

УДК 532.526.4:532.525

© 1998 г. В.Г. ЛУШИК, А.Е. ЯКУБЕНКО

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ДЛЯ РАСЧЕТА ПРИСТЕННОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Рассмотрены интегральные соотношения, алгебраическая и группа дифференциальных моделей турбулентности, получивших распространение в практике научных и прикладных исследований пограничного слоя. Выполнен анализ дифференциальных моделей турбулентности для развитого течения несжимаемой жидкости в круглой трубе в трех областях: вязком подслое, логарифмическом слое и ядре потока. Проведено сравнение результатов расчета с аналитическими и экспериментальными зависимостями. Представлены результаты численного исследования пограничного слоя в сопле жидкостного ракетного двигателя (ЖРД), где существенными являются эффекты сжимаемости, влияние температурного фактора и ускорения потока. Сделаны рекомендации о применимости рассмотренных моделей турбулентности.

В последнее время в инженерной практике расчетов турбулентных пограничных слоев наряду с традиционными интегральными и алгебраическими методами все большее распространение получают методы, базирующиеся на дифференциальных моделях турбулентности, в основе которых лежат идеи А.Н. Колмогорова [1], связанные с использованием уравнений переноса для характеристик турбулентности.

Обзору дифференциальных моделей турбулентности посвящен ряд работ, список которых содержится в [2]. В большинстве работ представлены аналитические обзоры моделей, не содержащие результатов численного исследования на примере какого-либо течения, расчет которого выполнен по рассматриваемым моделям в рамках одной программы расчета. Исключение составляет обзор [3], в котором проанализировано восемь двухпараметрических моделей турбулентности и с использованием их проведен расчет турбулентного пограничного слоя с нулевым и положительным градиентом давления. Проведенное в [3] численное исследование позволило рекомендовать для использования ряд моделей, которые продемонстрировали удовлетворительное совпадение с экспериментом. Ограниченность обзора [3] в том, что в нем рассмотрены только двухпараметрические модели, а в качестве теста выбран пограничный слой в несжимаемой жидкости.

Целью настоящей работы является расширение круга моделей, которые используются в расчетах в настоящее время, и сравнение их на тестовой задаче, в качестве которой выбран турбулентный пограничный слой в сопле ЖРД. Такой выбор обусловлен не только интересами авторов, но и тем обстоятельством, что эта задача представляет собой комплексный тест, в котором существенными являются эффекты сжимаемости, обусловленные большими значениями величин теплового потока в стенку, числа Маха потока и разности температур стенки сопла и газа, а также имеется значительный отрицательный градиент давления.

1. Постановка задачи. Для расчета течения и теплообмена в сжимаемом турбулентном пограничном слое однородного газа с заданным градиентом давления используются уравнения неразрывности, движения и энергии, которые для стационарного осесимметричного случая имеют вид [4]

$$\frac{\partial r\rho u}{\partial x} + \frac{\partial r\rho v}{\partial y} = 0$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} \left[r \left(\eta \frac{\partial u}{\partial y} + \rho\tau \right) \right], \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

$$\rho u \frac{\partial I}{\partial x} + \rho v \frac{\partial I}{\partial y} = u \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} \left[r \left(\frac{\eta}{Pr} \frac{\partial I}{\partial y} - \rho q_t \right) \right] + \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + Q_E$$

Здесь x – направление вдоль стенки канала, y – нормальная координата, отсчитываемая от стенки, r – расстояние от оси симметрии канала до рассматриваемой точки пограничного слоя (в случае сопла $r = r_w - \cos\alpha$, где r_w – текущий радиус стенки сопла, α – угол между касательной к стенке и осью симметрии); u и v – компоненты скорости вдоль осей x и y соответственно, I – статическая энтальпия газа, p – статическое давление; ρ – плотность, η – динамическая вязкость газа, Pr – молекулярное число Прандтля.

В уравнения движения и энергии системы (1.1) входят: $\rho\tau = -\rho\langle u'v' \rangle$ – турбулентное трение, $\rho q_t = \rho\langle v'I' \rangle$ – турбулентный поток тепла, Q_E – приток тепла за счет диссипации турбулентных пульсаций скорости. В случае использования уравнения переноса энергии турбулентности Q_E равен диссипативному члену в этом уравнении, в других случаях Q_E принимается равным порождению энергии турбулентности $\tau du/du$, что справедливо для равновесного пограничного слоя.

Для определения турбулентного потока тепла ρq_t , входящего в уравнение энергии системы (1.1), используется гипотеза, основанная на введении постоянного по толщине пограничного слоя турбулентного числа Прандтля Pr_t вида

$$q_t = -\frac{1}{Pr_t} \frac{\tau}{\rho} \frac{\partial I}{\partial y} \quad (Pr_t = 0,85) \quad (1.2)$$

Входящие в уравнения (1.1) теплофизические свойства (ρ , η , I) должны быть заданы в зависимости от температуры T и давления p газа. Для определения плотности используется уравнение состояния вида $p = \rho RT/\mu$, где R – универсальная газовая постоянная, μ – молярная масса газа. Для определения динамической вязкости газа использовалась степенная зависимость от температуры $\eta = \eta_0(T/T_0)^m$. Зависимость η от давления не учитывалась, поскольку динамическая вязкость газов слабо зависит от давления. Связь между энтальпией I и температурой T газа задавалась в табличном виде.

Градиент давления $\partial p/\partial x$ при течении в сопле вычисляется по распределению числа Маха $M_w(x)$ вдоль стенки, которое в дозвуковой части сопла определяется по одномерной теории, а в сверхзвуковой – из решения газодинамической задачи о двумерном течении идеального газа в сопле заданной геометрии $r_w(x)$.

Граничные условия при решении системы (1.1) на стенке ($y = 0$) и на внешней границе пограничного слоя ($y = \delta$) имеют вид

$$u = \rho v = 0, \quad T = T_w(x) \quad \text{или} \quad -\left(\frac{\eta}{Pr} \frac{\partial I}{\partial y} \right)_w = Q_w(x) \quad (y = 0) \quad (1.3)$$

$$u = u_e, \quad I = I_e \quad (y = \delta)$$

Здесь и далее индекс w относится к значению соответствующих величин на стенке, e – на границе пограничного слоя (в ядре потока).

Для того чтобы система уравнений (1.1) была замкнутой, помимо связи для турбулентного потока тепла ρq_t (1.2), необходимо определить величину турбулентного

трения $\rho\tau$. Это составляет задачу разработки многочисленных моделей турбулентности, сравнению наиболее употребительных из которых посвящена настоящая работа.

2. Расчетные модели. Для сравнительного анализа выбраны не только двухпараметрические модели, рекомендованные в [3], но и одно- и трехпараметрические дифференциальные модели, рассмотренные в [2, 5], а также алгебраическая модель турбулентности и интегральный метод расчета, используемый в инженерной практике расчетов турбулентного пограничного слоя в соплах ЖРД.

Интегральные соотношения. Одним из наиболее распространенных интегральных методов расчета турбулентного пограничного слоя является метод работы [6], в котором используются интегральные уравнения импульса и энергии, записанные для сжимаемого газа. Для замыкания уравнений привлекаются законы трения и теплообмена, связывающие локальные параметры потока и пограничного слоя с напряжением трения и тепловым потоком на стенке. Эти законы получены из анализа экспериментов для турбулентного пограничного слоя на гладкой пластине при отрицательных и небольших положительных градиентах давления.

В [7] методика расчета [6] была модернизирована путем уточнения законов трения и теплообмена на основе новых экспериментальных данных. Проведенное в [7] сравнение с экспериментами в широком диапазоне чисел Рейнольдса, Маха и температурного фактора и результатами анализа данных натуральных испытаний двигателей подтвердили работоспособность методики [6, 7] для расчета турбулентного пограничного слоя в соплах ЖРД. Это послужило основанием для выбора ее при проведении сравнительного анализа различных моделей турбулентности.

Алгебраическая модель турбулентности. Алгебраические модели турбулентности, широко используемые в инженерной практике, как и интегральные методы расчета, базируются на гипотезе Буссинеска, использующей понятие турбулентной вязкости ν_t , через которую выражается турбулентное трение в пограничном слое

$$\rho\tau = \rho\nu_t \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.1)$$

Из множества соотношений для ν_t , предложенных к настоящему времени, воспользуемся формулами Себиси и Смита [8], которые проверены для широкого класса течений, исследованных экспериментально, и используются для решения многих инженерных задач.

Согласно [8], турбулентный пограничный слой считается состоящим из внутренней и внешней областей, коэффициент турбулентной вязкости в которых описывается соотношениями

$$\nu_t = l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \quad (0 \leq y \leq y_c), \quad \nu_t = \alpha \left| \int_0^\infty (u_e - u) dy \right| \quad (y_c < y \leq \delta) \quad (2.2)$$

Здесь l – длина пути перемешивания, y_c – граница между внутренней и внешней областями пограничного слоя, определяемая из условий непрерывности коэффициента турбулентной вязкости, α – функция числа Рейнольдса $Re_\theta = \rho_e u_e \theta / \eta_e$, определенного по толщине потери импульса θ .

Для сжимаемого пограничного слоя входящие в выражения для ν_t функции и константы имеют вид [8]

$$l = 0,4y \left[1 - \exp\left(-\frac{y_+}{A}\right) \right], \quad A = \frac{26}{N} \left(\frac{\rho}{\rho_w} \right)^{1/2}, \quad N = \left(1 - 11,8 \frac{\eta_w \rho_e^2}{\eta_e \rho_w^2} p_+ \right)^{1/2}$$

$$y_+ = \frac{\rho y u_*}{\eta}, \quad u_* = \left(\frac{\eta}{\rho} \frac{\partial u}{\partial y} \right)_w^{1/2}, \quad p_+ = \frac{\eta_e u_e}{\rho_e u_*^3} \frac{du_e}{dx}, \quad \alpha = 0,0168 \frac{1,55}{1 + \Pi} \quad (2.3)$$

$$\Pi = 0,55[1 - \exp(-0,243\sqrt{z_1} - 0,298z_1)], \quad z_1 = \text{Re}_\theta / 425 - 1, \quad \text{Re}_\theta > 425$$

Отметим, что введение коэффициента перемежаемости в зависимость для v_t (2.2), предложенное в [8], практически не сказалось на результатах расчета пограничного слоя в сопле, поэтому при использовании этой модели турбулентности в аналогичных расчетах можно его не учитывать.

Однопараметрическая модель турбулентности. Однопараметрические модели принадлежат к классу дифференциальных моделей, в которых для характеристик турбулентности используются уравнения переноса. К настоящему времени разработаны однопараметрические модели (см. в [2–5]), в которых уравнения переноса записаны либо непосредственно для турбулентного трения, либо для энергии турбулентности, через которую определяется турбулентная вязкость. Однако наиболее употребительна, по крайней мере среди отечественных пользователей, модель для турбулентной вязкости [9], уравнение переноса для которой имеет вид

$$\rho u \frac{\partial v_t}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v_t}{\partial y} = \alpha \eta_t \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| - \gamma \frac{v_t (\eta + \beta \eta_t)}{y^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} \left[r (\eta + \kappa \eta_t) \frac{\partial v_t}{\partial y} \right] \quad (2.4)$$

Константы β , γ , κ и функция α в (2.4), уточненные в последующих работах автора модели [9], имеют вид

$$\alpha = 0,2 \frac{z^2 + 1,4z + 0,2}{z^2 - 1,4z + 1,0} \left(z = \frac{\eta_t}{8\eta}, \quad \eta_t = \rho v_t \right), \quad \beta = 0,06, \quad \gamma = 50, \quad \kappa = 2$$

Граничные условия в расчетах с уравнением для v_t (2.4)

$$v_t = 0 \quad (y = 0), \quad v_t = v_{te} \quad (y = \delta)$$

Двухпараметрические модели турбулентности. Модели турбулентности, в которых для определения характеристик турбулентности используются два уравнения переноса, называются двухпараметрическими (см. в [2, 5]). Большая часть таких моделей содержит уравнение переноса для энергии турбулентности E и уравнение для функции $F = E^m L^n$ (L – поперечный интегральный масштаб турбулентности), либо для величины диссипации турбулентной энергии ϵ , входящей в уравнение переноса для E .

Наиболее популярными из класса двухпараметрических моделей являются (E, ϵ) -модели, в которых уравнение переноса записывается не для полной диссипации ϵ , а для величины $\epsilon_t = \epsilon - \epsilon_v$, которая называется изотропной частью диссипации энергии турбулентности и в [1] представляется как $\epsilon_t = E^{3/2} / L$.

По результатам проведенного численного исследования ряда (E, ϵ) -моделей в [3] рекомендуются для использования две из них: модель [10] и [11]. Из рассмотренных в [3] двухпараметрических моделей кроме упомянутых (E, ϵ) -моделей [10, 11] рекомендуется для использования также (E, ω^2) -модель [12], в которой второе уравнение переноса записано для величины $\omega^2 = E/L^2$ – квадрата "частоты" турбулентности, введенной А.Н. Колмогоровым [1]. К этому же классу моделей относится и (E, ω) -модель [13], в которой уравнение переноса записано непосредственно для величины $\omega = \sqrt{E/L}$. Детальный анализ моделей [10–12] содержится в [3].

Уравнения переноса для энергии турбулентности E и функции $F = E^m L^n$ в двухпараметрических моделях [10–13] представим в виде

$$\rho u \frac{\partial E}{\partial x} + \rho v \frac{\partial E}{\partial y} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} \left[r (\eta + a_E f_1 \rho \sqrt{EL}) \frac{\partial E}{\partial y} \right] + \rho \tau \frac{\partial u}{\partial y} - c \rho \frac{E^{3/2}}{L} - c_1 f_2 \eta \frac{E}{L^2} \quad (2.5)$$

$$\rho u \frac{\partial F}{\partial x} + \rho v \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} \left[r (\alpha_F \eta + a_F f_1 \rho \sqrt{EL}) \frac{\partial F}{\partial y} \right] +$$

$$+b_F \rho \left(\frac{\tau}{E} + c_F \right) F \frac{\partial u}{\partial y} - d_F f_3 \rho \frac{\sqrt{E}}{L} F - e_F f_4 \eta \frac{F}{L^2} \quad (2.6)$$

Для определения турбулентной вязкости ν_t , входящей в выражение для турбулентного трения τ_t (2.1), в двухпараметрических моделях используется зависимость [1]

$$\nu_t = c_v f_v \sqrt{EL} \quad (2.7)$$

Константы и эмпирические функции для моделей [10–13] представлены в табл. 1. Здесь $Re_t = \rho \sqrt{EL} / \eta$ – турбулентное число Рейнольдса, y – расстояние от стенки, y_+ – универсальная координата, u_* – скорость трения (2.3).

Достоинство (E, ω) -модели [13] по сравнению с моделями [10–12] (табл. 1) то, что она не содержит эмпирических функций.

Граничные условия в расчетах с (E, ε) -моделями [10, 11] и (E, ω) -моделями [12, 13] соответственно имеют вид

$$E = \varepsilon_t = 0 \quad (y = 0), \quad E = E_e, \quad \varepsilon_t = \varepsilon_{te} \quad (y = \delta)$$

$$E = 0 \quad (y = 0), \quad \omega = \omega_1 \quad (y = y_1), \quad E = E_e, \quad \omega = \omega_e \quad (y = \delta)$$

Граничное условие для ω задается не на стенке (при $y = 0$), а в ближайшей к ней расчетной точке $y = y_1$. Это связано с тем, что величина ω на стенке обращается в

Таблица 1

Параметр	Модель				
	[10]	[11]	[12]	[13]	[14]
F	$\frac{E^{3/2}}{L} = \varepsilon_t$	ε_t	$\frac{E}{L^2} = \omega$	ω	ω^2
L	$\frac{E^{3/2}}{\varepsilon_t}$	$\frac{E^{3/2}}{\varepsilon_t}$	$\frac{\sqrt{E}}{\omega}$	$\frac{\sqrt{E}}{\omega}$	$\frac{\sqrt{E}}{\omega}$
a_E	0,09	0,09	0,5	0,5	0,06
f_1	$\exp\left[\frac{-3,4}{(1 + Re_t/50)^2}\right]$	$1 - \frac{1}{\exp(0,0115y_+)}$	$1 - \frac{0,992}{\exp(Re_t)}$	1	1
c	1	1	0,09	0,09	0,3
c_1	2	2	0	0	$5\pi/4$
f_2	$\frac{L^2}{E} \left(\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial y} \right)^2$	$\left(\frac{L}{y} \right)^2$	0	0	1
α_F	1	1	1	1	1,4
a_F	0,069	0,069	0,5	0,5	0,06
b_F	1,44	1,35	1,11	0,56	1
c_F	0	0	0	0	0,08
d_F	1,92	1,8	0,15	0,075	$2c$
f_3	$1 - \frac{0,3}{\exp(Re_t^2)}$	$1 - \frac{0,22}{\exp(Re_t^2/36)}$	$1 + \frac{1}{d_F} \left(\frac{\partial L}{\partial y} \right)^2$	1	1
e_F	2	2	0	0	$\alpha_F c_1$
f_4	$c_v f_v \frac{L^4}{E} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2$	$\left(\frac{L}{y} \right)^2 \exp\left(-\frac{y_+}{2}\right)$	0	0	$1 - \left(\frac{\omega_w}{\omega} \right)^2$
c_v	0,09	0,09	1	1	–
f_v	f_1	f_1	f_1	f_1	–

бесконечность, что следует из решения уравнения (2.6) для $F = \omega^s$ ($s = 1$ или 2). Действительно, приравнивая вязкий диффузионный и диссипативный члены и пренебрегая кривизной поверхности, имеем $\eta(\omega^s)'' = d_F \rho \omega^{s+1}$. Полагая $\omega = \omega_0 y^k$, получаем, что $k = -2$, $\omega_0 = 2s(2s + 1)\eta/d_F \rho$.

Трехпараметрическая модель турбулентности. В трехпараметрических моделях (см. [2, 5]) уравнения переноса записываются для трех характеристик турбулентности E , $F = E^m L^n$ и $\tau = -\langle u'v' \rangle$. Преимущество этих моделей по сравнению с двухпараметрическими состоит в том, что в них не используется понятие турбулентной вязкости ν , и отсутствуют ограничения, связанные с алгебраическим (равновесным) характером гипотезы Буссинеска (2.1).

Наиболее разработанной в классе трехпараметрических моделей представляется (E, F, τ) -модель [14], в которой уравнение переноса для параметра $F = E^m L^n$ представлено для трех комбинаций степеней m и n : \sqrt{E}/L ($m = 1/2, n = -1$), E/L^2 ($m = 1, n = -2$) и $E^{3/2}/L$ ($m = 3/2, n = -1$). Эти комбинации соответствуют использованным в двухпараметрических моделях турбулентности величинам ω , ω^2 , ϵ_r .

Уравнение переноса для $F = E^m L^n$, полученное в [14], имеет вид

$$\rho u \frac{\partial F}{\partial x} + \rho v \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} \left[r(\alpha_F \eta + a_F \rho \sqrt{EL}) \frac{\partial F}{\partial y} \right] + m \rho \left[\frac{\tau}{E} - \frac{n}{m} c_4 \operatorname{sign} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] F \frac{\partial u}{\partial y} - \left(m - \frac{n}{2} \right) c \rho \frac{\sqrt{E}}{L} F - \left(m - \frac{n}{5} \right) c_1 \eta \frac{F}{L^2}, \quad c_4 = 0,04 \quad (2.8)$$

Структура уравнения (2.8) аналогична соответствующим уравнениям для ϵ_r , ω , ω^2 (2.6), за исключением некоторых особенностей, на которых остановимся подробнее. Константа α_F в члене с вязкой диффузией уравнений (2.6), (2.8) определена в [14] из анализа поведения функции F вблизи стенки и составляет $\alpha_F = m - n/5$ в отличие от двухпараметрических моделей [10–13], где $\alpha_F = 1$. Кроме того, в моделях [10–13] в члене с генерацией функции F уравнения (2.6) отсутствует линейная часть, содержащая константу c_F ; в модели [14] (см. (2.8)) $c_F = -nc_4/m$.

Из уравнений (2.6), (2.8) можно установить также соотношения между константами α_F , b_F , d_F и e_F в уравнении для F (2.6) и c , c_1 в уравнении энергии турбулентности E (2.5) в зависимости от вида функции F

$$b_F = m, \quad d_F = (m - n/2)c, \quad e_F = (m - n/5)c_1 = \alpha_F c_1$$

Из табл. 1 видно, что для модели [14] эти соотношения между константами выполняются в точности, а для моделей [10–13] – приближенно.

Из трех комбинаций $F = E^m L^n$, рассмотренных в [14], в последующих работах авторов [2, 5, 15] использовался квадрат "частоты" турбулентности $\omega^2 = E/L^2$. Уравнения переноса для величин E , ω^2 в упомянутых работах имеют вид (2.5), (2.6) с константами, значения которых представлены в табл. 1. Величина $\omega = \omega_w$ на стенке в функции $f_4 = 1 - (\omega_w/\omega)^2$ в уравнении (2.6) модели [14] (см. табл. 1) получена из уравнения энергии турбулентности (2.5) приравниванием вязких диффузионного и диссипативного членов вблизи стенки, откуда следует, что $\omega_w^2 = (\partial E/\partial y)^2/2c_1 E$. Функция f_4 при этом обращается в ноль на стенке, что позволяет избавиться от особенности для ω^2 .

Для напряжения сдвига τ в трехпараметрической модели [14] вместо гипотезы Буссинеска (2.1) используется уравнение переноса

$$\rho u \frac{\partial \tau}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \tau}{\partial y} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} \left(r D_\tau \frac{\partial \tau}{\partial y} \right) - D_\tau \frac{\tau}{r^2} + c_7 \rho E \frac{\partial u}{\partial y} -$$

$$-3c_p \frac{\sqrt{E}}{L} \tau - 9c_1 \eta \frac{\tau}{L^2}, \quad D_\tau = \eta + 3a_E \rho \sqrt{EL}, \quad c_7 = 0,2 \quad (2.9)$$

В уравнении (2.9) отсутствуют эмпирические функции, а константы, за исключением c_7 , выражаются через c , c_1 и a_E (табл. 1), входящие в уравнения для E (2.5) и F (2.6).

Граничные условия в расчетах с системой уравнений (2.5), (2.6), (2.9)

$$E = \frac{\partial E}{\partial y} = \tau = 0 \quad (y = 0), \quad E = E_e, \quad \tau = 0, \quad \omega^2 = \omega_e^2 \quad (y = \delta)$$

На базе трехпараметрической (E, F, τ) -модели турбулентности [14], представленной выше, можно построить вариант двухпараметрической (E, F) -модели, в которой для величины турбулентного трения $\rho\tau$ (2.1) используется алгебраическое соотношение. Процедура получения зависимости для турбулентной вязкости ν_t в виде (2.7) описана в [14], где определена константа c_v и функция f_v

$$c_v = \frac{c_7}{3c}, \quad f_v = \left\{ \frac{\Pi}{2} \left[1 + \left(1 + \frac{c_7}{4,5c^2} \frac{z^2}{\Pi^2} \right)^{1/2} \right] \right\}^{-1}, \quad \Pi = 1 + \frac{c_1}{c} \frac{2,9}{Re_t} - \frac{c_4}{c} \frac{z}{3}$$

$$Re_t = \frac{\rho \sqrt{EL}}{\eta}, \quad z = \frac{L}{\sqrt{E}} \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|$$

Анализ полученной зависимости $f_v(Re_t, z)$ показывает, что у стенки, где $Re_t \ll 1$, $f_v \approx (c/2,9c_1)Re_t$, а на границе пограничного слоя (оси трубы), где $Re_t \gg 1$ и $z \ll 1$, $f_v \approx 1$ и выражение для турбулентной вязкости имеет вид $\nu_t \approx 0,22\sqrt{EL}$.

3. Анализ моделей турбулентности для развитого течения в трубе. Анализ моделей турбулентности проведен для развитого течения несжимаемой жидкости в круглой трубе, для которого имеется большой экспериментальный материал как по интегральным, так и по локальным характеристикам потока. Для этого течения в уравнениях переноса для характеристик турбулентности, как и в уравнении движения, можно пренебречь конвективными членами, что упрощает анализ и позволяет получить аналитические зависимости для искомого функций. Вместо граничных условий на внешней границе пограничного слоя задаются условия на оси трубы (при $y = r_0$, r_0 – радиус трубы)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \nu_t}{\partial y} = \frac{\partial E}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} = \tau = 0$$

Расчет развитого течения в трубе для рассмотренных моделей проведен при числе Рейнольдса $Re = 5 \cdot 10^4$ ($Re_* = \rho r_{0*} u_* / \eta \approx 1300$) по единой программе на одной и той же расчетной сетке.

При анализе моделей рассмотрены три области течения, для каждой из которых определяющими являются различные группы членов в уравнениях переноса.

Вязкий подслой. В вязком подслое в уравнениях переноса для характеристик турбулентности главными будут члены с вязкой диффузией и диссипацией. Представляя зависимости для $\Phi = E, L, \tau$ от расстояния до стенки y в виде $\Phi \sim y^k$ для дифференциальных моделей турбулентности [9–14] можно получить значения показателей степени k в зависимостях для E, L, τ , которые приведены в табл. 2.

Общепринятым степенным зависимостям $E \sim y^2, L \sim y, \tau \sim y^{3-4}$ отвечают лишь две модели: [11] и [14].

Из дальнейшего рассмотрения была исключена (E, ω^2) -модель [12], поскольку

Параметр	Модель					
	[9]	[10]	[11]	[12]	[13]	[14]
E	–	2	2	4	3,23	2
L	–	2	1	4	3,61	1
τ	7,59	3	3	6	5,23	4

результаты расчета с использованием ее близки к результатам расчета по (E, ω) -модели [13], а также по той причине, что автор моделей [12, 13] отдает предпочтение последней.

Результаты расчета в вязком подслое ($y_+ < 5$) для энергии турбулентности $E_+ = E/u_*^2$ и напряжения сдвига $\tau_+ = \tau/u_*^2$ представлены соответственно на фиг. 1, а, б. Там же штриховыми кривыми нанесены приведенные в [3] экспериментальные зависимости $E_+ = 0,05y_+^2$ и $\tau_+ = 0,0008y_+^3$. Учитывая невысокую точность экспериментальных данных в вязком подслое (особенно для напряжения сдвига τ), трудно говорить о количественном соответствии результатов эксперимента и расчета по всем моделям. По крайней мере для энергии турбулентности E (фиг. 1, а), где точность измерений выше, чем для τ , значительной разницы между расчетом и экспериментом нет.

Что касается масштаба турбулентности $L_+ = \rho Lu_* / \eta$ (фиг. 1, в), то ввиду отсутствия измерений его в вязком подслое, а также разного определения масштаба в различных моделях турбулентности можно говорить лишь о протяженности линейной части зависимости $L_+(y_+)$. Так, для (E, ω^2, τ) -модели [14] она является наибольшей и близка к зависимости $L_+ = \sqrt{c_1/2}y_+ \approx 1,4y_+$ (штриховая кривая на фиг. 1, в), следующей из уравнения для E (2.5), практически по всей толщине вязкого подслоя.

Логарифмический слой. Для логарифмической области ($40 < y_+ < 100$) профиль скорости имеет вид [16]

$$u_+ = k^{-1} \ln(y_+) + C, \quad k = 0,4, \quad C = 5,5 \quad (3.1)$$

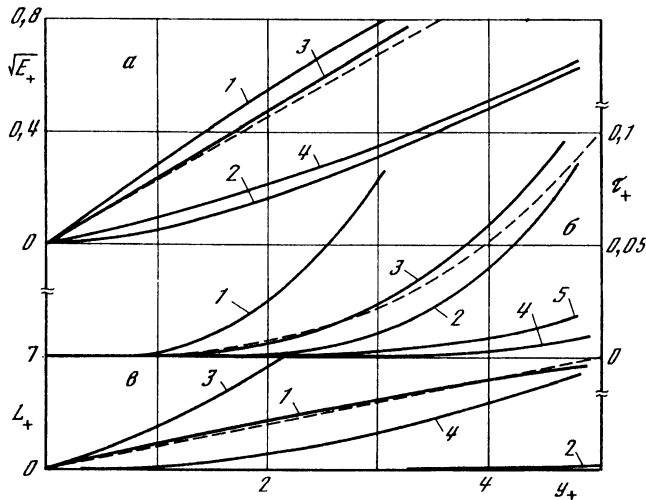
В логарифмическом слое скорость генерации энергии турбулентности E приблизительно равна скорости ее диссипации, т.е. диффузионными членами в уравнении для E (2.5) можно пренебречь, что позволяет проводить оценки величины E .

Расчетное изменение энергии турбулентности $E_+(y_+)$ при $y_+ \leq 100$ представлено на фиг. 2, а. Там же приведены экспериментальные данные Лауфера (см. в [3]). Как видно, в логарифмической области величины энергии турбулентности как в расчетах, так и в эксперименте примерно постоянны и близки между собой. Оценка значений E_+ в логарифмическом слое также может быть получена из уравнения энергии турбулентности (2.5) и для моделей [10–14] составляет $E_+ = 3,3\text{--}3,9$, что близко к значениям, полученным в расчетах.

Из уравнения движения (1.1) следует, что в логарифмическом слое с профилем скорости (3.1) напряжение сдвига (τ_+) имеет вид

$$\tau_+ = 1 - (ky_+)^{-1} \quad (3.2)$$

Результаты расчета величины τ_+ в логарифмическом слое представлены на фиг. 2, б. Там же приведены экспериментальные данные Шубауэра (см. в [3]). Как видно, результаты расчета по всем рассмотренным моделям близки между собой и согласуются с экспериментальными данными. В области, соответствующей логарифмическому слою, расчетные линии выходят на примерно постоянное значение $\tau_+ = 0,9$, близкое к зависимости (3.2). Это дает основание в логарифмическом слое



Фиг. 1. Изменение в вязком подслое ($y_+ = \rho u_* \eta / \eta < 5$) энергии турбулентности $E_+ = E / u_*^2$ (а), напряжения сдвига $\tau_+ = \tau / u_*^2$ (б) и масштаба турбулентности $L_+ = \rho L u_* / \eta$ (в) (кривая 1 – расчет по модели [14], 2 – [13], 3 – [11], 4 – [10], 5 – [9]; штриховые кривые: на фиг. 1, а – $E_+ = 0,05 y_+^2$; 1, б – $\tau_+ = 0,0008 y_+^3$; 1, в – $L_+ = \sqrt{c_1 / 2 y_+}$)

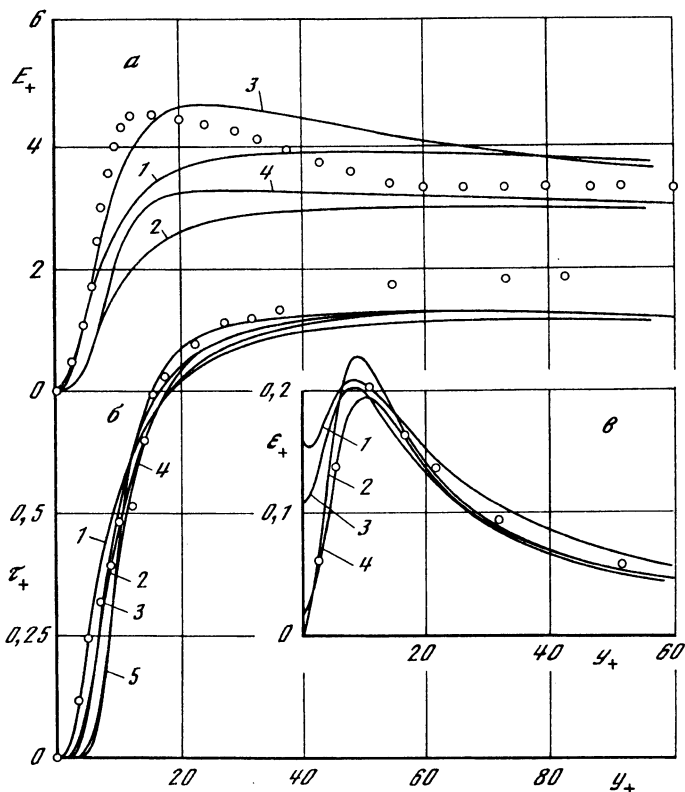
напряжение турбулентного трения считать постоянным и, если пренебречь влиянием вязкости, для оценок можно принять $\tau_+ \approx 1$.

На фиг. 2, в универсальных координатах представлено изменение полной (изотропной ϵ_i и вязкой ϵ_v) диссипации энергии турбулентности $\epsilon_+ = \epsilon \eta / \rho u_*^4$. Там же приведены экспериментальные данные Лауфера (см. в [3]). Как видно, расчетные зависимости близки к эксперименту и хорошо соответствуют друг другу, за исключением вязкого подслоя ($y_+ < 5$), где величина ϵ_+ для модели [13] на стенке обращается в ноль в отличие от остальных моделей, где ϵ_+ принимает конечное значение. Это различие связано с представлением диссипативного члена в уравнении энергии (2.5) модели [13], в которой отсутствует вязкая диссипация.

Для сравнительного анализа поведения масштаба турбулентности L по различным моделям в логарифмическом слое представляется целесообразным ввести величину приведенного масштаба $L_s = L / c$, который включал бы значение константы c в члене с изотропной диссипацией энергии турбулентности ϵ_i , так что $\epsilon_i = E^{3/2} / L_s$ для всех моделей. На фиг. 3, а представлено изменение относительной величины приведенного масштаба турбулентности $L_s^\circ = L_s / r_0$ в логарифмическом слое ($y^\circ = y / r_0 \leq 0,1$) для двухпараметрических моделей [10, 11, 13] и трехпараметрической модели [14]. Изменение масштаба турбулентности в логарифмическом слое близко к линейному, а представление масштаба в виде приведенной величины L_s° свидетельствует о том, что оно является универсальным, так как результаты расчета по рассмотренным моделям близки между собой.

Ядро потока. Результаты расчета по всему сечению трубы напряжения сдвига τ_+ и энергии турбулентности E_+ по рассмотренным дифференциальным моделям близки между собой. Для приведенного масштаба турбулентности L_s° (фиг. 3, б) результаты различаются не сильно.

Результаты расчета универсальных профилей скорости для трех чисел Рейнольдса $Re = 10^5; 5 \cdot 10^5; 10^6$ и зависимостей коэффициента сопротивления λ от числа Re



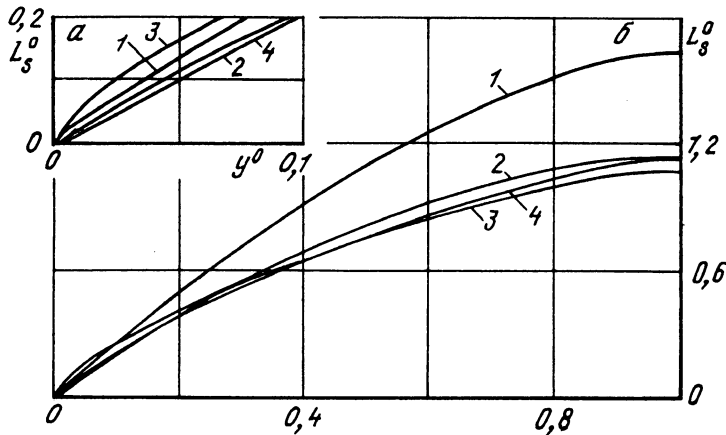
Фиг. 2. Распределение в логарифмическом слое ($y_+ < 100$) энергии турбулентности E_+ (а), напряжения сдвига τ_+ (б) и полной диссипации энергии турбулентности $\epsilon_+ = \eta \epsilon / \rho u_*^4$ (в) (кривые 1-5 – см. фиг. 1, точки – экспериментальные данные, приведенные в [3])

близки к логарифмическому закону для профиля скорости (3.1) и закону сопротивления Прандтля [16], что подтверждает выводы разработчиков о работоспособности рассмотренных моделей турбулентности для развитого течения несжимаемой жидкости в круглой трубе.

Полученные результаты дают основание для последующего рассмотрения этих моделей турбулентности применительно к более сложному случаю, такому, как течение в пограничном слое в сопле.

4. Результаты расчетов пограничного слоя в сопле ЖРД. Представленные в разд. 2 модельные уравнения для характеристик турбулентности решались совместно с уравнениями неразрывности, движения и энергии (1.1) для двумерного пограничного слоя. Для решения уравнений, расписанных по двухслойной неявной разностной схеме, использовался стандартный метод прогонки с итерациями, адаптированный к расчету пограничного слоя в сопле [17].

Расчеты проводились на неравномерной сетке со сгущениями узлов в областях с большими градиентами искомых функций в полосе конечной, но переменной по длине сопла ширины, составляющей примерно половину текущего радиуса сопла. Количество узлов в направлении нормали к стенке было равным 100, из которых около 20 располагалось в области $y_+ < 20$ и еще столько же – в области $20 < y_+ < 50$. Шаг по длине контура сопла был также переменным, со сгущением в районе критического сечения. Величины шагов сетки в поперечном и продольном направлениях варьировались в расчетах, чтобы убедиться в отсутствии их влияния в исследованном



Фиг. 3. Профили приведенного масштаба турбулентности $L_s^0 = L_s/r_0$ по радиусу трубы $y^0 = y/r_0$ в логарифмическом слое (а) и в ядре потока (б) (кривые 1–4 – см. фиг. 1)

диапазоне изменения на результаты расчета. В качестве начальных данных задавались однородные профили скорости, энтальпии и тех характеристик турбулентности, для описания которых использовались уравнения переноса.

Расчеты по всем рассмотренным моделям турбулентности проводились с использованием одной и той же разностной сетки по единой программе [17].

Сравнение результатов расчета пограничного слоя в сопле ЖРД с использованием моделей турбулентности и интегральных соотношений проводилось по толщине потери импульса θ , коэффициенту трения c_f , тепловому потоку в стенку Q_w и коэффициенту потерь удельного импульса двигателя из-за трения в пристеночном слое сопла ζ_f

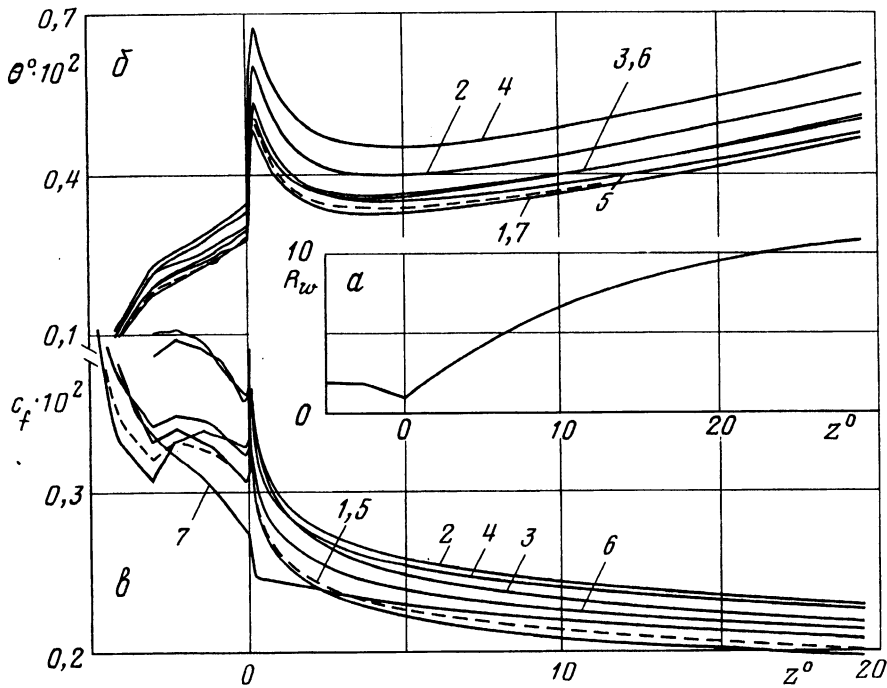
$$\theta = \int_0^{\delta} \frac{r}{r_w} \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy, \quad c_f = \frac{2}{\rho_e u_e^2} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial y} \right)_w$$

$$Q_w = -\frac{1}{Pr} \left(\eta \frac{\partial I}{\partial y} \right)_w, \quad \zeta_f = \frac{2\theta / r_w}{1 + (\gamma M_1^2)^{-1}} \frac{\rho_e u_e^2}{\rho_1 u_1^2} \cos \alpha$$

Здесь γ – показатель адиабаты, M – число Маха, индекс 1 соответствует значению параметра, определенному для одномерного течения в сопле заданного контура r_w .

В качестве объекта численного исследования был выбран один из ракетных двигателей, проектная разработка которого выполнена НПО Энергомаш, а параметры сопла приведены в [17]. Контур сопла (фиг. 4, а) $R_w = r_w/r_*$ (r_* – радиус критического сечения сопла) и число Маха M_w на стенке сопла получены из расчета течения идеального газа. Величина температурного фактора – относительной температуры стенки сопла $T_w^0 = T_w / T_0$ (T_0 – температура в камере сгорания и на входе в сопло) варьировалась в расчетах. По оси абсцисс на фиг. 4 отложена координата $z^0 = z/r_*$, где z отсчитывается от критического сечения сопла вдоль его оси симметрии.

Число Рейнольдса, определенное по радиусу и параметрам потока на входе в сопло, $Re = 0,84 \cdot 10^7$. Показатель адиабаты газа $\gamma = 1,15$. Для плотности использовалось уравнение состояния идеального газа. Для коэффициента динамической вязкости была принята степенная зависимость от температуры вида $\eta \sim T^{0,8}$. Молекулярное число Прандтля в расчетах принималось постоянным и составляло $Pr = 0,7$.



Фиг. 4. Изменение по длине сопла ($z^0 = z/r_*$) заданного контура $R_w = r_w/r_0$ (а), толщины потери импульса $\theta^0 = \theta/r_w$ (б) и коэффициента трения (в) в пограничном слое на стенке сопла (кривая 1 – расчет по модели [14], 2 – [13], 3 – [11], 4 – [10], 5 – [9], 6 – [8], 7 – [6, 7])

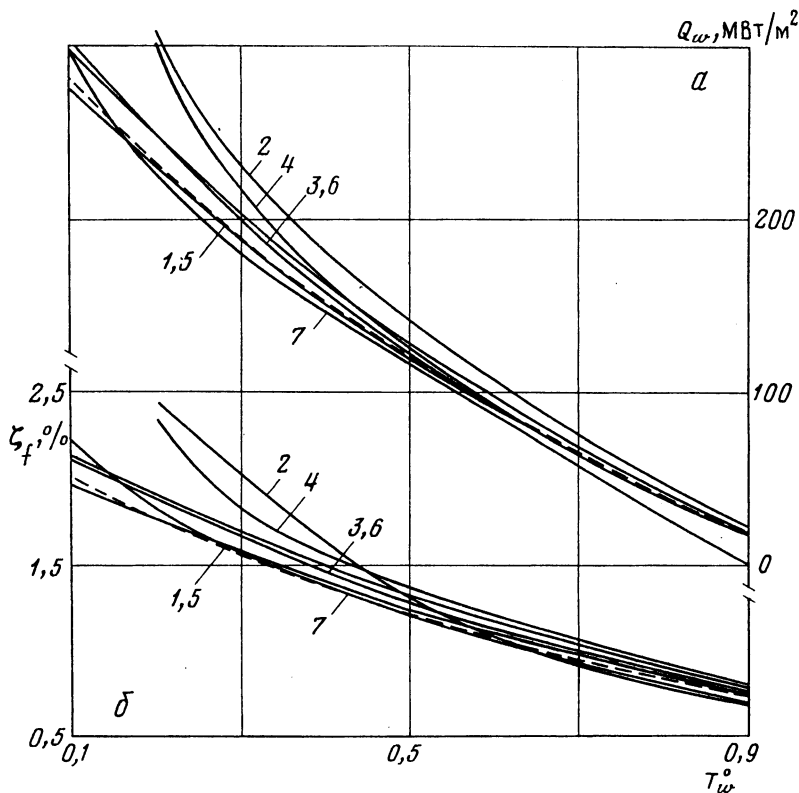
Сравнение рассмотренных моделей турбулентности проводилось с трехпараметрической моделью [14] (штриховые кривые 1 на фиг. 4,5), которая представляется физически обоснованной (см. разд. 3), апробированной для сжимаемого пограничного слоя [17] и достаточно универсальной в широком классе течений, не содержащей эмпирических функций для конкретных течений.

Расчеты проведены в диапазоне значений температурного фактора $T_w^0 = 0,1 - 0,9$. Величина $T_w^0 = 0,9$ практически соответствует адиабатической стенке и в интегральной модели [6, 7] при этом полагается, что тепловой поток в стенку сопла $Q_w = 0$.

Для адиабатической стенки сопла ($Q_w = 0$ в граничном условии (1.3)) результаты расчетов по всем рассмотренным моделям близки между собой.

Для охлаждаемой стенки с $T_w^0 = 0,3$, типичным для сопел ЖРД, результаты расчета относительной толщины потери импульса $\theta^0 = \theta/r_w$ и коэффициента сопротивления c_f представлены соответственно на фиг. 4, б, в. Результаты расчета толщины потери импульса и коэффициента сопротивления по моделям [13] и [10] (кривые 2, 4) превышают полученные по другим моделям.

Результаты расчета величин теплового потока в стенку Q_w в критическом сечении и коэффициента потерь удельного импульса из-за трения ζ_f в выходном сечении сопла, имеющих определяющее значение для ЖРД, представлены соответственно на фиг. 5, а, б. Результаты расчета по всем моделям близки между собой, за исключением полученных для двухпараметрических моделей [13] и [10] (кривые 2, 4) при значениях $T_w^0 \leq 0,4$.



Фиг. 5. Зависимость теплового потока Q_w в критическом сечении сопла (а) и коэффициента потерь удельного импульса из-за трения ζ_f в выходном сечении сопла (б) от температурного фактора $T_w^0 = T_w/T_0$ (кривой 1–7 – см. фиг. 4)

По всей совокупности проведенных расчетов¹ для сжимаемого пограничного слоя в условиях существенного влияния ускорения и температурного фактора близкие к трехпараметрической модели [14] результаты имеет однопараметрическая модель [9], отличие которой по ζ_f и Q_w от [14] не превышает 3%. Интегральная методика расчета [6, 7], специально разработанная для расчета пограничного слоя в сопле ЖРД, за исключением результатов для ζ_f при $T_w^0 = 0,1$ и для Q_w при $T_w^0 = 0,9$, дает отличие от [14] не более 6%. Из двухпараметрических моделей приемлемой можно считать лишь модель [11], где, по-видимому, удачно подобраны пристеночные функции. Для этой модели отличие от [14] не превышает 8%. Алгебраическая модель [8] дает результаты, близкие к модели [11]. Что же касается двухпараметрических моделей [10] и [13], то для них отличие от [14] по ζ_f и Q_w достигает 30–40%.

Закключение. Для проведения сравнительного анализа выбраны следующие модели турбулентности: интегральная модель [6, 7]; алгебраическая модель для турбулентной вязкости ν_t [8]; однопараметрическая модель [9], в которой для ν_t используется уравнение переноса; группа двухпараметрических моделей [10–13], в которых используются уравнения переноса для энергии турбулентности E и скорости диссипации энергии турбулентности или "частоты" турбулентности ω (или ω^2);

¹ В полном объеме результаты расчетов содержатся в Отчете Института механики МГУ. 1992. № 4179.

трехпараметрическая модель [14], в которой уравнения переноса записаны для E , ω^2 и напряжения сдвига τ .

Для развитого течения несжимаемой жидкости в круглой трубе по всем рассмотренным моделям турбулентности в пределах разброса опытных данных имеется соответствие эксперименту. Однако физически более обоснованными представляются модели [11] и [14], которые в вязком подслое дают необходимые степенные зависимости $E \sim y^2$, $L \sim y$, $\tau \sim y^{3-4}$.

Расчет сжимаемого до- и сверхзвукового пограничного слоя в сопле ЖРД показал, что для адиабатической стенки результаты расчетов по всем моделям близки между собой. В случае охлаждаемой стенки, когда существенно влияние температурного фактора, результаты расчета различаются. Полученные результаты сравнивались с результатами расчета по трехпараметрической модели [14] как наиболее физически обоснованной, апробированной для сжимаемого пограничного слоя и достаточно универсальной. Для количественной оценки моделей использовались величины потерь удельного импульса из-за трения ζ_f на выходе из сопла и теплового потока в стенку Q_w в критическом сечении сопла, имеющие определяющее значение для ЖРД. По этим оценкам лучшие результаты имеют однопараметрическая модель [9] и интегральная методика [6, 7], отличие которых по ζ_f и Q_w от трехпараметрической модели [14] не превышает 3–6%. Из двухпараметрических моделей приемлемой можно считать лишь модель [11]. Для модели [11] и алгебраической модели [8] отличие не превышает 8–9%. Что же касается двухпараметрических моделей [10] и [13], то они не могут быть рекомендованы для расчета пограничного слоя в соплах ЖРД, так как для них отличие по ζ_f и Q_w достигает 30–40%.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-00260).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колмогоров А.Н. Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1942. Т. 6. № 1–2. С. 56–58.
2. Луцик В.Г., Павельев А.А., Якубенко А.Е. Уравнения переноса для характеристик турбулентности: модели и результаты расчетов // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. М.: ВИНТИ. 1988. Т. 22. С. 3–61.
3. Patel V.C., Rodi W., Scheuerer G. Turbulence models for near-wall and low Reynolds number flows: A review // AIAA Journal. 1985. V. 23. N 9. P. 1308–1319. (Рус. перев.: Пейтел В.К., Роди В., Шойерер Г. Модели турбулентности для течений в пристеночной области с малыми числами Рейнольдса: Обзор // Аэрокосмич. техника. 1986. № 2. С. 183–197.)
4. Иевлев В.М. Турбулентное движение высокотемпературных сплошных сред. М.: Наука, 1975. 256 с.
5. Луцик В.Г., Павельев А.А., Якубенко А.Е. Турбулентные течения. Модели и численные исследования (обзор) // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 4. С. 4–27.
6. Авдудевский В.С. Метод расчета пространственного турбулентного пограничного слоя в сжимаемом газе // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1962. № 4. С. 3–13.
7. Кузьмина Л.Ф., Мельников Д.А., Никулин Г.З. Потери удельного импульса тяги из-за трения в соплах // Ракетно-космическая техника. М.: НИИТП, 1992. Вып. 2(135). С. 21–34.
8. Sebeci T., Smith A.M.O. Analysis of turbulent boundary layers. N.Y.: Acad. Press, 1974. 404 p.
9. Секундов А.Н. Применение дифференциального уравнения для турбулентной вязкости к анализу плоских неавтономных течений // Изв. АН СССР. МЖГ. 1971. № 5. С. 114–127.
10. Launder B.E., Sharma B.I. Application of the energy-dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disc // Lett. Heat and Mass Transfer. 1974. V. 1. N 2. P. 131–138.
11. Chien K.Y. Predictions of channel and boundary-layer flows with a low-Reynolds-number turbulence model // AIAA Journal. 1982. V. 20. N 1. P. 33–38. (Рус. перев.: Джен К.Ю. Расчет течений в каналах и пограничных слоях на основе модели турбулентности, применимой при низких числах Рейнольдса // Ракетная техника и космонавтика. 1982. Т. 20. № 2. С. 30–37.)

12. *Wilcox D.C., Rubesin W.M.* Progress in turbulence modeling for complex flow fields including effects of compressibility // NASA Tech. Paper. 1980. N 1517. 70 p.
13. *Wilcox D.C.* Reassessment of the scale determining equation for advanced turbulence models // AIAA Journal. 1988. V. 26. N 11. P. 1299–1310. (Рус. перев.: *Уолкок Д.К.* Уточнение уравнения для масштаба турбулентности в перспективных моделях турбулентности // Аэрокосмич. техника. 1989. № 11. С. 30–46.)
14. *Луцик В.Г., Павельев А.А., Якубенко А.Е.* Трехпараметрическая модель сдвиговой турбулентности // Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. № 3. С. 13–25.
15. *Луцик В.Г., Павельев А.А., Якубенко А.Е.* Трехпараметрическая модель турбулентности: расчет теплообмена // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 2. С. 40–52.
16. *Schlichting H.* Grenzschicht-Theorie. Karlsruhe: Verlag G. Brawn, 1965. 736 S. (Рус. перев.: *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.)
17. *Ковалев В.И., Луцик В.Г., Сизов В.И., Якубенко А.Е.* Трехпараметрическая модель турбулентности: численное исследование пограничного слоя в сопле с завесным охлаждением // Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 1. С. 48–57.

Москва

Поступила в редакцию
19.VI.1996