

УДК 532.5.013.4:536.25

© 1998 г. Г.З. ГЕРШУНИ, В.А. ДЕМИН

ТЕРМОВИБРАЦИОННАЯ КОНВЕКТИВНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ МЕХАНИЧЕСКОГО КВАЗИРАВНОВЕСИЯ НАКЛОННОГО СЛОЯ ЖИДКОСТИ

Изучается конвективная неустойчивость механического равновесия жидкости в наклонном плоском слое, возникающая под действием статического поля тяжести и высокочастотной вибрации. Обсуждаются конфигурации, соответствующие четырем направлениям равновесного градиента температуры – вертикальному, продольному, горизонтальному и поперечному – при произвольной ориентации оси вибрации. Определяются границы устойчивости и характеристики критических возмущений.

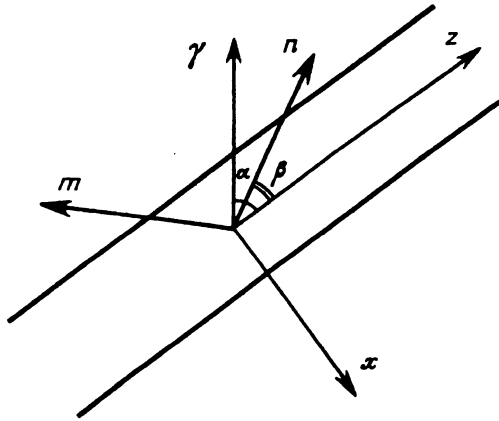
Высокочастотные колебания полости вместе с жидкостью при наличии температурной неоднородности могут вызывать регулярные осредненные течения даже в случае, когда статическое поле тяжести отсутствует – термовибрационная конвекция [1, 2]. Если период колебаний много меньше всех характерных гидродинамических времен, а амплитуда смещения в некотором смысле мала, то может быть применен метод осреднения [3], который позволяет получить замкнутую систему дифференциальных уравнений для осредненных полей скорости, температуры и давления. В теории тепловой конвекции метод осреднения был впервые развит в работе [4] для изучения влияния высокочастотной вибрации на конвективную устойчивость равновесия горизонтального слоя жидкости, подогреваемого снизу.

При определенных условиях, когда "медленная" составляющая скорости равна нулю, возможно состояние механического квазиравновесия. Устойчивость механического квазиравновесия плоского слоя жидкости при наличии поперечного градиента температуры и произвольной ориентированной оси вибрации в невесомости исследована в [1, 2]. В [5–7] анализировался случай плоского слоя в невесомости для различных взаимных ориентаций градиента температуры и оси вибрации.

В общем случае, когда существует поле тяжести, действуют два механизма возбуждения конвекции – термогравитационный и термовибрационный [8, 9].

В [10] была изучена линейная конвективная устойчивость механического квазиравновесия плоского наклонного слоя жидкости, находящегося в высокочастотном вибрационном и статическом гравитационном полях. При этом было рассмотрено четыре характерных варианта ориентации градиента температуры и, независимо от него, оси вибрации. Направление векторов могло быть вертикальным, горизонтальным, продольным и поперечным слою. Всего, таким образом, изучено 16 дискретных конфигураций. Для каждого случая взаимной ориентации градиента температуры и вектора вибрации были найдены условия квазиравновесия, решена задача устойчивости относительно произвольных плоских нормальных возмущений и найдены характеристики критических мод.

В настоящей статье, как и в [10], рассматривается наклонный неоднородно нагретый слой жидкости с твердыми границами в высокочастотном вибрационном и статическом гравитационном полях. Градиент температуры предполагается постоянным и может иметь одно из четырех направлений: вертикальное, горизонтальное,



Фиг. 1. Геометрия задачи и система координат

поперечное и продольное к слою. Однако в отличие от [10] вектор, направленный вдоль оси вибрации, ориентирован произвольным образом относительно слоя. Изучается возможность механического квазиравновесия и исследуется его линейная устойчивость.

1. Постановка задачи. Основные уравнения. Рассмотрим плоский слой жидкости с твердыми границами. Слой наклонен по отношению к вертикали под углом α . Выберем систему координат таким образом, чтобы ось x была направлена перпендикулярно слою, а ось z вдоль него (фиг. 1). В этой системе координат $\gamma(-\sin\alpha, 0, \cos\alpha)$ – единичный вектор, направленный вертикально вверх. Слой осциллирует с угловой частотой Ω и амплитудой смещения b вдоль единичного вектора $\mathbf{n}(-\sin\beta, 0, \cos\beta)$; β – угол между вектором вибрации и осью z .

При наличии статического поля тяжести и вибрации конвекция обусловлена двумя различными механизмами – термогравитационным и термовибрационным. Будем использовать для анализа систему уравнений, описывающих поведение осредненных полей скорости, температуры и давления. Эта система выводится из стандартных уравнений Буссинеска для свободной тепловой конвекции с помощью метода осреднения и может быть записана в безразмерной форме [11]

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\text{Pr}} (\nabla \nabla) \nabla = -\nabla p + \Delta \mathbf{v} + \text{Ra} T \gamma + \text{Ra}_v (\mathbf{w} \nabla)(T \mathbf{n} - \mathbf{w})$$

$$\text{Pr} \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla T = \Delta T$$

(1.1)

$$\text{div } \mathbf{v} = 0$$

$$\text{div } \mathbf{w} = 0, \quad \text{rot } \mathbf{w} = \nabla T \times \mathbf{n}$$

Здесь \mathbf{v} , T , p – осредненные поля скорости, температуры и давления – медленно меняющиеся со временем переменные; \mathbf{w} – дополнительная "медленная" переменная, пропорциональная амплитуде осцилляционной компоненты скорости. В уравнения входят три безразмерных параметра: число Рэлея, вибрационный аналог числа Рэлея и число Прандтля

$$\text{Ra} = \frac{g \epsilon A h^4}{\nu \chi}, \quad \text{Ra}_v = \frac{(\epsilon \Omega b A h^2)^2}{2 \nu \chi}, \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{\chi}$$

Здесь ν , χ , ϵ – соответственно коэффициенты кинематической вязкости, температуропроводности, теплового расширения; h – полутолщина слоя; A – характерный

градиент температуры; g – величина ускорения свободного падения. Дополнительными параметрами задачи являются угол наклона слоя α и угол β , характеризующий направление оси вибрации. Граничные условия для скоростей таковы: $\mathbf{v} = 0$, $w_x = 0$ ($x = \pm 1$). Для температуры граничные условия будут сформулированы ниже.

2. Состояние квазиравновесия. При определенных условиях в жидкости возможно квазиравновесие, т.е. такое состояние, когда средняя скорость \mathbf{v} равна нулю, а пульсационная компонента скорости \mathbf{w} , вообще говоря, отлична от нуля. Положим в уравнениях (1.1) $\partial/\partial t = 0$, $\mathbf{v} = 0$, $p = p_0$, $T = T_0$, $\mathbf{w} = \mathbf{w}_0$ и исключим давление, выделив градиентную часть из вибрационной силы в уравнении Навье–Стокса системы (1.1). Таким образом, получим необходимые условия существования квазиравновесия

$$\text{Ra}[\nabla T_0 \times \boldsymbol{\gamma}] + \text{Ra}_v \nabla(\mathbf{w}_0 \mathbf{n}) \times \nabla T_0 = 0 \quad (2.1)$$

$$\Delta T_0 = 0 \quad (2.2)$$

$$\text{div } \mathbf{w}_0 = 0, \quad \text{rot } \mathbf{w}_0 = \nabla T_0 \times \mathbf{n} \quad (2.3)$$

где T_0 , \mathbf{w}_0 – равновесные безразмерные поля температуры и пульсационной компоненты скорости. Далее будем рассматривать специальный случай, когда равновесный градиент температуры ∇T_0 постоянен, т.е. $\nabla T_0 = \mathbf{m}$. Уравнения (1.1) обезразмерены так, чтобы вектор $\mathbf{m}(m_x, 0, m_z)$ был единичным. Уравнение Лапласа (2.2) при этом удовлетворится тождественно. С помощью (2.3) можно определить пульсационную компоненту скорости. Предположим, что векторное поле \mathbf{w}_0 имеет только продольную компоненту, т.е. $\mathbf{w}_0(0, 0, w_0)$, где $w_0 = w_0(x)$. В этом случае поле \mathbf{w}_0 соленоидально и соответствует граничным условиям: $w_{0x} = 0$ ($x = \pm 1$). При этом профиль $w_0(x)$ удовлетворяет условию замкнутости

$$w_0(x) = (m_x n_z - m_z n_x) x \quad (2.4)$$

Подставив (2.4) в (2.1), запишем "уравнение гидростатики"

$$\text{Ra}(m_z \sin \alpha + m_x \cos \alpha) + \text{Ra}_v (m_x n_z - m_z n_x) m_z n_z = 0 \quad (2.5)$$

Рассмотрим четыре характерных направления вектора \mathbf{m} : горизонтальное, поперечное, продольное и вертикальное. Угол наклона слоя и ориентация вектора \mathbf{n} произвольны. Цель заключается в том, чтобы ответить на вопрос – существует механическое квазиравновесие при определенной ориентации вектора \mathbf{m} или нет? Если квазиравновесие имеет место, то возникает задача его устойчивости относительно малых возмущений.

3. Формулировка задачи устойчивости. Внесем в равновесие малые возмущения \mathbf{v} , T' , p' , \mathbf{w}'

$$\mathbf{v}, T = T_0 + T', \quad p = p_0 + p', \quad \mathbf{w} = \mathbf{w}_0 + \mathbf{w}'$$

Ограничимся рассмотрением двумерных возмущений, имеющих следующую структуру: $\mathbf{v}(v_x, 0, v_z)$, $\mathbf{w}'(w'_x, 0, w'_z)$, $\partial/\partial y = 0$. Введем функции тока ψ , F для соленоидальных полей \mathbf{v} и \mathbf{w}' соответственно

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v_z = -\frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad w'_x = \frac{\partial F}{\partial z}, \quad w'_z = -\frac{\partial F}{\partial x}$$

Линеаризованную систему уравнений для возмущений в терминах ψ , F и T' запишем в форме

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi = \Delta^2 \psi + \text{Ra} \left(\gamma_x \frac{\partial T'}{\partial z} - \gamma_z \frac{\partial T'}{\partial x} \right) + \text{Ra}_v \left[m_z n_z \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \right.$$

$$-n_z(m_x n_z - m_z n_x) \frac{\partial T'}{\partial z} + m_x n_x \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - (m_x n_z + m_z n_x) \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \quad (3.1)$$

$$\text{Pr} \frac{\partial T'}{\partial t} + \left(m_x \frac{\partial \Psi}{\partial z} - m_z \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) = \Delta T'$$

$$\Delta F = n_x \frac{\partial T'}{\partial z} - n_z \frac{\partial T'}{\partial x}$$

Границы слоя предполагаются твердыми и идеально теплопроводными

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \quad T' = 0 \quad (x = \pm 1)$$

Будем искать решение системы (3.1) в виде нормальных мод

$$(F, \Psi, T') = (f(x), \varphi(x), \vartheta(x)) \exp(-\lambda t + ikz) \quad (3.2)$$

где $f(x)$, $\varphi(x)$ и $\vartheta(x)$ – амплитуды, k – волновое число и λ – декремент. Подставляя (3.2) в уравнения (3.1), получим спектральную задачу

$$\begin{aligned} -\lambda D\varphi &= D^2\varphi - \text{Ra}(ik\vartheta \sin \alpha + \vartheta' \cos \alpha) - \text{Ra}_v [ikn_z(m_x n_z - \\ &- m_z n_x)\vartheta - m_z n_z f'' + k^2 m_x n_x f + ik(m_x n_z + m_z n_x) f'] \\ -\lambda \text{Pr} \vartheta + (ikm_x \varphi - m_z \varphi') &= D\vartheta \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$Df = ikn_x \vartheta - n_z \vartheta', \quad D = d^2 / dx^2 - k^2$$

$$x = \pm 1: \quad \varphi = \varphi' = 0, \quad f = 0, \quad \vartheta = 0$$

Штрих означает дифференцирование по x . Роль собственного числа играет декремент λ . Когда декремент веществен, граница устойчивости определяется условием $\lambda = 0$. Если $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$, то граница устойчивости может быть определена из условия $\lambda_r = 0$; λ_i при этом есть нейтральная частота осциллирующего возмущения.

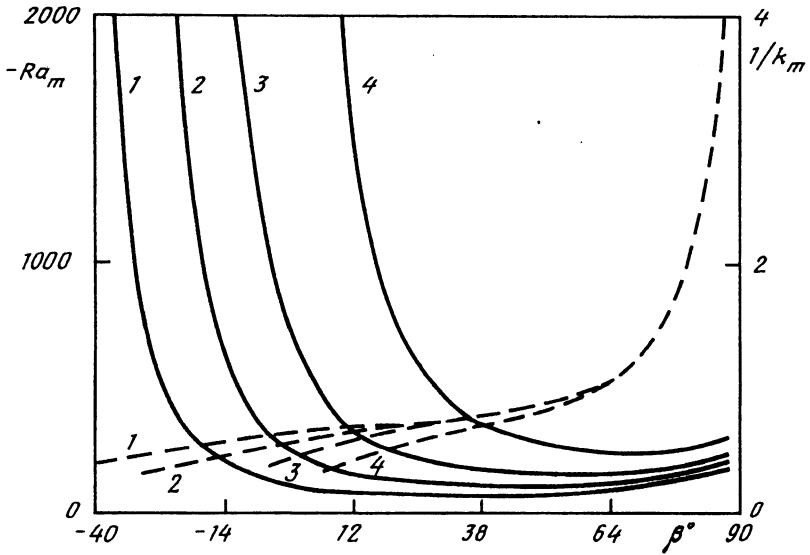
4. Результаты и обсуждение. *Горизонтальный градиент температуры.* В этом случае $m_x = \cos \alpha$, $m_z = \sin \alpha$. Направление оси вибрации, характеризуемое углом β , и угол наклона слоя α произвольны. Условие гидростатики (2.6) приводит к выражению

$$\text{Ra} + \text{Ra}_v \cos(\alpha - \beta) \sin \alpha \cos \beta = 0 \quad (4.1)$$

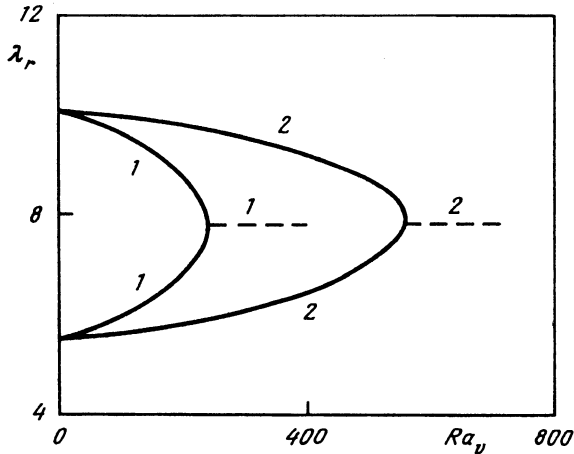
Квазиравновесие в статическом поле тяжести ($\text{Ra} \neq 0$) возможно при произвольном направлении оси вибрации. При $\beta = 90^\circ$, $\beta = \alpha - 90^\circ$ и $\alpha = 0^\circ$ равновесие возможно только в невесомости.

Исследование на устойчивость квазиравновесия при горизонтальном градиенте температуры производится на основе амплитудных уравнений (3.3) совместно с соотношением (4.1). При решении амплитудной задачи применялся метод Рунге–Кутты–Фельдберга совместно с процедурой пристрелки. Для нескольких углов наклона слоя графики критических чисел Рэлея Ra_m (минимизированных по k) в зависимости от β показаны на фиг. 2 – сплошные кривые. Тут же помещены обратные значения критического волнового числа $1/k_m$ как функции β – штриховые кривые. Из рисунка видно, что для всех допустимых значений β наиболее опасны ячеистые возмущения с $k_m \neq 0$. Критические числа Рэлея Ra_m с уменьшением β неограниченно растут: при определенном значении $\beta = \beta_c$ наступает стабилизация. В области $\beta < \beta_c$ равновесие становится абсолютно устойчивым ($\lambda_r > 0$).

Фрагмент спектра декрементов в области $\beta < \beta_c$, полученный методом Галеркина, представлен на фиг. 3 для $\text{Pr} = 0,5$, $k = 0,5$. По мере увеличения Ra_v происходит слияние монотонных ветвей с образованием пар осциллирующих ветвей. Таким



Фиг. 2. Горизонтальный градиент температуры. Критические параметры неустойчивости в зависимости β^* ; кривые 1-4 соответствуют $\alpha = 30; 40; 50; 63^\circ$; Ra_m - сплошные, $1/k_m$ - штриховые линии

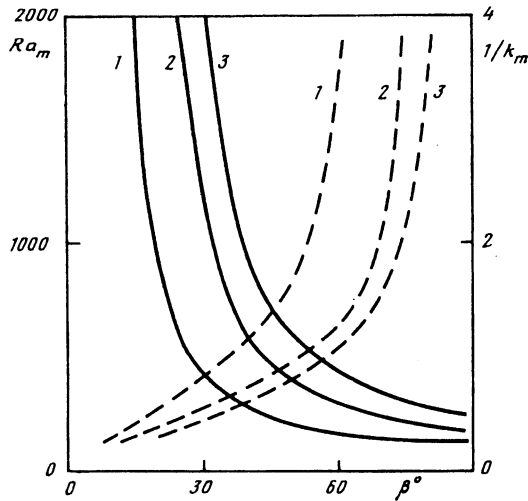


Фиг. 3. Фрагмент спектра декрементов в случае горизонтального градиента температуры для $Pr = 0,5, k = 0,5$; 1 - $\alpha = 70^\circ, \beta = -40^\circ$; 2 - $\alpha = 70^\circ, \beta = -80^\circ$

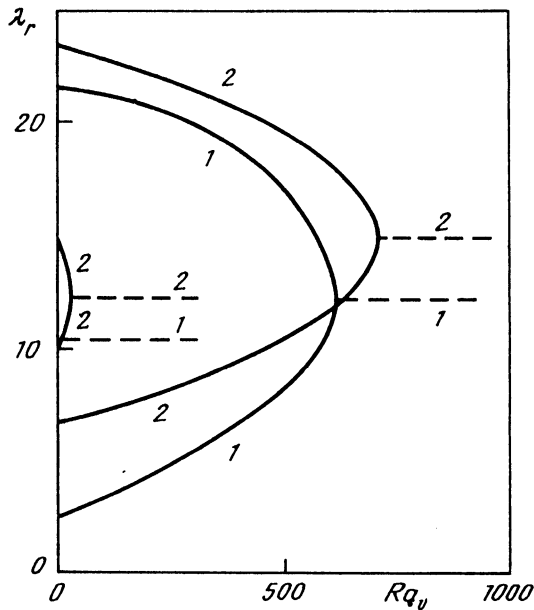
образом, в области больших Ra_v спектр состоит из затухающих колебательных мод. Фигуры 2 и 3 соответствуют углам β , лежащим в интервале $-90^\circ < \beta < 90^\circ$. Уравнения симметричны относительно замены n на $-n$, поэтому результаты для углов β и $\beta + 180^\circ$ совпадают.

Вертикальный градиент температуры. Имеем $m_x = \sin\alpha, m_z = -\cos\alpha$. Угол наклона слоя изменяется в пределах $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$. Уравнение (2.6) приобретает форму

$$Ra_v \sin(\alpha - \beta) \cos\alpha \cos\beta = 0 \quad (4.2)$$



Фиг. 4. Продольный градиент температуры. Критические параметры неустойчивости в зависимости от β^* ; кривые 1-3 соответствуют $\alpha = 30; 50; 60^\circ$; Ra_m – сплошные, $1/k_m$ – штриховые кривые



Фиг. 5. Фрагмент спектра декрементов в случае продольного градиента температуры для $Pg = 1$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = -30^\circ$; кривые 1, 2 соответствуют $k = 0; 2$

Когда вибрация отсутствует ($Ra_v = 0$), задача сводится к исследованию устойчивости равновесия наклонного слоя жидкости, находящегося в статическом поле тяжести [12]. В вертикальном слое порог конвекции связан с эволюцией длинноволновых возмущений. Если угол наклона мал ($\alpha < \alpha_c$, где α_c – критический угол, равный 20°), длинноволновая мода остается наиболее опасной. В случае, когда α

превосходит критическое значение α_c , наступает переход к неустойчивости по отношению к ячеистым возмущениям. В пределе $\alpha \rightarrow 90^\circ$ имеет место классическая задача Рэля–Бенара об устойчивости плоского горизонтального слоя, подогреваемого снизу.

Рассмотрим теперь влияние высокочастотных вибраций на устойчивость квазиравновесия ($Ra_v \neq 0$). Условие (4.2) выполняется, во-первых, когда $n_z = 0$ (ось вибрации поперечна); во-вторых, когда $n_x = -\sin\alpha$, $n_z = \cos\alpha$ (вертикальная вибрация). Эти задачи решены. В обоих случаях специфический термовибрационный механизм возбуждения не действует. Влияние высокочастотной вибрации является только стабилизирующим. Результаты численных расчетов приведены в [10].

Продольный градиент температуры. Здесь $m_x = 0$, $m_z = -1$. Как и в случае горизонтального градиента температуры, ситуация с $\alpha = 0^\circ$ требует отдельного рассмотрения. Если $\alpha = 0$, $Ra_v = 0$, слой вертикален и вибрация отсутствует. Условие (2.6) выполняется тождественно при любом Ra , так что в жидкости имеет место равновесие. Термогравитационная конвективная устойчивость равновесия в вертикальных каналах (в том числе и в плоском слое) хорошо исследована. Результаты этих исследований подробно изложены в [12]. Возможен другой вариант: $Ra = 0$ (невесомость). Тут квазиравновесие реализуется, если ось вибрации параллельна слою или перпендикулярна ему. Эта конфигурация изучена в [5].

Таким образом, $0 < \alpha \leq 90^\circ$. Условие (2.6) принимает вид

$$Ra \sin\alpha - Ra_v \sin\beta \cos\beta = 0 \quad (4.3)$$

Пусть $Ra \neq 0$. Соотношение (4.3) удовлетворяется, когда $\beta \neq 0$ и 90° (эти углы соответствуют продольному и поперечному направлениям вектора вибрации). Расчеты устойчивости дают следующие результаты: для углов β , где существует граница устойчивости, есть интервал углов, в котором кризис равновесия обусловлен плоскопараллельными движениями ($90^\circ > \beta > \beta_{1c}$). С уменьшением β (при $\beta = \beta_{1c}$) происходит смена формы неустойчивости, наиболее опасными становятся возмущения с волновым числом, не равным нулю. Результаты расчетов приведены на фиг. 4. При дальнейшем уменьшении β критические числа Рэля неограниченно растут и при некотором угле $\beta = \beta_{2c}$ равновесие становится абсолютно устойчивым. Фрагмент спектра декрементов в области абсолютной устойчивости ($-90^\circ < \beta < \beta_{2c}$) приведен на фиг. 5 для $Pr = 1$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = -30^\circ$ (четыре нижних уровня спектра). Кривые $1 - k = 0$, кривые $2 - k = 2$. При малых Ra_v возмущения затухают монотонно. При больших Ra_v спектр состоит из осциллирующих затухающих возмущений.

Поперечный градиент температуры. Теперь рассмотрим конфигурацию, при которой $m_x = 1$, $m_z = 0$. Условие (2.6) вырождается в

$$Ra \cos\alpha = 0 \quad (4.4)$$

Первый корень этого уравнения $Ra = 0$ соответствует состоянию невесомости. При этом границы слоя поддерживаются при постоянных разных температурах, а ось вибрации ориентирована произвольным образом. Эта задача решена в [2].

Второй корень уравнения (4.4) $\alpha = 90^\circ$, соответствующий горизонтальному слою жидкости с поперечным градиентом температуры, означает, что параметры Ra , Ra_v и направление вектора \mathbf{n} произвольны. Этот случай обсуждался в [8]. В [10] приведены кривые устойчивости для разных значений угла наклона оси вибрации к горизонтали на плоскости (Ra, Ra_v) .

Заключение. Рассмотрена конвективная неустойчивость механического квазиравновесия наклонного слоя жидкости, находящегося в статическом гравитационном и высокочастотном вибрационном полях. Слой нагревался так, что градиент температуры мог быть вертикальным, горизонтальным, поперечным и продольным слою. Ось вибрации была направлена произвольным образом относительно слоя. Для каждого случая в области параметров, где существует граница устойчивости, найдены

характеристики критических возмущений. Там, где квазиравновесие абсолютно устойчиво, найдены нижние уровни спектра декрементов.

Это исследование проводилось при частичной поддержке РКА-НАСА (контракт 920/18-5208/96).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. О свободной тепловой конвекции в вибрационном поле в условиях невесомости // Докл. АН СССР. 1979. Т. 249. № 3. С. 580–584.
2. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. О конвективной неустойчивости жидкости в вибрационном поле в невесомости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 4. С. 12–19.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 1. Механика. М.: Наука. 1988. 215 с.
4. Зеньковская С.М., Симоненко И.Б. О влиянии вибрации высокой частоты на возникновение конвекции // Изв. АН СССР. МЖГ. 1966. № 5. С. 51–55.
5. Браверман Л.М. К вопросу о вибрационно-конвективной неустойчивости плоского слоя жидкости в невесомости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 6. С. 178–180.
6. Браверман Л.М. О некоторых типах вибрационно-конвективной неустойчивости плоского слоя жидкости в невесомости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 5. С. 4–7.
7. Браверман Л.М. О вибрационно-конвективной неустойчивости плоского слоя жидкости в невесомости // Динамика вязкой жидкости. Свердловск: УрО АН СССР, 1987. С. 29–35.
8. Браверман Л.М., Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. и др. Новые результаты исследования вибрационно-конвективной неустойчивости // Тез. докл. 3-го Всесоюз. семинара по гидромеханике и тепломассообмену в невесомости. Черногловка: ОИХФ АН СССР, 1984. С. 11–13.
9. Заварыкин М.П., Зорин С.В., Путин Г.Ф. О термоконвективной неустойчивости в вибрационном поле // Докл. АН СССР. 1988. Т. 299. № 2. С. 309–312.
10. Demin V.A., Gershuni G.Z., Verkholantsev I.V. Mechanical quasi-equilibrium and thermovibrational convective instability in an inclined fluid layer // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 1996. V. 39. № 9. P. 1979–1991.
11. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А. Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989. 318 с.
12. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.

Пермь

Поступила в редакцию
10.VII.1996