 0, 1$$

где  $\mathbf{F}_1$  – гидродинамическая сила, действующая на пузырь переменного радиуса, движущийся с переменной скоростью [7, 8],  $\mathbf{F}_2$  – сила вязкого сопротивления, вычисляемая по скорости диссипации энергии в вязкой жидкости для пузыря с отсутствием трения на границе [10] при числе Рейнольдса относительного движения  $Re \rightarrow \infty$ ,  $\dot{a}$  – скорость границы пузыря.

Выпишем уравнение радиальных движений сферического пузыря, удовлетворяя условию для давления на его поверхности в среднем

$$p_a = p_v - \frac{2\Sigma}{a} - \frac{4\mu_l W_{la}}{a}, \quad W_{la} = \dot{a} + \frac{\xi_v}{\rho_l} \quad (1.7)$$

$$a \dot{W}_{la} = -\frac{3}{2} W_{la}^2 + \frac{|\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0|^2}{4} + \frac{p_a - p_\infty}{\rho_l}$$

Здесь  $W_{la}$  – радиальная относительно центра пузыря скорость жидкости на межфазной поверхности,  $\xi_v$  – интенсивность массообмена пузыря, отнесенная к единице площади поверхности пузыря. Для газового пузыря  $\xi_v = 0$ , а давление газа внутри пузыря будем считать связанным с объемом адиабатой Пуассона  $p_v = p_k(a_0/a)^{3\gamma}$ . Для парового пузыря модель значительно сложнее. Исследования задачи в сферически-симметричной постановке [1] показали, что влияние тепловых процессов внутри пузыря на массообмен следует учитывать лишь в случае значительно перегретого пара. Кроме того, при расширении пара в пузыре за счет образования капель конденсата температура пара не опускается ниже температуры насыщения [2]. Таким образом, можно положить температуру пара в пузыре однородной и равной температуре насыщения.

Выписанная выше система уравнений (1.6)–(1.7) в случае парового пузыря дополнится еще одним дифференциальным уравнением, являющимся следствием уравнения баланса массы пара в пузыре, уравнения Клапейрона – Клаузиуса, а также предположения, что все параметры в пузыре зависят только от времени ( $p_v(t)$ ,  $\rho_v(t)$ ,  $T_v(t) = T_s(p_v)$ )

$$\frac{1}{3} a \left( 1 - \frac{R_v T_s(p_v)}{L} \right) \frac{dp_v}{dt} = R_v T_s(p_v) \xi_v - p_v \frac{da}{dt} \quad (1.8)$$

где  $R_v$  – газовая постоянная пара. Обтекание сферического пузыря будем считать безотрывным и рассматривать в осесимметричной постановке. В силу того что вязкость пара значительно меньше вязкости жидкости, тангенциальные напряжения на поверхности пузыря отсутствуют. При больших числах Рейнольдса относительного движения для оценки теплопереноса можно воспользоваться полем скоростей потенциального обтекания сферы [10, 11], т.е. для радиальной  $v_r$  и тангенциальной  $v_\theta$  составляющих скорости жидкости имеем

$$v_r = -v_\infty \left( 1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \cos(\theta) + \frac{\alpha^2 W_{lu}}{r^2}, \quad v_\theta = v_\infty \left( 1 + \frac{a^3}{2r^3} \right) \sin(\theta)$$

где  $r$  – расстояние до центра пузырька,  $\theta$  – угол между радиусом-вектором  $r$  и направлением, противоположным направлению набегающего потока на бесконечности, скорость набегающего потока  $u_\infty = |\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0|$ .

Уравнение притока тепла в сферических координатах имеет вид ( $T_l$  – температура жидкости)

$$\frac{\partial T_l}{\partial t} + v_r \frac{\partial T_l}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T_l}{\partial \theta} = v_T \left( \frac{\partial^2 T_l}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T_l}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_l}{\partial \theta^2} + \frac{\text{ctg}(\theta)}{r^2} \frac{\partial T_l}{\partial \theta} \right) \quad (1.9)$$

$$T_l(r, \theta, 0) = T_0, \quad T_l(\infty, \theta, t) = T_0, \quad T_l(a, \theta, t) = T_s(p_v)$$

Здесь  $v_T = \lambda_l / \rho_l C_l$  – коэффициент температуропроводности жидкости. Выражение для средней по поверхности пузыря интенсивности фазовых превращений  $\xi_v$  получается из уравнения баланса потоков энергии на поверхности пузыря

$$\xi_v = \frac{\lambda_l}{2L_0} \int_0^\pi \frac{\partial T_l}{\partial r} \Big|_{r=a} \sin(\theta) d\theta$$

Из начальных условий следует, что температура при  $t = 0$  имеет скачок на стенке пузыря от  $T_s(p_v)$  до  $T_\infty$ , вследствие чего при  $t \rightarrow 0$  градиент температуры (и, следовательно,  $\xi_v$ ) стремится к  $\infty$ . Поэтому для начальных моментов времени используется асимптотическое решение [1] (интеграл Дюамеля). Сложность численного решения тепловой задачи (1.9) связана также с тем, что характерное время динамических процессов значительно меньше тепловых и, следовательно, динамика пузыря, т.е. скорость изменения коэффициентов уравнения (1.9), определяет необходимость выбора достаточно малых расчетных шагов по времени и пространству.

В некоторых случаях для вычисления тепловых потоков будет использоваться решение [11] для нестационарного теплообмена пузыря без учета конденсации при больших числах Пекле

$$\frac{a}{\delta_T} = Nu_0 h(t), \quad t = \frac{U^* t^*}{a}, \quad \delta_T = \frac{\lambda_l (T_l - T_\infty)}{\xi_v}, \quad Pe = \frac{a U^*}{v_T}$$

$$Nu_0 = \sqrt{\frac{2}{3\pi}} Pe, \quad h(t) \approx \left( 1 + \frac{5}{72} t^2 - \frac{7}{1920} t^4 + O(t^6) \right) / \sqrt{\frac{2t}{3}}, \quad t \ll 1 \quad (1.10)$$

Здесь  $t$  – безразмерное время,  $t^*$  – размерное время,  $U^*$  – характерная скорость обтекания пузыря. При  $t \rightarrow 0$ ,  $h(t) \approx 1 / \sqrt{2t/3}$  формула (1.10) описывает сферически-симметричную начальную нестационарность тепловой задачи в отсутствие конвективного теплообмена. Члены, описывающие конвективный теплообмен, начинают давать вклад на более поздней стадии, когда пузырь за счет больших градиентов давления приобретает конечную относительную скорость. Следовательно, в формуле (1.10) учтены основные механизмы тепломассообмена пузыря с окружающей жидкостью.

Интегрируя систему уравнений динамики пузыря (1.6)–(1.8) с начальными условиями

$$\begin{aligned} x &= x_k(l), & y &= y_k(l), & a &= a_0, & \dot{a} &= 0 \\ \dot{x} &= U_0, & \dot{y} &= V_0, & W_{la} &= 0, & p_v &= p_k \end{aligned} \quad (1.11)$$

где  $x_k(l)$ ,  $y_k(l)$  – координаты поверхности каверны,  $l$  – длина образующей каверны, отсчитываемая от хвостовой точки,  $U_0$ ,  $V_0$  – компоненты скорости жидкости в точке  $x_k(l)$ ,  $y_k(l)$ , получим поле скоростей и траекторий пузырей как функции  $l$ ,  $t$ .

После этого для вычисления поля числовой концентрации  $n$  и объемной  $\alpha$  достаточно в каждой точке произвести вычисление якобиана преобразования  $J_1$  (формула (1.3)). Однако определить неизвестную функцию  $f(l)$  в (1.3) нельзя, задавая концентрацию на поверхности каверны, так как в силу постановки начальных условий (1.11) граница каверны является образующей семейства траекторий и якобиан  $J_1$  обращается здесь в нуль. Однако можно показать, что функция  $f(l)$  определяется распределением  $dN/dl$ , где  $dN$  – число пузырей, проходящих за единицу времени через сечение трубки тока "среды" пузырьков, соответствующей элементу  $dl$ . Если считать, что пузырьки через поверхность каверны поступают равномерно, то  $dN/dl = N_0/l_0$ , где  $N_0$  – число пузырьков, появляющихся на участке каверны  $0 \leq l \leq l_0$  за единицу времени. Зная начальный размер пузырей  $a_0$ , можно  $N_0$  связать с объемным расходом пара (газа). Введем объемный расход пара (газа)  $Q_0$ , приведенный к внешнему давлению  $p_a$  по адиабатической формуле, а также характерную среднюю величину объемной концентрации  $\alpha_0 = Q_0 / (Q_0 + V_\infty \Delta)$  ( $Q_0 \ll V_\infty \Delta$ ). Учитывая все сказанное, напишем для  $\alpha$

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = \frac{V_\infty}{l_0 J_1} \left( \frac{p_a}{p_k} \right)^{1/\gamma} \left( \frac{a}{a_0} \right)^3 \quad (1.12)$$

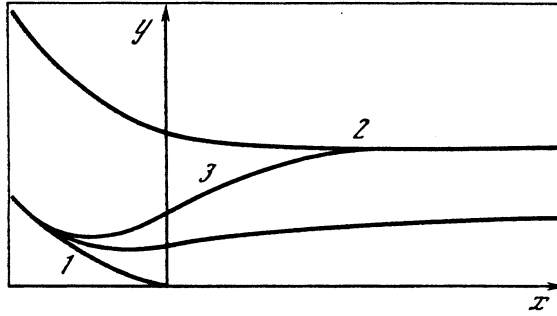
В дальнейшем вместо размерной величины  $P$  будем определять и использовать обезразмеренную и пронормированную величину  $P^* = P / \alpha_0 V_\infty^2$  и, следовательно, вместо скорости жидкости в струе  $u'$  величину  $u^* = u' / (\alpha_0 V_\infty)$ .

2. Невозмущенное течение жидкости суть две симметричные струи, истекающие из каналов, расположенных под углом к плоскости симметрии (фиг. 1), и плавно смыкающиеся, образуя каверну с давлением  $p_k > p_a$  ( $p_a$  – давление в окружающем пространстве). Так как рассматриваются скоростные струи, то можно не интересоваться особенностями течения выше по потоку и воспользоваться асимптотическим представлением [1, 9] поля течения плавно смыкающихся струй при  $u_0 \rightarrow 1$ , где  $u_0 = V_k/V_\infty$ ,  $V_k$  – модуль скорости на границе каверны,  $V_\infty$  – модуль скорости на границе струи

$$\frac{dw}{dz} = v_0^{1-2u/\pi}, \quad \frac{dw}{du} = \frac{2\Delta}{\pi} \operatorname{tg} u \quad (2.1)$$

Здесь  $w = \phi + i\psi$  – комплексный потенциал,  $u = \xi + i\eta$  – комплексное переменное, меняющееся внутри полуполосы  $0 \leq \xi \leq \pi/2$ ;  $\eta \geq 0$ . При этом поверхность каверны соответствует границе  $\xi = 0$ , поверхность струи –  $\xi = \pi/2$ , часть действительной оси ( $x \geq 0$ )  $\rightarrow 0 \leq \eta \leq \pi/2$ , бесконечно удаленная точка в физической плоскости ( $x \rightarrow \infty$ ) соответствует  $u \rightarrow \pi/2$ , точка  $u = 0$  вспомогательной плоскости параметрического переменного – точке возврата каверны (хвостовая точка  $z = 0$  в физической плоскости). При  $z = 0$  градиент давления обращается в бесконечность. Выражения для компонент скорости невозмущенного течения жидкости и давления имеют вид

$$U_0 = V_\infty v_0^{1-2\xi/\pi} \cos\left(\frac{2\eta}{\pi} \ln v_0\right), \quad V_0 = V_\infty v_0^{1-2\xi/\pi} \sin\left(\frac{2\eta}{\pi} \ln v_0\right) \quad (2.2)$$



Фиг. 1. Картина течения: 1 – каверна, 2 – граница струи, 3 – траектории пузырей

$$p_0 = p - \frac{1}{2} \rho_l V_\infty^2 v_0^{2-4\xi/\pi}$$

где  $p$  – полное давление струи. Из третьего уравнения (2.2) следует, что давление постоянно вдоль линий  $\xi = \text{const}$ . Из второго уравнения (2.1) можно получить конечное выражение для комплексного потенциала  $w$  как функции переменной  $u$ , откуда для функции тока невозмущенного течения получим

$$\psi = \frac{2\Delta}{\pi} \text{arctg}(\text{tg}(\xi) \text{th}(\eta))$$

3. Коротко обсудим проблему разрушения пузырей в потоке, так как, находясь в области больших градиентов давления, пузырь будет подвергаться разрушающему воздействию как непосредственно градиента давления в жидкости, так и относительной скорости, развивающейся под действием этого градиента. Если оценить ускорение жидкости как  $g \approx (p_k - p_a)/(\rho_l \Delta)$ , то для рассматриваемых условий  $p_k - p_a \approx 2$  МПа,  $\Delta = 2$  мм, пузырь  $a_0 \approx 0,1$  мм сверхкритический. Время разрушения такого пузыря по оценкам линейной теории [13] составляет  $\sim 10^{-5}$  с. С другой стороны, время нахождения пузыря в области больших градиентов (при  $V_\infty \approx 100$  м/с) имеет тот же порядок. Следовательно, на разрушение пузыря должен сильно влиять фактор, связанный с расширением пузыря под действием перепада давления. Ускорение стенки пузыря имеет порядок  $(p_k - p_a)/(\rho_l a)$ . Так как  $a \ll \Delta$ , это ускорение много больше  $g$  и много больше ускорения центра пузыря (имеющего порядок  $g$ ), т.е. будут доминировать процессы, связанные с ростом пузыря. В процессе роста пузыря устойчивость сферической формы обеспечивается демпфированием при  $\dot{a} > 0$  [13]. Поэтому разрушение будем рассматривать только в стадии коллапса ( $\dot{a} < 0$ ), причем будем учитывать дестабилизирующее воздействие только за счет движения пузыря относительно жидкости. Таким образом, анализ разрушения пузыря начинается, если имеется фаза коллапса пузыря ( $\dot{a} < 0$ ) и при этом  $We > We_*$ , где число Вебера  $We = 2a\rho_l W^2/\Sigma$ , критическая величина  $We_* \approx 2\pi$  [5, 13]. В рамках линейной теории [13] можно ввести минимальное время  $\tau_*$  разрушения неустойчивого по критерию Вебера пузыря

$$\tau_* = \ln\left(\frac{a}{b}\right) \sqrt{(\rho_l a^3) \left(\frac{We}{We_*}\right)^3}$$

где  $b$  – начальное возмущение поверхности – будем считать достаточно малым ( $b = 0,1-0,01a$ ). Сравнивая в вычислениях время  $\tau_*$  с интервалом времени  $\tau_N$ , в течение которого пузырь неустойчив в смысле условий, сформулированных выше, можно судить о вероятности разрушения пузыря.

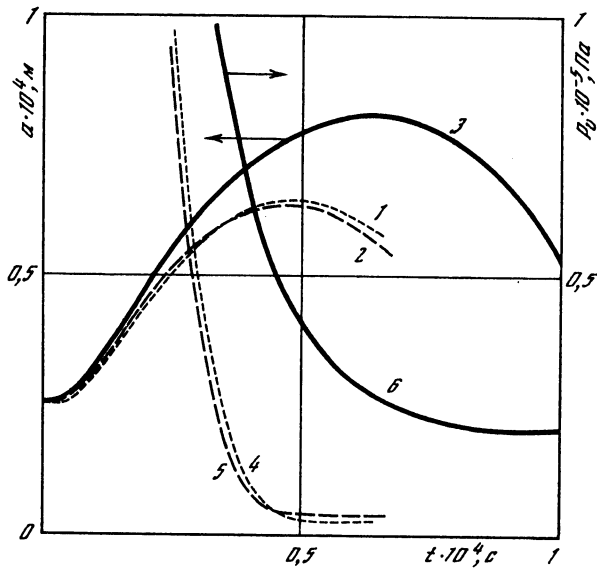
4. Была реализована следующая процедура расчетов: сначала производится расчет траекторий пузырьков, уносимых с поверхности каверны. При этом траектории пузырьков и их поле скоростей определялось как функции  $(l, t)$ . Далее по формуле (1.12) определялось распределение числовой  $n$  и объемной  $\alpha$  концентрации; при вычислении якобиана  $J_1$  производился одновременный расчет пары близких траекторий, с параметрами  $l$  и  $l + \Delta l$ ; выбором точности расчета траекторий и величины шага  $\Delta l$  обеспечивалась необходимая точность вычисления  $J_1$ . В случае паровых пузырей величина  $\xi_v$  находилась на основании численного решения уравнения теплопроводности. При решении системы обыкновенных дифференциальных уравнений использовался стандартный пакет программ. Далее методом Симпсона производилось вычисление интегралов в выражении для  $P(x, \psi)$  вдоль линии тока невозмущенного течения. Наибольшую сложность здесь представляет определение производных от численно найденной функции  $\alpha$ . При вычислении этих производных производилось сглаживание функции  $\alpha$ . Результаты счета проверялись путем изменения шага интегрирования и точности вычисления траекторий. При численном решении уравнения теплопроводности использовался метод переменных направлений [14], имеющий второй порядок точности по пространственным координатам и второй – по времени.

В соответствии с методом переменных направлений шаг по времени разбивается на два одинаковых интервала. Для первого полушага  $n + 1/2$  по времени уравнение теплопроводности (1.9) записывается в конечных разностях в неявной форме по радиальной переменной  $y$  и в явной по угловой переменной  $x$ . Решение системы алгебраических уравнений с треугольной матрицей коэффициентов производится методом линейной прогонки Томаса [15]. Определив распределение температуры на временном слое  $(n + 1/2)$ , решаем систему уравнений динамики пузыря и находим коэффициенты в уравнении (1.9) в следующий момент времени  $t^{n+1}$ . Затем для определения поля температуры на слое  $(n + 1)$  (второй полушаг) уравнение (1.9) записывается в неявной форме по угловой переменной  $x$  и в явной по радиальной переменной  $y$ . Процедура предыдущего полушага повторяется.

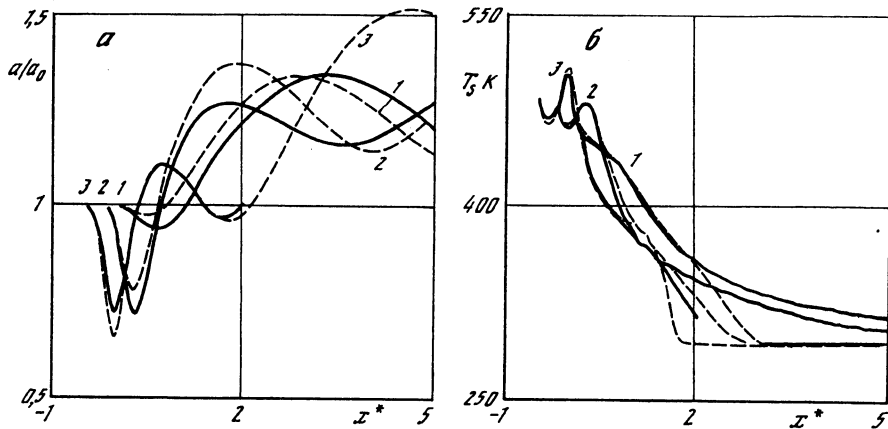
Для достижения суммарной ошибки аппроксимации порядка  $\Delta t^2$  граничные условия представляются так [15], чтобы они были совместимы с алгоритмом для внутренних точек, дающим второй порядок точности. Для этого сначала в соответствии с описанным выше уравнением динамики пузыря определяются граничные значения температуры  $T_s^{n+1/2}$  на слое  $n + 1/2$ ; далее, определив сеточные значения температуры на этом слое, вычисляются значения  $T_s^{n+1}$  на слое  $n + 1$ . Затем граничное условие на слое  $n + 1/2$  полагается равным  $(T_s^{n+1} + T_s^n) / 2$  и процедура расчета  $T_l$  повторяется снова. Таким образом, для вычисления одного полного шага по времени (сохраняя при этом заданную точность вычислений  $O(\Delta t^2, \Delta x^2, \Delta y^2)$ ) предложенный метод расчетов является продуктивным, в отличие от полной простой итерационной замены коэффициентов [15], когда для проведения вычислений с заданной точностью в рамках постановки, указанной выше, необходимо производить несколько итераций на каждом временном слое. Отметим, что шаг по времени в рассматриваемой задаче определяется характерным временем динамики пузыря, т.е. должно выполняться условие  $\Delta t \ll \tau_i$ . Граничное условие на бесконечности  $T_l = T_0 = \text{const}$  сносится на некоторое конечное расстояние  $y_\infty$ , которое увеличивается по мере распространения температурного фронта. При этом требуется выполнение условия  $\lambda_l y_\infty^2 \text{grad}(T_l) \ll \epsilon$ , где  $\epsilon$  мало (условие отсутствия притока тепла на  $\infty$ ). Проведенные тестовые расчеты показали хорошее совпадение для профилей температур с имеющим аналитическое решение [11] случаем конвективного теплообмена сферы (постоянного радиуса) в потенциальном потоке.

5. В соответствии с описанной выше схемой проведены расчеты динамики паровых пузырей в невозмущенном поле течения струи при  $p_k = 2$  МПа,  $p_a = 0,1$  МПа,  $\Delta = 2$  мм,  $T_0 = 300$  К. На фиг. 2 для пузыря, с начальным радиусом  $a_0 = 0,3$  мм, движущегося вдоль оси симметрии при давлении напора  $p = 10,1$  МПа, приведено сравнение результатов двух расчетов (зависимость  $a(t)$  и  $p_v(t)$ ): с учетом движения пузыря относительно жидкости и в предположении "вмороженности" пузыря в жидкость. Качественно два расчета согласуются, однако влияние скольжения пузыря на максимальный размер значительно. Для "вмороженного" пузыря минимальное





Фиг. 2. Кривые 1, 2, 3 – зависимости  $a(t)$  с учетом скольжения пузыря, с использованием аппроксимаций для теплового потока и в предположении "вмороженности" пузыря соответственно. Кривые 4, 5, 6 – соответствующие зависимости  $p_v(t)$



Фиг. 3. Зависимости  $a/a_0$  и  $T_s$  от  $x^* = x/\Delta$ . Кривые 1, 2, 3 – для координат инициации пузырей на поверхности каверны  $l^* = l/\Delta = 0; 0,2; 0,5$ . Штрихами показаны расчеты с использованием формулы (1.10)

давление в пузыре, хотя на порядок меньше давления в окружающем пространстве, но на порядок больше давления насыщенных паров при температуре холодной жидкости. Скольжение интенсифицирует процесс тепломассообмена и при достижении максимального размера давление в пузыре практически равно  $p_s(T_0)$ , т.е. паровой пузырь действительно превращается в обычный кавитационный пузырь.

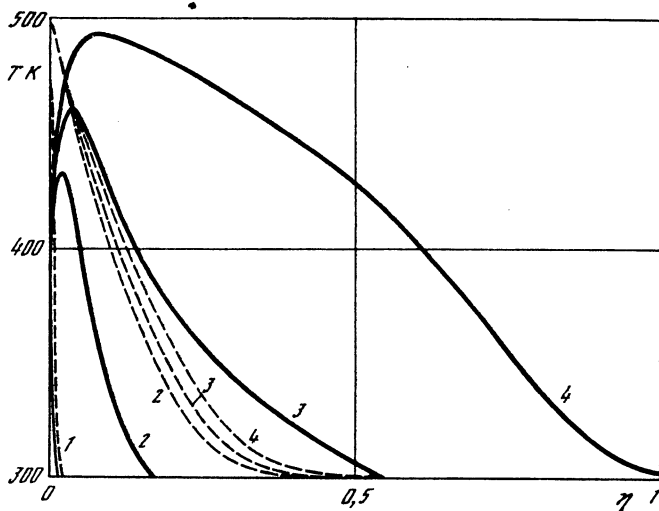
На той же фиг. 2 показаны зависимости, полученные с использованием аппроксимационной формулы (1.10) с поправочным коэффициентом (об этом см. ниже). На фиг. 3, а, б показаны зависимости  $a/a_0$  и  $T_s$  от  $x/\Delta$ , рассчитанные для пузырей,

иницированных в разных точках на поверхности каверны при давлении напора струи 5 МПа (все дальнейшие расчеты проведены с этим давлением). По сравнению с фиг. 2 скорость струи здесь меньше, а многоскоростные эффекты проявляются в большей степени. Штрихами показаны кривые, рассчитанные с использованием формулы (1.10) для величины  $\xi_v$ . Причем для достижения количественного согласования с полным расчетом в формуле варьировалась скорость  $U^*$ , характеризующая интенсивность конвективного теплообмена. Из условия совпадения максимальных размеров пузырей для одной из траекторий ( $l^* = l/\Delta = 10^{-4}$ ) величина  $U^*$  выбиралась равной  $0,7v_{\infty}$ .

Данные фиг. 3 показывают, что с увеличением расстояния  $l^*$  увеличивается, а затем стабилизируется первый коллапс парового пузыря (что качественно отличает этот случай от случая газовых пузырей). Кроме того, появляется вторая пульсация, амплитуда которой становится сравнимой с первой пульсацией. Согласование точного расчета с приближенным вначале вполне удовлетворительное, но затем температура, рассчитанная с приближенным учетом тепломассообмена, падает гораздо быстрее, чем в точных расчетах. Однако давление в пузыре в этой стадии эволюции пузыря мало и не оказывает влияния на динамику пузыря. Таким образом, в дальнейшем для вычисления полей скоростей и объемной концентрации можно использовать приближенные аппроксимации (1.10) с поправочным коэффициентом.

Первая и вторая пульсации пузыря имеют различную природу. Температура (и, следовательно, давление) во время второй пульсации меняется слабо в сравнении с первой пульсацией. Первый коллапс аналогичен пульсационному режиму конденсации пузыря в сферически-симметричном случае [5], а второй – результат учета многоскоростных эффектов. В течение коллапса имеет место значительное увеличение относительной скорости пузыря и возникает вопрос о разрушении пузыря ( $We > We_*$ ). Обсуждавшийся выше критерий разрушения здесь используется для оценок области существования пузырей. Наиболее опасным с точки зрения разрушения пузырей по критерию Вебера является первый коллапс пузыря. Дальнейшее развитие пузыря происходит при низком давлении и, следовательно, плотности пара в пузыре. Поэтому число Вебера даже при заметных относительных скоростях значительно меньше критического. Расчеты, приведенные на фиг. 3, позволяют сделать оценки величины  $\tau = \tau_*/\tau_N$ . Для пузыря начального радиуса  $a_0 = 0,3$  мм, уносимого из хвостовой точки каверны,  $\tau = 56,5$ , т.е. вероятность разрушения здесь мала. Для пузыря, инициированного в точке  $l^* = 0,5$ , для первого коллапса  $\tau = 1,2$ , т.е. время пребывания в неустойчивом состоянии порядка времени разрушения. С увеличением размеров пузырей для той же точки инициации величина  $\tau$  растет, но незначительно. Например, для пузыря начального радиуса  $a_0 = 0,5$  мм  $\tau = 1,4$ . Величина  $\tau$  резко уменьшается с уменьшением размера пузыря. Так, при  $a_0 = 0,1$  мм  $\tau = 0,04$ , т.е. время разрушения много меньше времени пребывания в неустойчивом состоянии. Такие пузыри разрушаются на мелкие фрагменты и конденсируются. Таким образом, в рассматриваемой схеме только паровые пузыри размером несколько десятых миллиметра (и больше) могут проходить область больших градиентов без разрушения.

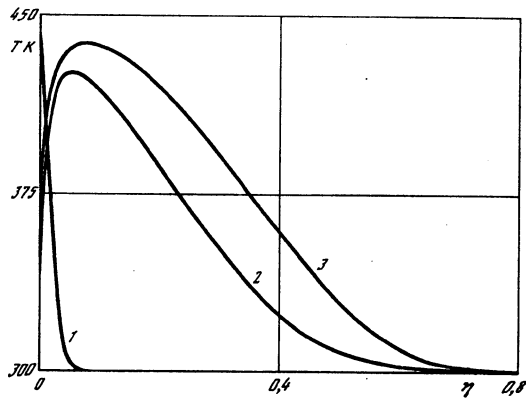
На фиг. 4 представлены профили распределения температуры вдоль радиальной координаты  $\eta = r/a - 1$  ( $\eta = 0$  – поверхность пузыря,  $a$  – текущий радиус) при различных значениях угловой координаты ( $\theta = 90, 168, 172, 180^\circ$ ) в фиксированные моменты времени  $t = 1,284 \cdot 10^{-5}$  и  $2,75 \cdot 10^{-5}$  с (соответствующие координаты  $x/\Delta = 0,0216$  и  $0,7505$ ) для пузыря, инициируемого при  $l^* = 0,5$ . Первый момент времени соответствует конечной стадии первого коллапса пузыря (фиг. 3), температура внутри пузыря близка к максимальной ( $T_s^{\max} = 502,5$  К, а начальная температура пара 484,3 К). Вторым момент времени соответствует максимуму размера перед вторым коллапсом. За пузырем образуется след, причем в первом случае довольно большой толщины. Это можно объяснить сильным уменьшением размера пузыря во время



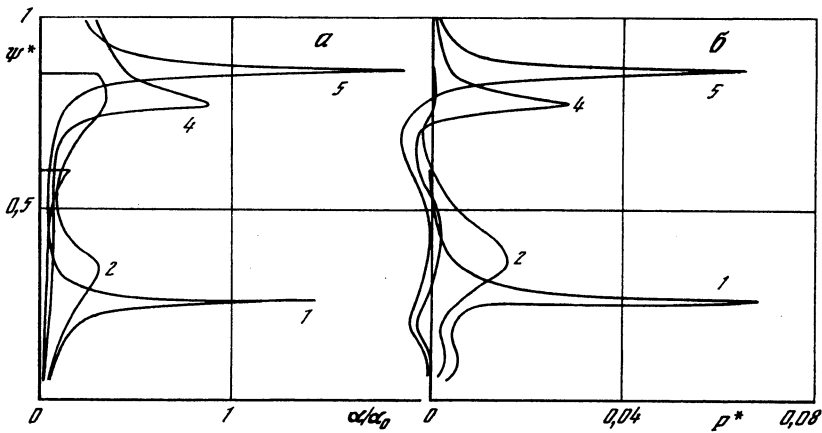
Фиг. 4. Распределение температуры вдоль радиальной координаты  $\eta r/a - 1$  при значениях угловой координаты  $\theta = 90, 168, 172, 180^\circ$  (кривые 1-4 соответственно). Пунктирные линии - состояние при  $x^* = 0,0216$  (см. фиг. 2), сплошные линии при  $x^* = 0,7505$ . Координата инициации пузыря  $l^* = 0,5$

коллапса. Отсюда следует, что теплообмен со следом может существенно влиять на состояние пара в пузыре. В дальнейшем толщина следа уменьшается, так как увеличивается размер пузыря. Максимум температуры жидкости достигается внутри следа, причем этот максимум (493,4 К) больше начальной температуры пара (т.е. в следе сохраняется "память" о коллапсе пузыря). Градиенты температуры на стенке в области следа становятся положительными и тепловой поток в этой области направлен от жидкости к пару. На фиг. 5 показано развитие температурного следа ( $\theta = 180^\circ$ ) для трех моментов времени:  $t = 1,284 \cdot 10^{-5}, 3,379 \cdot 10^{-5}, 4,979 \cdot 10^{-5}$  с, для пузыря, движущегося вблизи оси струи (иницирован в точке  $l^* = 10^{-4}$ ) без заметных пульсаций. За время наблюдения ( $\approx 0,5 \cdot 10^{-4}$  с) пузырь проходит относительно жидкости расстояние порядка своего максимального радиуса, след сначала развивается за счет движения жидкости относительно пузыря, а затем укорачивается вследствие остывания жидкости. В этом примере при монотонном изменении температуры пара в пузыре (фиг. 3) в следе вырабатывается немонотонный профиль температуры. Таким образом, немонотонный профиль является следствием не только первого коллапса пузыря, а также и быстрого падения температуры в пузыре в результате динамического расширения и конденсации.

6. При проведении расчетов поля объемной концентрации и функции  $P$ , характеризующей возмущение течения жидкости, для сокращения времени вычислений использовалась аппроксимационная формула (1.10) для интенсивности массообмена  $\xi_v$ . Были проведены расчеты задачи о равномерном уносе паровых пузырей с участка поверхности каверны  $0 < l^* < 1$ . Начальный размер всех пузырей одинаков ( $a_0 = 0,3$  мм), давление напора  $p = 5$  МПа. Результаты представлены в терминах относительных величин:  $P^* = P / \alpha_0 V_\infty^2$ , объемная концентрация  $\alpha^* = \alpha / \alpha_0$ , функция тока  $\Psi^* = \psi / \Delta (0 \leq \Psi^* \leq 1, \Psi^* \rightarrow y^* = y / \Delta$  при  $x^* = x / \Delta \rightarrow \infty)$ . Если учесть, что при  $x^* > 3$  все параметры невозмущенного течения в струе отличаются от равномерных не более чем на 1%, и предположить, что давление в возмущенном потоке становится равномерным, то при  $x^* > 3$  величину  $P^*$  можно считать равной возмущению продоль-



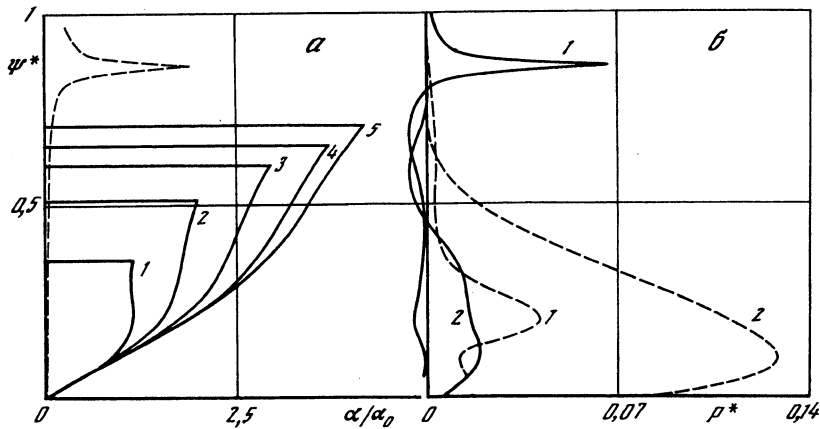
Фиг. 5. Распределение температуры в следе ( $\theta = 180^\circ$ ) при  $x^* = 0,694$  (1), 1,886 (3), 2,804 (2)



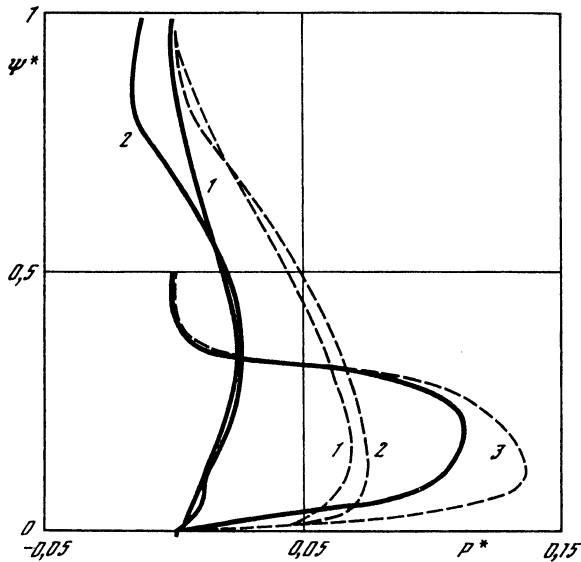
Фиг. 6. Профили объемной концентрации и функции  $P^*$  в различных сечениях  $x^* = \text{const}$  (числа около кривых – значения  $x^*$ )

ной скорости жидкости, отнесенному к скорости течения струи  $V_\infty$  и величине  $\alpha_0$ . На фиг. 6 представлены профили объемной концентрации и возмущения  $P^*$  в различных сечениях струи. Профиль величин  $P^*$  в сечениях  $x^* = 4; 5$  показывает резкое увеличение скорости жидкости в областях, где имеется резкое увеличение объемной концентрации, т.е. возмущенное течение имеет вид тонкой двухфазной струи внутри основной струи, достигающей границы невозмущенной струи на расстоянии порядка 6–7 калибров. Эффект кумуляции пузырьков в виде узкой двухфазной струи связан с переходом режима роста пузырей от однопульсационного к двухпульсационному при удалении места инициации от конца каверны вверх по потоку.

На фиг. 7, а даны профили объемной концентрации для тех же условий вдува, что и на фиг. 6, на участке  $0 < l^* < 1$  адиабатических газовых пузырей, пунктиром для сравнения показан профиль в сечении  $x^* = 5$  для пузырей пара. Так как газовые пузыри не конденсируются, то концентрация их на порядок выше, чем паровых. Однако подвижность паровых пузырей выше (благодаря пульсациям), так что двухфазная среда для газовых пузырей занимает меньшую часть сечения струи, чем для газовых пузырей. На фиг. 7, б показаны профили функции  $P^*$  в сечении  $x^* = 5$  для паровых (1) и газовых (2) пузырей. Здесь же (штрихами) показаны профили, полученные без учета членов со скольжением ( $\approx \alpha W^2$ ) в уравнениях двухфазной среды. Если судить по изменению



Фиг. 7. Сравнение профилей для газовых и паровых пузырей. Профили объемной концентрации газовых пузырей 1-5 соответствуют сечениям при  $x^* = 1, 2, 3, 4, 5$ ; штрихи – профиль для паровых пузырей в сечении  $x^* = 5$ . Профили  $P^*(\Psi^*)$  в сечении  $x^* = 5$ ; 1 – паровой пузырь; 2 – газовый; штрихи – расчет без учета членов со скольжением



Фиг. 8. Влияние размера газовых пузырей на профиль возмущения  $P^*(\Psi^*)$  в сечении  $x^* = 5$ . Цифры 1, 2, 3 – размеры пузырей  $a_0 = 0,3; 0,02; 0,004$  мм, штриховые линии – расчеты без учета членов со скольжением

импульса, то газовые пузыри гораздо больше возмущают струю, чем паровые. С учетом скольжения в уравнениях движения добавочный импульс уменьшается в обоих случаях, однако, по данным фиг. 7, б, для паровых пузырей добавочный импульс с учетом точности вычислений вообще обращается в нуль.

Так как газные пузыри не конденсируются, имеется возможность провести исследование в большем диапазоне параметров пузырей. На фиг. 8 представлены профили возмущения  $P^*$  в сечении  $x^* = 5$  для газовых пузырей, вдуваемых равномерно на участке каверны  $0 \leq l^* \leq 2$ , с начальным размером  $a_0 = 0,3; 0,02$  и  $0,004$  мм

(последний размер близок к критическому). Штриховыми линиями представлены результаты расчетов без учета членов со скольжением. Без учета этих членов добавочный импульс струи больше для крупных пузырей, но учет скольжения значительно снижает эффективность крупных пузырей. Оценку максимального воздействия пузырьковой фазы на импульс струи можно производить при отсутствии скольжения фаз, т.е. по методике [9].

**Заключение.** Исследования, проведенные для пузыря со сложным поведением (пульсации, интенсивный рост), показали заметное влияние на тепломассообмен температурного следа за пузырем. При интенсивном падении температуры в пузыре распределение температуры в следе становится немонотонным и тепловые потоки в донной области пузыря направлены от жидкости к пару.

В случае больших градиентов давления и размеров пузырей, значительно превышающих критический (для пузырей, меньших критического размера, многоскоростные эффекты несущественны), учет в уравнениях двухфазной среды членов порядка объемной концентрации, умноженной на квадрат скорости скольжения пузыря ( $\alpha W^2$ ), необходим. Многоскоростные эффекты для газовых пузырей сопровождаются значительной диссипацией энергии. Наибольшее увеличение скорости жидкости достигается для газовых пузырьков околоскритического размера, где относительная скорость невелика. Таким образом, воздействие мелкодисперсной среды более эффективно, чем крупных фракций. Использование горячего пара с целью увеличения импульса струи неэффективно.

Эффект образования узкой двухфазной струи может быть использован при искусственной инициации кавитации в затопленной струе.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01442).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Очеретяный С.А., Прокофьев В.В.* Иницирование кавитации путем поддува горячего пара в струю холодной жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 5. С. 91–100.
2. *Очеретяный С.А., Прокофьев В.В.* Влияние гомогенной конденсации на динамику горячего парового пузыря в струе холодной жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 6. С. 56–61.
3. *Воинов О.В., Петров А.Г.* О тензоре напряжений в жидкости с дисперсными частицами // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 2. С. 368–369.
4. *Воинов О.В., Петров А.Г.* О перемещении деформирующихся тел в идеальной жидкости из состояния покоя // Докл. АН СССР. 1973. Т. 212. № 5. С. 1036–1039.
5. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987. 464 с.
6. *Кнэпп О., Дейли Дж., Хэммит Ф.* Кавитация. М.: Мир, 1974. 687 с.
7. *Прокофьев В.В.* Задача о движении жидкости и газовых пузырьков с учетом их относительного перемещения // Изв. АН СССР. МЖГ. 1972. № 3. С. 87–96.
8. *Якимов Ю.Л.* К постановке задачи о движении малого тела в возмущенном потоке // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 5. С. 25–30.
9. *Якимов Ю.Л.* Предельные течения воды. Механика и научно-технический прогресс. М., Наука, 1987. Т. 2. С. 7–25.
10. *Левич В.Г.* Физико-химическая гидродинамика. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 539 с.
11. *Гупало Ю.П., Полянин А.Д., Рязинцев Ю.С.* Массообмен реагирующих частиц с потоком. М.: Наука, 1985. 336 с.
12. *Гарипов Р.М.* Замкнутые уравнения движения жидкости с пузырьками // ПТМФ. 1973. № 6. С. 3–24.
13. *Биркгофф Г., Сарантонелло Э.* Струи, следы и каверны. М.: Мир, 1964. 466 с.
14. *Peaceman D.W., Rachford H.H.* The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations // Journal SIAM. 1955. V. 3. № 1. P. 28–41.
15. *Флетчер К.* Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т. 1. М.: Мир, 1991. 502 с.