МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 • 1998

УДК 532.55:537.84

© 1998 г. **А.Б. ВАТАЖИН**

ОБ ОДНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ СООТНОШЕНИИ В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

Получено интегральное соотношение для изменения потока полного давления в магнитогидродинамических (МГД) каналах в случае несжимаемой жидкости. Найдены выражения для обратимого и необратимого изменения потока полного давления. Рассмотрены различные режимы МГД-течений.

Рассмотрим произвольный фиксированный объем V, заполненный вязкой несжимаемой электропроводной средой в присутствии магнитного поля $\mathbf{B}$. Уравнения неразрывности, импульсов, обобщенный закон Ома и условие непрерывности электрического тока $\mathbf{j}$ в стационарном случае имеют вид [1]

$$\operatorname{div}\mathbf{v}=0,\ \ \rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}=-\nabla p+\operatorname{div}\boldsymbol{\tau}+\mathbf{f}$$
$$\mathbf{f}=\mathbf{j}\times\mathbf{B},\ \ \mathbf{j}=\sigma(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})-\alpha\mathbf{j}\times\mathbf{B},\ \operatorname{div}\mathbf{j}=0,\ \ \mathbf{E}=-\nabla\varphi \tag{1}$$

Здесь ρ, p и σ – плотность, давление и электропроводность среды, φ – электрический потенциал, $\mathbf{v}$ – скорость, $\mathbf{f}$ – электромагнитная сила, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ – векторы электрического и магнитного полей, $\boldsymbol{\tau}$ – тензор вязких напряжений с компонентами τ_{ik} $(i,\ k=1,\ 2,\ 3)$. В выражении для $\mathbf{j}$ учитывается эффект Холла только для электронов (α – параметр Холла, деленный на $|\mathbf{B}|$).

Умножая уравнение импульсов на $\mathbf{v}$, интегрируя полученное выражение по объему V и используя формулу Гаусса – Остроградского, находим

$$\oint_{\Sigma} p^{*}v_n d\Sigma=\oint_{\Sigma}(\boldsymbol{\tau}\mathbf{v})\mathbf{n}d\Sigma-\Phi+\int_{V}\mathbf{f}\mathbf{v}dV \tag{2}$$

$$p^{*}=p+\frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2,\ \ \Phi=\int_{V}\phi dV\ \ (\phi\geqslant 0,\ \ \Phi\geqslant 0) \tag{3}$$

Здесь p^{*} – полное давление, $\mathbf{n}$ – вектор внешней нормали к поверхности Σ, Φ и ϕ – интегральная и локальная вязкая диссипация (в ортогональной прямолинейной системе координат величина $\phi=\tau_{ik}(\partial v_i/\partial x_k)$, где по индексам, встречающимся дважды, производится суммирование). Связь между тензором вязких напряжений и тензором скоростей деформаций такова, что $\phi\geqslant 0$ [2].

Из выражений для $\mathbf{f}$ и $\mathbf{j}$ (1), следует

$$\mathbf{f}\mathbf{v}=\mathbf{E}\mathbf{j}-\mathbf{j}^2/\sigma \tag{4}$$

Существенно, что это выражение явно не зависит от эффекта Холла. Подставляя (4) в интегральное выражение (2) и используя два последних соотношения в формулах (1), получим следующее интегральное соотношение:

$$\Pi = M - \Phi - D - N \tag{5}$$

$$\Pi = \oint_{\Sigma} p^* v_n d\Sigma, \quad M = \oint_{\Sigma} (\boldsymbol{\tau}\mathbf{v})\mathbf{n} d\Sigma, \quad D = \int_{V} \frac{\mathbf{j}^2}{\sigma} dV \geqslant 0, \quad N = \oint_{\Sigma} \varphi j_n d\Sigma \tag{6}$$

Здесь Π – поток величины p^* через замкнутую поверхность Σ, D – джоулева диссипация в объеме V, N – электрическая мощность, извлекаемая из канала, M – работа (за единицу времени) вязких напряжений на поверхности Σ. По определению, для генераторного режима течения величина N положительна. Для режима с подводом к каналу электрической энергии величина N отрицательна.

Соотношение (5) представляет собой обобщение результата работы [3] на случай МГД-течений.

Рассмотрим канал с входным и выходным сечениями F_1 и F_2 и с боковыми стенками Σ', через которые осуществляется вдув или отсос жидкости. Потери $\Delta\Pi$ потока полного давления в канале между сечениями F_1 и F_2 находятся из соотношения (5)

$$\Delta\Pi = \Pi_1 - \Pi_2 = \Pi' + N + \Phi + D - M \tag{7}$$

$$\Pi_m = \int_{F_m} up^* \, dF = G_m(\langle p^* \rangle_m) \ \ (m = 1, 2), \ \ \Pi' = \int_{\Sigma'} p^* v_n d\Sigma \tag{8}$$

Здесь Π_1, Π_2 и Π' – потоки величины p^* через поверхности F_1, F_2 и Σ' соответственно, u – продольная скорость (вдоль оси $x \equiv x_1$), сечения F_1 и F_2 перпендикулярны оси x, $\langle p^* \rangle$ – осредненное по объемному расходу жидкости полное давление в данном сечении канала, G – объемный расход жидкости в этом сечении. Для несжимаемой жидкости результаты осреднения по объемному и массовому расходу совпадают. Таким образом, с помощью формулы (7) определяется изменение "среднемассового" полного давления в канале.

Покажем, что величиной M в соотношении (7) для каналов, у которых поперечный размер δ не превосходит продольного размера l, а число Рейнольдса $\mathrm{Re} = (\rho u l/\eta) \gg 1$, можно пренебречь. Действительно, для поперечных сечений F_1 и F_2 имеем

$$v_y \sim v_z \sim u\left(\frac{\delta}{l}\right), \ \ \chi = (\boldsymbol{\tau}\mathbf{v})\mathbf{n} = (\tau_{xx}u + \tau_{xy}v_y + \tau_{xz}v_z) \sim \max\left(\frac{\eta u^2}{l}, \ \frac{\eta u^2}{l}, \ \frac{\delta^2}{l^2}\right)$$

$$\frac{\chi}{\rho u^3} \leqslant (\mathrm{Re})^{-1} \ll 1 \quad (\mathbf{v} = (u, \ v_y, \ v_z))$$

и работа вязких сил в поперечных сечениях канала много меньше величины Π_1 (здесь использована ортогональная прямолинейная система координат x, y, z).

На боковой поверхности Σ' касательные составляющие скорости равны нулю (условие прилипания), а нормальная скорость отлична от нуля (имеется вдув или отсос жидкости). Предполагая, что скорость вдува имеет такой же порядок величины, как и поперечные скорости в канале, получаем

$$\chi' = (\boldsymbol{\tau}\mathbf{v})\mathbf{n} = \tau_{nn}v_n \sim \frac{\eta u^2}{l}\frac{\delta}{l}, \quad \frac{\chi'}{\rho u^3} \leqslant (\mathrm{Re})^{-1} \ll 1$$

Здесь τ_{nn} – составляющая тензора вязких напряжений в ортогональной прямолинейной системе координат, которая фиксируется в рассматриваемой точке на поверхности Σ' и одна из осей которой направлена по нормали $\mathbf{n}$.

Таким образом, если площадь боковой поверхности не намного превосходит площадь поперечного сечения канала, то работой вязких сил на перфорированной боковой поверхности также можно пренебречь. (Если вдув отсутствует, то эта работа в точности равна нулю.)

Для каналов с неперфорированными стенками, в которых реализуется развитое течение, условие $M = 0$ выполняется без привлечения дополнительных предположений.

Следовательно, выполняется соотношение

$$\Delta\Pi = \Pi' + N + \Phi + D \tag{9}$$

Величина $\Pi' + N$ представляет собой обратимое изменение $\Delta\Pi$ и может иметь произвольный знак. При отсосе (вдуве) жидкости величина Π' положительна (отрицательна), а величина N (как указывалось выше) положительна (отрицательна) при отводе (подводе) электрической энергии. Величина $\Phi + D$ (сумма вязкой и джоулевой диссипации в канале) представляет собой необратимые потери полного давления в канале и неотрицательна.

Если в выражении (2) не преобразовывать величину $\mathbf{fv}$, то при тех же предположениях вместо (9) получим соотношение

$$\Delta\Pi = \Pi' + A + \Phi, \quad A = -\int_V \mathbf{v}(\mathbf{j} \times \mathbf{B})dV \quad (A = N + D) \tag{10}$$

Здесь A – работа среды (в единицу времени) по преодолению сопротивления магнитного поля.

Рассмотрим различные частные случаи.

Пусть среда – невязкая жидкость и МГД-эффекты отсутствуют. В этом случае потери потока полного давления $\Delta\Pi = \Pi'$. Для канала с неперфорированными стенками $\Pi' = 0$ и $\Delta\Pi = 0$.

Если отсутствует вдув (отсос) жидкости, имеются эффекты вязкости и реализуется МГД генераторный режим течения, то из (9) следует

$$\Delta\Pi = N + \Phi + D > 0 \tag{11}$$

Каждый из членов в правой части соотношения (11) – положительная величина.

Для анализа МГД-течения с подводом электрической энергии ($N < 0$) удобнее воспользоваться формулой (10). Если $\Pi' = 0$, то $\Delta\Pi = \Phi + A$. При этом A может быть как положительной, так и отрицательной величиной, вследствие чего возможны режимы, когда $\Delta\Pi > 0$ и $\Delta\Pi < 0$. Поэтому осредненное по расходу полное давление может как убывать, так и возрастать по длине канала.

В заключение сделаем два замечания.

Интегральное соотношение (5) получено без использования уравнений для определения магнитного поля $\mathbf{B}$. Поэтому выражение (5) (и все последующие соотношения) имеют общий характер и справедливы при произвольных магнитных числах Рейнольдса.

Интегральное соотношение (7) сформулировано относительно изменения в канале полного давления, осредненного по объемному (массовому) расходу. Иногда заключение о величине гидродинамических потерь в каналах как при отсутствии, так и при наличии магнитного поля делается на основе вычислений перепада полного давления, осредненного по площади поперечного сечения канала. При таком способе осреднения, однако, в общем случае для перепада полного давления нельзя получить интегральное соотношение, имеющее ясный физический смысл.

Для иллюстрации последнего положения рассмотрим течение невязкой жидкости при отсутствии МГД-эффектов, когда полное давление сохраняется вдоль линий тока (отсутствуют потери). Пусть стенки канала непроницаемы для жидкости. В этом случае полное давление, осредненное по расходу жидкости, сохраняется по длине канала при любом распределении гидродинамических параметров, а полное давление, осредненное по площади поперечного сечения, в общем случае изменяется вдоль канала.

С другой стороны, имеется чрезвычайно важный класс МГД-течений (развитые течения в цилиндрических каналах с произвольным поперечным сечением), для которого перепад осредненного полного давления в канале определяется формулой

$$\langle p^* \rangle_1 - \langle p^* \rangle_2 = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) L, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \mathrm{const} \tag{12}$$

Это выражение справедливо для любого из указанных выше способов осреднения. Здесь L – длина канала между сечениями F_1 и F_2.

В качестве примера приведем классическую задачу Гартмана, для которой продольный градиент давления рассчитывается по формуле

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\eta U}{h^2} f(H), \quad f(H) = H^2[K^\circ(H) - K], \quad K^\circ(H) = \frac{H}{H - \mathrm{th}\, H}, \quad H^2 = \frac{\sigma B_0^2 h^2}{\eta}$$

где U – средняя скорость в канале, h – его полуширина, η – коэффициент динамической вязкости, B_0 – приложенное магнитное поле, H – число Гартмана, K – параметр нагрузки. В случае генераторного режима ($0 < K < 1$) функция $f(H)$ положительна, и течение характеризуется уменьшением по длине канала величины $\langle p^* \rangle$. В случае подвода электрической энергии к каналу ($K > 1$) величина $\langle p^* \rangle$ уменьшается по его длине при $1 < K < K^\circ$ и возрастает при $K > K^\circ$ [1]. Если $K = K^\circ$, то полное давление $\langle p^* \rangle$ в канале не изменяется.

Заключение. Еще раз подчеркнем, что полученное в данной работе общее интегральное соотношение является полезным для оценки необратимых потерь в магнитогидродинамических каналах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ватажин А.Б., Любимов Г.А., Регирер С.А.* Магнитогидродинамические течения в каналах. М.: Наука, 1970. 672 с.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидромеханика. М.: Наука, 1986. 736 с.
3. *Ватажин А.Б., Жестков Г.Б., Сепп В.А.* Турбулентное течение газа в криволинейном канале при наличии отсоса из отрывной зоны // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 4. С. 72–80.

Москва

Поступила в редакцию
22. IV. 1997