МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 • 1998

УДК 532.66

© 1998 г. **В.И. ЗЕМСКИХ, М.В. КРЫЛОВА**

МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВИЖЕНИЯ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ФАЗ В ЕДИНИЧНОМ КАПИЛЛЯРЕ С УЧЕТОМ КАПИЛЛЯРНЫХ СИЛ

При исследовании капиллярных явлений часто бывает необходимо моделировать макроскопические характеристики движения границы раздела фаз. В качестве промежуточной асимптотики в этом случае можно использовать уравнение Вашбурна [1]. С помощью характерных безразмерных переменных в данной работе исследовались свойства этого уравнения. Введение этих характерных безразмерных переменных позволило классифицировать режимы вытеснения.

Рассматриваются макроскопические характеристики движения границы раздела двух несмешивающих фаз в капилляре длиной L с учетом капиллярных сил ($L \gg a$, где a – радиус капилляра), когда на концах капилляра поддерживаются постоянные давления: $P(L) = C_1$ и $P(0) = C_2$ (где C_i, i = 1, 2, – постоянные). Предполагается, что движение фаз происходит достаточно медленно, так, что инерционными силами пренебрегается и в любой момент времени каждая из фаз движется стационарно в соответствии с давлениями, определенными на границах этой фазы. Последнее предположение фактически является предположением о квазистационарном характере течения каждой из фаз под действием медленно меняющегося градиента давления. Поскольку толщина зоны мениска по порядку величины совпадает с радиусом капилляра и, следовательно, мала по сравнению с длиной капилляра, она рассматривается как плоская поверхность, перпендикулярная оси капилляра, на которой распределение давления вдоль оси капилляра терпит скачок. Величина этого скачка, т.е. разность давлений в несмачивающей (индекс 1) и смачивающей (индекс 2) движущихся фазах, предполагалась равной величине скачка для неподвижных фаз

$$P_1 - P_2 = P_c = 2\sigma\cos\theta/a \qquad (1)$$

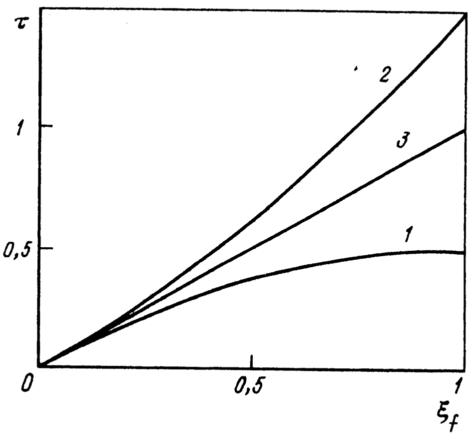
где P_1 – давление в несмачивающей фазе вблизи мениска, P_2 – давление в смачивающей фазе вблизи мениска, P_c – капиллярное давление, σ – коэффициент поверхностного натяжения, θ – угол смачивания, отвечающий процессу наступления или отступления смачивающей фазы. Считается, что такая поверхность раздела достаточно удалена от концов капилляра, так что концевыми эффектами пренебрегается.

В силу сделанных предположений для средней скорости каждой фазы можно записать [2]

$$u_{mi} = -\frac{a^2}{8\mu_i}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_i, \quad i = 1,2 \qquad (2)$$

Здесь u_{mi} – средняя скрость течения i-той фазы; μ_i – вязкость i-той фазы; X – координата вдоль оси капилляра. (Начало координат совпадает с левым концом капилляра, а правый конец отвечает координате $X = L$.)

Зависимость $\xi_f(\tau)$ при вытеснении одной фазы другой фазой в единичном капилляре



В силу неразрывности и несжимаемости можно положить $u_m = \dot{x}_f(t)$, отсюда с учетом (2) имеем следующую систему уравнений:

$$\dot{x}_f(t) = -\frac{a^2[P(L) - P_1(x_f)]}{8\mu_r[L - x_f(t)]}, \quad \dot{x}_f(t) = -\frac{a^2[P_2(x_f) - P(0)]}{8\mu_l x_f(t)} \tag{3}$$

где $x_f(t)$ – положение фронта мениска, $\dot{x}_f(t)$ – скорость движения фронта мениска, μ_r, μ_l – вязкость фазы, находящейся справа (слева) от мениска. Исключая из системы (3) P_1 и P_2 и учитывая (1), получим выражение для скорости движения мениска

$$\dot{x}_f(t) = -\frac{a^2(\Delta P + (-1)^r P_c)}{8\mu_r x_f(t) + 8\mu_r(L - x_f(t))}, \quad \Delta P = P(L) - P(0) \tag{4}$$

Если смачивающая фаза находится слева от мениска и вытесняет насмачивающую, то $r = 1$, $l = 2$. Если же несмачивающая фаза находится слева от мениска и вытесняет смачивающую, то $r = 2$, $l = 1$.

Начальное условие для уравнения (4) задается в виде $x_f(0) = 0$.

Уравнение (4) в безразмерных переменных имеет вид

$$\frac{d\xi_f}{d\tau} = \frac{1}{1 - b\xi_f}, \quad b = \operatorname{sign}\left(1 - \frac{\mu_l}{\mu_r}\right), \quad \xi_f = \left|1 - \frac{\mu_l}{\mu_r}\right|\frac{x_f}{L}$$

$$\tau = \frac{t}{t_*}, \quad t_* = \frac{8\mu_r L^2}{a^2[(-1)^{r+1}P_c - \Delta P]\left|1 - \mu_l/\mu_r\right|} \tag{5}$$

Здесь t_* – характерное время процесса, равное времени вытеснения фазы, находящейся справа при постоянном градиенте давления и равных вязкостях.

Таким образом, имеется следующая задача:

$$\xi_f' = (1 - b\xi_f)^{-1}, \quad \xi_f(0) = 0, \quad \xi_f' = \frac{d\xi_f}{d\tau} \tag{6}$$

Решение данной задачи определяется зависимостью $2\tau = -b\xi^2 + 2\xi$ (фигура).

При условиях $P_c - \Delta P > 0$ и $\mu_1 > \mu_2$, т.е. когда смачивающая фаза вытесняет несмачивающую (капиллярное давление способствует вытеснению, при $\Delta P \geqslant 0$ вытеснение происходит исключительно за счет капиллярных сил) и оказывается менее вязкой, чем несмачивающая фаза, примером данного условия может служить вытеснение нефти водой, когда вода является смачивающей фазой, а нефть более вязкой, чем вода; или же при $P_c + \Delta P < 0$ и $\mu_1 < \mu_2$, т.е. когда менее вязкая несмачивающая фаза вытесняет смачивающую (капиллярное давление препятствует вытеснению), при этом условии таким примером может быть вытеснение воды нефтью, но здесь нефть менее вязкая несмачивающая фаза, чем вода, выражение $b = 1$. Этому случаю соответствует кривая *1*. Движение мениска при $b = 1$ происходит с ускорением: $\xi'_f(0) = 1$, $\xi'_f(\tau_{\max}) = \mu_r / \mu_l > 1$. При $\mu_l/\mu_r \to 0$ $\tau_{\max} \to 1/2$, а $\xi'_f(\tau_{\max}) \to \infty$. При условиях $P_c - \Delta P > 0$ и $\mu_1 < \mu_2$, т.е. когда более вязкая смачивающая фаза вытесняет несмачивающую, примером данного условия может служить вытеснение газа водой, когда вода является смачивающей и более вязкой фазой; а также при условии $P_c + \Delta P < 0$ и $\mu_1 < \mu_2$, т.е. вытесняющая несмачивающая фаза более вязкая, чем вытесняемая смачивающая фаза, примером же этого условия является вытеснение воды нефтью, когда нефть является несмачивающей и более вязкой фазой, выражение $b = -1$ (кривая *2*). При $b = -1$ скорость мениска уменьшается по мере движения мениска по капилляру: $\xi'_f(0) = 1$, $\xi'_f(\tau_{\max}) = \mu_r / \mu_l < 1$. При $\mu_l/\mu_r \to \infty$ время заполнения капилляра смачивающей фазой неограниченно возрастает.

При однаковых вязкостях фаз ($\mu_l = \mu_r$) $b = 0$ решение представлено прямой *3*. При $b = 0$ вытеснение происходит с постоянной скоростью. Если смачивающая фаза находится слева от мениска, а несмачивающая фаза справа, при $\Delta P > 0$ процесс полностью контролируется капиллярными силами, поскольку внешний градиент давления препятствует вытеснению. При $\Delta P \leqslant 0$ капиллярные силы способствуют вытеснению. Если же несмачивающая фаза (слева) вытесняет смачивающую фазу (справа), вытеснение возможно, только если внешний градиент давления превышает величину капиллярного давления.

Кривые заканчиваются в различных точках ($\tau_{\max}$, $\xi_{f\max}$), которые зависят от соотношений вязкостей. Полное заполнение капилляра одной из фаз достигается при

$$\tau = \tau_{\max} = \frac{b}{2}\left[1 - \left(\frac{\mu_l}{\mu_r}\right)^2\right], \quad \left(\xi_{f\max} = b\left[1 - \frac{\mu_l}{\mu_r}\right]\right), \quad t_{\max} = \frac{4(\mu_r + \mu_l)L^2\rho}{a^2 b((-1)^{r+1} P_c + \Delta P)}$$

Если капиллярное давление равно внешнему перепаду давления, то задача описывает состояние безразличного равновесия системы. При любых вязкостях мениск не будет двигаться из любой позиции внутри капилляра.

Предполагалось, что инерционные силы малы по сравнению с вязкостными, т.е. $\mathrm{Re} = \rho V_{\max} L/\mu \ll 1$. Характерная максимальная скорость $V_{\max} = v^*_{\max} = L / t_*$, тогда

$$\frac{\rho a^2((-1)^{r+1} P_c - \Delta P)|\mu_r - \mu_l|}{8\mu_r^3} \ll 1$$

Заключение. Удается классифицировать режимы вытеснения в единичном капилляре с учетом капиллярных сил по типу вытеснения (смачивающая или несмачивающая фаза является вытесняющей) и по характеру вытеснения (ускорение мениска, замедление мениска, движение с постоянной скоростью). Каждый из режимов вытеснения в соответствующих безразмерных переменных описывается уравнением, не содержащим параметра.

Авторы благодарят А.А. Бармина за плодотворное обсуждение и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Washburn E.W.* The dynamics of capillary flow // Phys. Rev. 1921. V. 17. P. 273–283.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.

Москва

Поступила в редакцию
5.VII.1996